



---

Prof dr hab. Piotr Oprocha  
University of Ostrava  
Centre of Excellence IT4Innovations - IRAFM  
30. dubna 22, 701 03 Ostrava 1, Czech Republic  
e-mail: piotr.oprocha@osu.cz

---

Ostrava, 5 maja 2026

## RECENZJA

rozprawy doktorskiej **mgr Martyny Górskiej**

*„Rozłączność automorfizmów zachowujących miarę, ortogonalność ciągów i funkcje arytmetyczne”*

Rozprawa doktorska mgr Martyny Górskiej, będąca przedmiotem tej recenzji, składa się z 132 stron i podzielona została na 6 rozdziałów. Została napisana w języku polskim, pod opieką promotora prof. dr hab Mariusza Lemańczyka. Główną tematyką rozprawy jest pojęcie rozłączności i ortogonalności wybranych klas automorfizmów przestrzeni probabilistycznych (m.in automorfizmy ergodyczne i monoergodyczne). Badania w ramach teorii ergodycznej prowadzone są w podejściu motywowanym teorią spektralną oraz teorią operatorów.

Materiał przedstawiony w rozprawie jest spójny tematycznie a przedstawione wyniki i tematykę badawczą bez wahania można zaliczyć do głównego nurtu współczesnej teorii układów dynamicznych czy wężej, teorii ergodycznej. Prowadzone badania są też dość spójne pod względem stosowanych metod oraz pytań badawczych. Rozprawę rozpoczyna kilkustronicowy wstęp, podsumowujący główną motywację i wyniki rozprawy. Autorka wyjaśnia w nim powiązania rozważanych pojęć ze znanymi hipotezami (Sarnaka, Chowli) w tym zawartymi w nich pojęciami ortogonalności względem ciągów oraz rozłączności układów miarowych. Pojawiające się w rozprawie pojęcie układu Furstenberga jest też nie przypadkowe, gdyż to za jego sprawą pojęcie rozłączności układów miarowych i topologicznych pojawiło się w literaturze matematycznej. Dalsza część wstępu podsumowuje główne twierdzenia udowodnione w rozprawie. Mimo, że są one numerowane literami A,B,C,..., autorka podaje ich powiązanie z wynikami w konkretnych rozdziałach. Po Wstępie następuje obszerny, bo liczący około 50 stron rozdział zatytułowany „Wiadomości wstępne” zawierający podstawowe definicje, znane fakty oraz pochodzące w większości z literatury (tzn. nie dowodzone bezpośrednio w rozprawie) twierdzenia pomocnicze, wykorzystywane dość intensywnie w dalszej części rozprawy. Warto tutaj podkreślić, że nie ma w nim informacji na wyrost, a wręcz przeciwnie, część przedstawionego materiału jest czasami nazbyt skrótowa. To już na wstępie pokazuje poziom prowadzonych badań, czy też inaczej mówiąc, poziom „wejścia” potrzebny to zrozumienia rozważań prowadzonych przez autorkę w głównej części rozprawy. Nie ulega wątpliwości, że do prowadzonych badań potrzebna jest dość szeroka wiedza z zakresu teorii ergodycznej oraz spora wprawa w operowaniu  $*$ -słabą topologią na przestrzeni miar. Wprowadzona w tym rozdziale notacja jest dość konsekwentnie (poza drobnymi wyjątkami) stosowana w całej rozprawie.

Główną część merytoryczną rozprawy stanowią kolejne rozdziały o numerach od 3 do 6. Powstały one w dużej części w oparciu (o współautorskie) prace mgr Górskiej, w szczególności (pozycje według numeracji w bibliografii).

- [6] P. Berk, M. Górska, T. de la Rue, *Joining properties of automorphisms disjoint with all ergodic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **45** (2025), 1998-2022.
- [26] M. Górska, M. Lemańczyk, T. de la Rue, On orthogonality to uniquely ergodic sequences, J. Analyse Math., in press, preprint arXiv:2404.07907.

