Gdańsk, 25 kwietnia 2026 r.

Tomasz Szarek
Instytut Matematyki Stosowanej
Politechniki Gdańskiej
& Instytut Matematyczny PAN
oddział w Sopocie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Martyny Górskiej
pt. *Rozłączność automorfizmów zachowujących miarę, ortogonalność ciągów i funkcje arytmetyczne*

Przedłożona mi do oceny rozprawa mgr Martyny Górskiej to znakomicie napisana dysertacja doktorska poświęcona ważnym zagadnieniom nowoczesnej teorii ergodycznej. Praca składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i obszernej bibliografii. Liczy 132 strony i została przygotowana na podstawie wyników zawartych w dwóch współautorskich artykułach: *Joining properties of automorphisms disjoint with all ergodic systems* (wspólnie z P. Berkiem i T. de la Rue), opublikowanym w „Ergodic Theory and Dynamical Systems" w 2025 roku, oraz *On orthogonality to uniquely ergodic sequences* (wraz z M. Lemańczykiem i T. de la Rue), który został przyjęty do druku w „Journal d'Analyse Mathématique".

Rozprawa przynosi rozwiązanie problemu Boshernitzana inspirowanego słynną hipotezą Sarnaka (zob. J.-P. Conze, T. Downarowicz, J. Serafin, *Correlation of sequences and of measures, generic points for joinings and ergodicity of certain cocycles*, „Transactions of the American Mathematical Society", 369 (2017), 3421–3441). Problem ten to – scharakteryzowanie ograniczonych ciągów prostopadłych do klasy UE wszystkich układów dynamicznych, posiadających jedyną unormowaną miarę niezmienniczą (*unique ergodicity*), to znaczy ciągów $(u(n))_{n\geq 1}$, $u(n) \in \mathbb{C}$ oraz $|u(n)| \leq 1$, które spełniają następujący warunek prostopadłości:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x)u(n) = 0,$$

dla dowolnego $f \in C(X)$ oraz dowolnego $(X,T) \in \text{UE}$. Oryginalna hipoteza Sarnaka dotyczy prostopadłości funkcji Möbiusa μ względem układu dynamicznego mającego entropię topologiczną zero.

Drugim ważnym zagadnieniem poruszanym w rozprawie jest pytanie o warunki, które musi spełniać dowolny automorfizm określony na standardowej przestrzeni probabilistycznej, aby był on rozłączny ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi. Rozłączność dwóch automorfizmów T i S oznacza, że miara produktowa jest jedynym połączeniem (w sensie Furstenberga) tych automorfizmów.

Pozornie te dwa główne zagadnienia są od siebie odległe. Jest to jednak mylne wrażenie, jak zauważa autorka we wstępie, sam problem Boshernitzana motywuje do opisu klasy automorfizmów rozłącznych ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi. Dlatego ewentualny zarzut o niespójność rozprawy jest całkowicie bezzasadny.

Struktura pracy: Po krótkim wprowadzeniu następuje obszerny — stanowiący połowę objętości pracy — rozdział z wiadomościami wstępnymi (rozdział 2). Nie czynię z tego zarzutu; pragnę jedynie zwrócić uwagę na to, jak zaawansowany jest charakter badań prowadzonych przez mgr Górską, skoro wymagają one tak szerokiego wprowadzenia. Ze względu na ogrom pojęć i definicji niezwykle przydatne byłoby jednak sporządzenie indeksu w pracy.

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu rodziny automorfizmów określonych na standardowej przestrzeni probabilistycznej, które są rozłączne z każdym automorfizmem ergodycznym $\mathrm{Erg}^{\perp}$. Główny wynik tej części rozprawy to podanie pełnej charakteryzacji rodziny $\mathrm{Erg}^{\perp}$ — twierdzenie 3.2.1 (wynik ze wspólnej pracy z M. Lemańczykiem i T. de la Rue).

Drugim ważnym zagadnieniem poruszanym w tym rozdziale jest kwestia istnienia mnożników dla wspomnianej klasy operatorów. Mnożnikiem nazywamy taki automorfizm z tej rodziny, którego złożenie (produkt) z dowolnym innym automorfizmem z tej samej klasy również do niej należy. Najważniejszy wynik tego rozdziału — twierdzenie 3.3.2 — dowodzi, że rodzina owych mnożników jest trywialna i składa się wyłącznie z identyczności.

