

Wrocław, 27 marca 2026

Bartosz Frej
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
bartosz.frej@pwr.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej pani Marty Górskiej
„Rozłączność automorfizmów zachowujących miarę, ortogonalność ciągów i
funkcje arytmetyczne”

WSTĘP

Rozprawa doktorska pani Marty Górskiej została napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Mariusza Lemańczyka. Liczy 124 strony, bez uwzględniania spisu treści i bibliografii. Podzielona jest na sześć rozdziałów, z których pierwszy stanowi bogaty wstęp. Znajdziemy w nim przegląd wcześniejszych rezultatów, stanowiących motywację do podjętych badań oraz zbiorcze przedstawienie uzyskanych wyników. Bibliografia zawiera 46 pozycji, ściśle związanych z tematyką rozprawy. Tematykę pracy zaliczyłbym do klasycznej teorii ergodycznej, zarówno ze względu na stosowane techniki, jak i ogólny charakter uzyskanych rezultatów. Badania koncentrują się tu bowiem na charakteryzacji pewnych klas układów z jednym działającym przekształceniem. Nacisk położony jest na układy miarowe, ale znaczna część rozprawy dotyczy układów monoergodycznych, czyli układów topologicznych, ale dopuszczających tylko jedną miarę niezmienniczą.

Rozprawę oceniam pozytywnie, co więcej, uważam, że powinno się rozważyć możliwość jej wyróżnienia.

ZAWARTOŚĆ PRACY

Doktorantka bardzo dokładnie przedstawia wszystkie ważne twierdzenia w rozdziale pierwszym (1.2–1.4), a spis treści jest również bardzo informatywny. Pozwolę sobie więc jedynie podsumować, czego możemy się spodziewać w kolejnych rozdziałach i wyróżnić spośród dwunastu twierdzeń wymienionych we wstępie te, które wydają mi się zajmować centralne miejsce w pracy.

Po „Wstępie” następuje rozdział 2 zatytułowany niewinnie „Wiadomości wstępne”. Spodziewałem się, że jego zawartość będzie mi dobrze znana. Jednak Autorka dość szybko przechodzi od podręcznikowych informacji do przedstawiania bardziej zaawansowanych narzędzi, jak dezintegracja miary czy twierdzenia Kallmana o istnieniu borelowskiego selektora. Po wprowadzeniu podstawowych informacji z klasycznej teorii ergodycznej, jak ergodyczność, mieszanie, czy rozkład na składowe ergodyczne, Doktorantka definiuje kluczowe dla pracy pojęcia połączenia układów i rozłączności w sensie Furstenberga. Ta rozłączność oznacza, że jedyną miarą będącą połączeniem układów (X_1, μ_1, T_1) i (X_2, μ_2, T_2) jest miara produktowa (połączenia to miary na produkcie, które są niezmiennicze względem działania produktowego $T_1 \times T_2$ i których miarami brzegowymi są miary μ_1 i μ_2). To z kolei implikuje, że układy są „skrajnie nieizomorficzne”, używając słów Doktorantki, i nie mają ze sobą nic wspólnego. Podobnie, jak dwie względnie pierwsze liczby naturalne nie mają wspólnych dzielników większych od 1, układy takie nie mogą mieć wspólnych nietrywialnych czynników (czyli układów

będących ich wspólnymi „homomorficznymi obrazami”). Dalej następuje specjalizacja wprowadzanych pojęć i narzędzi, które zostaną użyte w sformułowaniu i dowodzeniu rezultatów: lematy wiążące połączenia z operatorami Markowa, połączenia relatywnie niezależne i relatywnie ergodyczne, mnożniki klas automorfizmów, klasy charakterystyczne układów, część słabo ergodyczna układu itd. Mamy tu też niezbędne pojęcia z dynamiki topologicznej (w tym, definicję układów Furstenberga) oraz omówienie arytmetycznych funkcji moltiplicatywnych. Całość jest zgrabnie podzielona na sekcje i podrozdziały, i umożliwia nawet wybiórcze zapoznanie się z nieznanymi czytelnikowi faktami. Jednak jest to ryzykowne, bo nawet w sekcji, której tytuł brzmi znajomo, może pojawić się specjalistyczny lemacik nieznanymi czytelnikowi, a w ważny sposób odnoszący się do pojęć z innych działów. O tym, jak wiele wiedzy jest tu zgromadzone, niech świadczy to, że rozdział zajmuje 40 stron, a w najobszerniejszym podrozdziale 2.3, dotyczącym teorii ergodycznej, licznik definicji lematów twierdzeń i wniosków kończy się na 2.3.101.