Przejdę teraz do podsumowania głównej części merytorycznej rozprawy. Rozdział 3 stara się scharakteryzować automorfizmy rozłączne ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi. Oczywiście warunek  $T \in \text{Erg}^\perp$  dla nietrywialnego  $T$  oznacza, że nie może ono być ergodyczne. Twierdzenie 3.2.1. przynosi pierwszą charakteryzację takich nieergodycznych odwzorowań. Następnie analizowane są mnożniki przestrzeni  $\text{Erg}^\perp$ , czyli elementy których połączenia z innym elementem  $\text{Erg}^\perp$  nie wyprowadzają poza tę klasę. Pełną charakteryzację przynosi Twierdzenie 3.3.2. Okazuje się, że jest to klasa ID, czyli automorfizmy których składowe ergodyczne muszą być jednopunktowe (są to identyczności przestrzeni probabilistycznych). W dalszej części tego rozdziału rozważane są produkty kartezyjskie i samopłączenia. Rozważane są związki pomiędzy mnożnikami a klasami charakterystycznymi, w szczególności wskazuje się na istnienie klas charakterystycznych wewnątrz  $\text{Erg}^\perp$ . Ciekawe i użyteczne jest też twierdzenie 3.5.3 pozwalające konstruować elementy  $\text{Erg}^\perp$  na podstawie założeń o włóknach ergodycznych  $T$ . Pokazuje ono także zastosowanie klas PID i MSJ w praktyce. Tym sposobem redukuje się sprawdzanie rozłączności nieskończonego produktu do testów jego współrzędnych.

Rozdział 4 poświęcony jest badaniom nad problemem stowarzyszonym z problemem Boshernitzana. W oryginalnej wersji tego problemu pytamy o charakteryzację wszystkich ciągów ortogonalnych do wszystkich homeomorfizmów minimalnych i mono-ergodycznych a w rozprawie rozważana jest jego wersja równoważna, wygodniejsza z punktu widzenia stosowanego aparatu pojęciowego. W pierwszej kolejności rozważania tego rozdziału skupiają się na przestrzeni  $F_{we}(T) \subset L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  która jest domkniętą podprzestrzenią rozpinaną przez słabo ergodyczne elementy układu  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Same elementy słabo ergodyczne definiowane są jako elementy obrazu operatora Markova zadanego przez połączenie  $\rho$  automorfizmu  $T$  z innym automorfizmem ergodycznym, co uzasadnia tytuł rozdziału 4. Pierwszy z głównych wyników tego rozdziału, Twierdzenie 4.2.1 podaje, przy pewnych dodatkowych założeniach odnośnie  $f$ , charakteryzację  $f \perp F_{we}(T)$ . Jest ono wykorzystane później we Wniosku 4.6.2 by wypowiedzieć warunek na ortogonalność poprzez własności samopłączeń  $\lambda \in J_2(T)$  automorfizmu  $T$ . Nawiązanie do tego podejścia stanowi sekcja 4.5. w której podaje się warunki na ortogonalność funkcji  $\mathbf{u}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$  do układów monoergodycznych, choć tym razem ortogonalność rozumiana jest jako spełnienie warunku (1.2), czyli wspomniany wcześniej, zmodyfikowany problem Boshernitzana. Istotny jest tutaj warunek równoważny ze Stwierdzenia 4.5.1 który sprowadza problem Boshernitzana do badania stowarzyszonego z  $\mathbf{u}$  układu Furstenberga. Rozdział 4 w istotny sposób dopełnia sekcja 4.7. w której konstruowane są ciągi ortogonalne do wszystkich układów monoergodycznych, co wykazuje, że rozważany problem Boshernitzana może istotnie mieć pozytywne rozwiązanie. Mimo, że z wypowiedzi wyników z sekcji 4.5. i 4.7. tego nie widać, istotnym elementem dowodowym są odpowiednio konstruowane połączenia. Rozdział 4 zamyka Twierdzenie 4.8.5 które sprowadza weryfikację Wniosku 4.6.2. do weryfikacji pewnych warunków kombinatorycznych (badanie zachowania na krótkich przedziałach).