Rozdział 3 zawiera wiele innych interesujących rezultatów; na przykład twierdzenie mówiące, że klasa $\mathrm{Erg}^{\perp}$, mimo braku zamkniętości na branie połączeń, jest zamknięta ze względu na produkty kartezjańskie jej elementów (twierdzenie 3.4.1) czy dowód istnienia w tej klasie automorfizmu, którego wszystkie samopołączenia należą do tej klasy (twierdzenie 3.5.3). Dowód tego faktu jest dalece nietrywialny i zasługuje na szczególne uznanie.

Spektakularne wyniki rozprawy zawiera rozdział 4. Twierdzenie 4.2.1 przynosi pełną charakteryzację elementów prostopadłych do słabo ergodycznej części przestrzeni L^2, wyrażoną w języku średniej warunkowej względem pewnej rodziny 2-samopołączeń danego automorfizmu. Przy rozwiązaniu *problemu Boshernitzana* kluczową rolę odgrywał wniosek wyprowadzony z tego twierdzenia (wniosek 4.6.2), zaś sama charakteryzacja ograniczonych ciągów prostopadłych do klasy UE (*problem Boshernitzana*) podana jest w stwierdzeniu 4.5.1. Imponujący jest dowód twierdzenia

4.8.5 przedstawiający postać samopołączenia rzędu 2 układu Furstenberga quasi-generującej funkcji **u** w języku $*$-słabej zbieżności odpowiednich miar empirycznych.

I na koniec, bardzo ciekawie prezentują się rozważania zawarte w rozdziałach 5 i 6, pokazujące siłę wcześniejszych teoretycznych rozważań przy analizie konkretnych szczególnych przypadków.

Ocena pracy: Wyniki zawarte w rozprawie twórczo i znacząco wpisują się w badania ważnych zagadnień współczesnej matematyki, obok dokonań matematyków tej klasy, co H. Furstenberg, P. Sarnak, T. Tao czy, *last but not least*, Mariusz Lemańczyk – promotor ocenianej rozprawy. Od fundamentalnej pracy Hillela Furstenberga (por. *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, „Math. Systems Theory", 1 (1967), 1–49) połączenia układów dynamicznych i ich rozłączność stanowią jedno z podstawowych pojęć teorii ergodycznej. Stąd tematykę pracy ocenić należy bardzo wysoko.

Pracę przeczytałem z dużym wysiłkiem; nie będąc ekspertem w tej dziedzinie, byłem jedynie w stanie zweryfikować poprawność i kompletność rozumowań — nie mogę jednak z czystym sumieniem stwierdzić, że w pełni zgłębiłem wszystkie jej niuanse. Praca jest poprawna i bardzo starannie zredagowana. Znalazłem jedynie nieliczne, drobne usterki (np. błędne odwołanie do definicji — na str. 10 powinno być: patrz definicja 2.3.68, a nie 2.3.9), o których w zasadzie nie warto wspominać.

Rozprawa prezentuje niezwykle wysoki poziom naukowy i imponuje mi wiedza, którą zdobyła Doktorantka. W czasie szczegółowej prezentacji rezultatów rozprawy wielokrotnie podkreślałem mój zachwyt nad uzyskanymi wynikami.

Z recenzenckiego obowiązku muszę zaznaczyć, że wyniki zawarte w rozprawie mgr Górska uzyskała we współpracy ze znakomitymi matematykami, ale znając wysokie standardy naukowe i moralne współautorów, nie mam najmniejszych podejrzeń co do znaczącego udziału Doktorantki. Zatem ta kwestia nie budzi żadnych wątpliwości.

Konkluzja: Pani mgr Martyna Górska przygotowała wybitną rozprawę doktorską — jedną z najlepszych, jakie dotychczas recenzowałem — zawierającą niezwykle wartościowe i poznawczo interesujące wyniki. Ich wypracowanie wymagało dużej biegłości warsztatowej oraz rzetelnej, żmudnej analizy matematycznej, co zasługuje na wyraźne uznanie. **Z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedłożona praca spełnia z nadwyżką wszystkie ustawowe kryteria stawiane rozprawom doktorskim, w związku z czym wnoszę o dopuszczenie mgr Martyny Górskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Z prawdziwą przyjemnością wnioskuję o wyróżnienie tej rozprawy.**

Tomasz [illegible]