Rozdział 5 wraca ponownie do automorfizmów rozłącznych z automorfizmami ergodycznymi, jednak tym razem dodatkowo zakłada się, że pochodzą one z klasy charakterystycznej  $\mathcal{F}$  (czyli pytamy o rozłączność z  $\mathcal{F} \cap \text{Erg}$ ). Najważniejsze tutaj wydają się być Stwierdzenia 5.0.1. oraz 5.0.8. które dostarczają warunków równoważnych na rozłączność automorfizmów czy też ortogonalność ciągu arytmetycznego do klasy automorfizmów. Mi-

mo, że autorka nie poświęca zbyt wiele miejsca tym wynikom, to mogą one mieć ciekawe zastosowania praktyczne. Przykładem takiej pomysłowej „żonglerki” pomiędzy  $T$  oraz  $T|_{\mathcal{A}_T}$ , oraz korzyści z tego płynących jest już sam dowód Stwierdzenia 5.0.1. Pewnym zaskoczeniem jest sekcja 5.0.3. zatytułowana przykłady. Rzeczywiście pojawia się w niej krótki przykład 5.0.9 a potem pewne własności, które nie zostają podsumowane żadnym konkretnym przykładem. Sekcja ta też nie podaje na wstępie praktycznie żadnych komentarzy odnośnie jej celu.

Rozdział 6 wydaje mi się dodany nieco na siłę. Pojawia się w nim Wniosek 6.1.1. charakteryzujący pretensjonalne funkcje multiplikatywne ortogonalne do wszystkich układów monoergodycznych jako charaktery Archimedesesa oraz Twierdzenie 6.1.5. podające warunki równoważne na to by funkcja  $u$  spełniała uśrednioną własność Chowli. O ile sama tematyka jest z pewnością ważna, a przedstawione (krótkie) dowody wiążą się z rozważaniami w sekcjach 4 i 5, to z punktu widzenia jakości samej rozprawy nie wiele już wnoszą. Gdyby tą sekcję w całości pominąć, to nie wpłynęłoby to w żadnym stopniu na moją końcową ocenę.

**Bardzo wysoko oceniam wyniki zaprezentowane w rozprawie.** Zawierają wiele dłuższych, wymagających sporej pomysłowości rozumowań. Mimo, że rozważane w kolejnych twierdzeniach pojęcia są tematycznie spójne (na przykład rozłączność z automorfizmami ergodycznymi), to jednak stosowane metody sporo się różnią. Widać też pewną systematykę w dowodzonych pojęciach. Pojawiające się we wcześniejszych rozdziałach twierdzenia i lematy stają się narzędziami w kolejnych, bardziej ukierunkowanych na specyficzny wynik dowodach. Jestem przekonany, że wiele z uzyskanych wyników (np. charakteryzacja mnożników), klasy charakterystyczne, warunki wystarczające do należenia do danej klasy charakterystycznej, czy też po prostu na rozłączność między danymi typami układów dynamicznych stanowi przydatne narzędzie w dalszych badaniach. Na uwagę zasługuje także fakt, że badania są prowadzone w sposób systematyczny. Kolejne strony odsłaniają kolejne własności rozważanych pojęć, starając się dotrzeć do głębi problemu czy też podać pełną charakteryzację.

W polskim systemie nauki praca nie jest poprawiana przez autora przed obroną i niestety w bibliotece pozostaje jej pierwotna wersja. Zatem w sytuacji gdy część rozprawy jest już w zasadzie przyjęta do druku lub wydana w czasopiśmie, szczegółowe uwagi nie mają za wiele sensu, bo w zasadzie nie ma możliwości ich uwzględnić, nawet gdyby autorzy wyrazili taką chęć. Z drugiej strony uwagi krytyczne, mogą zwrócić uwagę autora na pewne niedociągnięcia i braki. Jestem przekonany, że to morze wpłynąć pozytywnie na warsztat matematyczny autorki w przyszłych projektach i z tego powodu przedstawię w tej recenzji pewną (z pewnością niekompletną) listę niedociągnięć. Nie są to błędy merytoryczne a jedynie usterki, które w jakimś stopniu utrudniły lekturę pracy. Liczę, że dzięki temu przyszłe prace autorki będą jeszcze lepsze.

Zacznę od uwag natury bardziej ogólnej. Zawierają one także kilka pytań, które być może warto wyjaśnić podczas obrony:

25: Zapis  $(X/\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$  budzi wątpliwości. Oznaczenie  $X/\mathcal{C}$  to inna wersja zapisu przestrzeni ilorazowej  $X/\sim_{\mathcal{C}}$  gdzie relacja  $\sim_{\mathcal{C}}$  opisana jest jeszcze przed Uwagą 2.3.25. Ale  $\mathcal{C}$  to zbiór podzbiorów przestrzeni  $X$  nie przestrzeni ilorazowej, więc od strony formalnej zapis  $(X/\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$  nie ma sensu jako przestrzeń probabilistyczna. Podobnie, co oznacza  $\mu|_{\mathcal{C}}$ . Czy nie jest tak, że jeśli oznaczymy odwzorowanie ilorazowe  $\pi: X \rightarrow X/\mathcal{C}$  to  $\hat{\mathcal{C}} = \{\pi(C) : C \in \mathcal{C}\}$  jest  $\sigma$ -algebrą na  $X/\mathcal{C}$  o własności  $\pi^{-1}(\hat{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$ , a oznaczenie  $\mu|_{\mathcal{C}} = \pi_*\mu$  stosujemy by podkreślić, że wartości  $\pi_*\mu$  przy tak określonym faktorze zależą jedynie od wartości  $\mu$  na zbiorach  $\mathcal{C}$ ? Stosowany zapis sugeruje, że skonstru-

- owany faktor (indukowany na przestrzeń ilorazową przez  $T$ ) jest miarowo izomorficzny z  $(X, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}}, T)$ . Czy tak jest? Może to jakieś twierdzenie?
- 27<sub>1</sub>: „...z dokładnością do izomorfizmu miarowego ...” - czy to jest jakieś twierdzenie, że opisane w konstrukcji zbiory z miarami prowadzą do układu izomorficznego? W tej postaci to stwierdzenie można porównać do „łatwo sprawdzić, że  $[0, 1]_{/0\sim 1}$  to okrąg z dokładnością do homeomorfizmu” jednak w praktyce (czego oczekiwałbym od rozprawy doktorskiej) nie jest to takie natychmiastowe i wymaga pewnej dodatkowej precyzji/wyjaśnienia (jeśli nie powołać się na stosowne twierdzenie).
- 54: Dowód Lematu 2.4.4 jest bardzo sprytny. Jednak dopracowanie elementów dowodu pozostawiono czytelnikowi. Jak stosujemy liniową gęstość i twierdzenie Herglotza (które chyba w pracy nie jest przytoczone). Czemu musimy przejść przez zbiór  $\Upsilon$ , w którym momencie korzystamy, że układ jest topologiczny a nie miarowy. W zasadzie każda linijka tego dowodu ma znaczenia i korzysta z pewnych nietrywialnych obserwacji/faktów.
- 49<sub>13</sub>: „Wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych funkcji...” - ta metoda sprawdzania rozłączności jest dość często stosowana w pracy. Nie jest to jednak warunek wprost z definicji, więc szkoda, że nie doczekał się jakiegoś szerszego komentarza (w każdym razie na taki nie natrafiłem podczas lektury pracy).
- 55<sub>2</sub>: „Zatem następujące warunki są równoważne...” jest dosłowną kalką z artykułu. Jako, że rozprawa doktorska ma także pokazywać samodzielność aurora, zdecydowanie chciałbym zobaczyć dokładny wyjaśnienie dla tych punktów oraz transformaty Fouriera kilka linijek wyżej.  
Podobne uwagi dotyczą kilku innych miejsc w pracy, m.in. listy własności po Twierdzeniu 4.2.1.
- 64: Odwzorowanie  $(x, y) \mapsto (x + \alpha, x + y)$  bardzo podobne w zapisie do  $(x, y) \mapsto (x, x + y)$  ze strony 64 jest innym prostym, lecz ważnym przykładem (w dynamice topologicznej), choć zapewne o zupełnie innych własnościach ergodycznych. Czy można powiedzieć coś ciekawego o tym odwzorowaniu z punktu widzenia teorii ergodycznej?
- 57<sup>17</sup>: Odwzorowanie  $S$  pojawia się w pracy w wielu różnych kontekstach (choćby w Definicji 2.4.12, Twierdzeniu 2.4.14 i Twierdzeniu 2.4.15). Potrafię zrozumieć dlaczego rezygnujemy ze standardowego oznaczenia  $\sigma$  jednak  $S$  nie jest najlepszym wyborem, a jeśli już, w każdym miejscu należałoby dodawać, że to przesunięcie.
- 66: Trudno dowód Wniosku 3.2.2 nazwać dowodem. Jak dokładnie wygląda wzór określający stosowne nietrywialne połączenie?
- 66: Dowód Wniosku 3.2.3: nie uwzględnia przypadku  $\bar{x}_0 \in \bar{X}_1$ . Nie wiele to zmienia w dowodzie, jednak zdaje się być koniecznym elementem rozumowania.
- 67: Wniosek 3.2.6 pojawia się zbyt późno. Jest używany w dowodzie 3.2.3 wcześniej. Można się także było pokusić o dowód. Udaje się on tylko dlatego, że mamy przeliczalne rozbitcie co dobrze współgra z definicją zbioru  $G_\delta$ .
- 67<sup>8</sup>: po jakim zbiorze całkujemy we wzorze  $B \mapsto \int \rho_{\bar{x}, \bar{x}'}$  ...
- 74<sup>7</sup>: „Bez straty ogólności możemy założyć...” - bo gdyby to nie zachodziło, to wtedy co dokładnie robimy?
- 78<sub>4</sub>: „Z powyższego wyniku (przez indukcję)...” - rozumem ten komentarz tak, że stosujemy indukcje  $\prod_{i=1}^n \dots \Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} \dots$ , jednak ostatecznie potrzebujemy własności dla  $\prod_{i=1}^\infty \dots$ . To wymaga dodatkowego komentarza.
- 80<sub>12</sub>: Wiemy, że  $\pi_*^{n+1} \psi_{\bar{x}}$  jest miara ergodyczną, ale skąd wiemy, że jest to akurat  $\kappa$  a nie jakaś inna miara ergodyczna dla  $R$ . To wymaga co najmniej komentarza. Co oznacza

„jednoznaczność rozkładu ergodycznego” liniijkę wyżej (tzn. na wypowiedź jakiego twierdzenia w pracy się powołujemy)?

- 85: W rozdziale 4 nagle następuje zmiana notacji, i wcześniejsze  $\sum_{n=0}^N$  zostaje zastąpione przez  $\sum_{n \leq N}$ . Jest to o tyle nieprecyzyjne, że  $T^n$  dla ujemnych  $n$  ma także sens.
- 89: Co oznacza  $\Phi_\rho|_{L^2_0(\bar{X}, \bar{\mu})}$ ?  $\Phi_\rho$  Nie są podane przestrzenie na których działają  $R$  oraz  $T$  ale wydaje się, że dziedziną  $\Phi$  jest  $L^2(X, \mu)$  a nie  $L^2(\bar{X}, \bar{\mu})$ .
- 90<sup>10</sup>: Po jakich zbiorach dokładnie całkujemy przechodząc przez kolejne równości? Przykładowo  $\nu$  jest miarą na  $Y$  według konstrukcji na stronie 27. W matematyce zazwyczaj oczekujemy precyzji w odniesieniu do dziedzin funkcji itp.

Na koniec zamieszczam dodatkowe uwagi. Są to już bardziej literówki, pominięcia czy też drobne niejasności lub niedociągnięcia które zwróciły moją uwagę podczas lektury pracy:

- 29<sup>3</sup>: Wypada dopisać ”p.w.”
- 36<sub>6</sub>: Definicja 2.3.58 mówi tylko o PID nie o  $n$ -PID.
- 38<sub>1</sub>: Definicja  $F_{we,0}(T)$  pojawi się dopiero za 4 strony, jednak próżno tego oznaczenia szukać w Definicji 2.3.68.
- 35: Biorąc pod uwagę, że założenia o połączeniach poza diagonalnych pojawią się kilkadziesiąt stron dalej, dobrą praktyką byłoby stworzenie definicji i odwołanie się do niej poprzez numer. Ta sama uwaga dotyczy  $J_2^{RelErg}$  na stronie 40. Aby zrozumieć wypowiedzi twierdzeń czytelnik musi wertować rozprawę linia po linii w trudnych do zlokalizowania częściach pracy. Autorka nie stara się ułatwić tego mozolnego procesu.
- 54: Można się domyślić czym jest  $\sigma_{f,\mu}$  w Lemacie 2.4.4. Jednak skoro przytaczamy już ogólną wersję twierdzenia spektralnego w 2.2.8 aż prosi się o komentarz jak to twierdzenie stosuje się w kontekście rozważań w pracy (układy dynamiczne).
- 54<sub>1</sub>: Ciężko odgadnąć o jaką zwykłą metrykę produktową chodzi. Może o dowolną metrykę zgodną z topologią produktową? A może o jakąś konkretną?
- 55: Uwaga 2.4.6 jest być może standardowym podejściem w publikacjach, jednak w rozprawie doktorskiej można było pokusić się o bardziej elegancki dowód.
- 57: Szkoda, że autorka nie zadała sobie trudu sprawdzenia jaki numer ma Stwierdzenie 2.4.17 przytaczane w rozprawie w 360 stronicowej monografii [11].
- 57<sub>12</sub>: Byłoby grzecznie wspomnieć w tym miejscu Kryłowa i Bogolubowa skoro nakreślamy dowód ich twierdzenia.
- 65<sup>5</sup>: Nie potrafię doszukać się w pracy definicji  $L^2(\mathcal{J}_T)$ .
- 65<sup>5</sup>: Czy  $\mathcal{J}_T$  w tym miejscu oraz  $\mathcal{J}(T)$  na stronie 25 są ze sobą jakoś powiązane? Dobrą praktyką jest zdecydować się na jedno oznaczenie i stosować je konsekwentnie w całej pracy (nawet jeśli różni autorzy preferują różne oznaczenia).
- 65<sup>10</sup>: Zatem  $\sigma_{f_1 \otimes g} \perp \sigma_h$  - czy nie powołujemy się tutaj na Lemat 2.2.5?
- 65<sup>10</sup>: Równość  $\sigma_{f_2 \otimes h} = \sigma_{f_2} * \sigma_h$  - powinna zostać uzasadniona; nie mogę znaleźć w rozprawie definicji operacji  $*$ .
- 66<sub>9</sub>: „Ponieważ klasycznie...” - zdaje się, że to twierdzenie pojawia się w pracy z dowodem i jakimś numerem.
- 71: Wydaje się, że w dowodzie Lematu 3.3.3 konieczne jest także użycie Stwierdzeń 2.3.10 i 2.3.12.
- 72<sub>18</sub>: Jeśli chcemy zastosować 2.3.91 aby otrzymać stosowne zawieranie, wymaga to dodatkowego komentarza.
- 74<sup>5</sup>: „Łatwo sprawdzić...” - co nas w takim razie powstrzymało przed tym? To chyba 2-3 zdania więcej.

- 74<sup>12</sup>: Zastosowanie Lematu 3.3.9 wymaga aby  $(X, T)$  był układem topologicznym a z założenia mamy jedynie automorfizm. To wymaga pewnych dodatkowych działań nie opisanych w dowodzie
- 76<sup>12</sup>: Zamiast odwoływać się do (2.20) bardziej wartościowe byłoby wypowiedzenie lematu który można w tym miejscu zastosować. Byłoby to zdecydowanie bardziej eleganckie podejście.
- 77<sup>16</sup>: „Przypomnijmy najpierw...” - to bardzo ważne i nietrywialne twierdzenie, które jest przytoczone wcześniej w pracy, a w literaturze funkcjonuje pod pewną nazwą.
- 77<sub>10</sub>: Według oznaczeń kilka linijek wcześniej powinno być  $\pi^{X \times Z}$  a nie  $\pi^{X, Z}$ .
- 78<sub>14</sub>: „... iloczyn kartezjański ... wspólną wartość własną” - to chyba jest jakieś twierdzenie. Szkoda, że nie zostało zacytowane poprzez podanie numeru w pracy.
- 79: Tutaj termin PID pojawia się chyba pierwszy raz od ponad 40 stron. Warto czytelnikowi nie znającemu tej terminologii choć w przybliżeniu podać gdzie w pracy można znaleźć definicję. Podobna uwaga dotyczy przykładowo strony 86 i definicji  $F_{we}$ , „funkcji pretensjonalnych” na stronie 87, definicji  $F_{we,0}$  na stronie 88 czy  $J^{RelRrg}$  ze strony 89 itp.
- 82: Nie znając oryginalnej konstrukcji Chacon flow nie da się praktycznie zrozumieć opisu konstrukcji ze Stwierdzenia 3.5.4.
- 83: Czemu nie napisać wprost, że chodzi o Przykład 2.3.97(6)?
- 85: Formalnie zapis  $T|_{\bar{X}}$  nie ma sensu (odczytywany jako zawężenie odwzorowania) bo  $\bar{X}$  nie jest podzbiorem  $X$ . Chodzi zapewne o jakieś odwzorowanie ilorazowe. Podobnie, co oznacza  $\mu|_{\bar{X} \times \bar{X}}$ ?
- 86<sub>5</sub>: co oznacza „a.a”?
- 104: Formuła (4.21) wskazuje na istotne różnice pomiędzy układami Furstenberga a  $X_{\mathbf{u}}$ . Można było bardziej podkreślić sytuacje gdy  $X_{\mathbf{u}}$  ma znaczenie, a gdy może to być  $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ . Zwróćmy uwagę, że przesunięcie  $S$  nie jest automorfizmem  $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  gdyż nie jest odwracalne.
- 108: ”an atom”
- 115<sup>2</sup>: Zamiast pracy [33] lepiej odwołać się do wyników z rozprawy doktorskiej (m.in. 2.3.15). Nie każdy też pamięta nadal Definicję 2.3.96 ze strony 50.
- 115<sub>5</sub>: Dowód (i)  $\Rightarrow$  (ii) także wymaga użycia 2.3.99.
- 116<sup>3</sup>: Ponownie, ”Łatwo zauważyć...” prosi się o dowód.
- 116: Faktor Pinskera pojawia się w pracy chyba tylko w 5.0.4 i nigdzie indziej.
- 116: Jaki jest cel Uwagi 5.0.6?
- 117: Trudno w tym momencie odszyfrować czym jest  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ .
- 119: W rozdziale trudno doszukać się „konkretnych” przykładów.

Powyższe uwagi krytyczne nie umniejszają wartości merytorycznej pracy, którą oceniam bardzo wysoko. Pewnie niedosyt budzi jedynie to, że w miejscach w których autorka mogła dać popis swoich własnych umiejętności podając szersze i bardziej kompletne dowody, poprzestała na praktycznie dosłownym tłumaczeniu tekstu ze wspólnej pracy.

W mojej opinii przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim określone w obowiązujących przepisach. Buduje ona skomplikowany warsztat badawczy oparty o teorię spektralną i teorię ergodyczną a rozważane pojęcia i wykazane własności wpisują się we współcześnie rozwijaną tematykę badawczą, poszerzając w znacznym stopniu wiedzę na temat rozłączności automorfizmów, w szczególności pochodzących od układów Furstenberga generowanych przez funkcje arytmetyczne. Przedstawione dowody wymagają znacznej wiedzy teoretycznej, biegłości w zakresie narzędzi teorii ergodycznej oraz nietrywialnych i długich wywodów matematycznych. Nie

mam wątpliwości, że materiał przedstawiony w pracy prezentuje bardzo wysoki poziom merytoryczny spełniając z nawiązką oczekiwania wobec dobrych prac naukowych z matematyki. **W związku z powyższym, wnioskuje o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgr Martynty Górskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**