Główna część pracy oparta jest na dwóch pracach współautorskich: M. Górska, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *On orthogonality to uniquely ergodic sequences*, dostępnej w repozytorium *arxiv.org* (przyjęta do druku w *Journal d'Analyse Mathématique*) i P. Berk, M. Górska, T. de la Rue, *Joining properties of automorphisms disjoint with all ergodic systems*, *ETDS* 45 (2025), 1998–2022. Wydaje mi się, że jest to głównie pierwsza z tych prac, do której włożono też wyniki z pracy drugiej, tzn. badanie klasy Erg^\perp układów rozłącznych z wszystkimi układami ergodycznymi, m.in. jej zamkniętość na produkty i twierdzenie, że mnożniki Erg^\perp to wyłącznie identyeczności. Rozdział trzeci dotyczy właśnie studiowania klasy Erg^\perp . Wyróżniłbym w nim dwie części: pierwsza to twierdzenie charakteryzacyjne podające dwa warunki równoważne przynależności do Erg^\perp . Prostszy do wysłowienia mówi, że w rozkładzie na składowe ergodyczne, prawie każde dwa włókna (traktowane jako osobne układy) są rozłączne w sensie Furstenberga. Drugi również odwołuje się do rozkładu na składowe ergodyczne oraz faktora układu zadanego przez σ -ciało zbiorów niezmienniczych. Na tym faktorze przekształcenie działa jako identyeczność. Warunek mówi, że miara produktowa jest jedynym samopowiązaniem układu, którego rzutem na ten faktor jest również miara produktowa. Dalej w rozdziale rozważa się klasę mnożników klasy Erg^\perp , czyli układów, których połączenie z elementem Erg^\perp nie wyprowadza poza tę klasę. W szczególności, Doktorantka formułuje twierdzenie, które identyfikuje mnożniki Erg^\perp jako zbiór wszystkich identyeczności.

Rozdział czwarty poświęcony jest problemowi Boshernitzana, tzn. charakteryzacji funkcji arytmetycznych (ciągów ograniczonych, o wartościach w dysku jednostkowym) ortogonalnych do układów monoergodycznych. Przez ortogonalność funkcji \mathbf{u} do układu (topologicznego) (X, T) rozumiemy zbieżność do zera ciągu $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) \mathbf{u}(n)$ dla każdej funkcji ciągłej f na X i dowolnego $x \in X$. Dla celów charakteryzacji potrzeba pewnej liczby nowych pojęć. Podstawowym obiektem są tu układy Furstenberga, czyli układy miarowe, w których przestrzenią $X_{\mathbf{u}}$ jest domknięcie orbity ciągu \mathbf{u} , traktowanego jako element odwracalnego układu symbolicznego (topologicznego), a miara jest quasi-generowana przez funkcję \mathbf{u} , czyli jest punktem skupienia ciągu miar równo rozłożonych na początkowych fragmentach tej orbity. Dalej, definiuje się słabo ergodyczną część układu dynamicznego przy pomocy operatorów Markowa. Wiadomo, że każde połączenie układów dynamicznych jest związane jednoznacznie z pewnym operatorem Markowa. Słabo ergodyczna część układu (X, μ, T) to podprzestrzeń przestrzeni $L^2(X, \mu)$ rozpięta przez funkcje należące do obrazu jakiegokolwiek z tych operatorów, biorących się z połączeń z automorfizmami ergodycznymi. Pierwszy element potrzebny do charakteryzacji mówi, że \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich układów monoergodycznych wtedy i tylko wtedy, gdy rzut $X_{\mathbf{u}}$ na zerową współrzędną jest ortogonalny w L^2 do każdego

elementu słabo ergodycznej części układu, mającego o zerową całkę (stw. 4.5.1). Do tego dochodzi twierdzenie podające warunki równoważne ortogonalności do części słabo ergodycznej w terminach rzutowania na faktor zadany przez zbiory niezmiennicze, w układzie będącym samopowiązaniem rzutującym się na miarę produktową.

Zarówno wyniki rozdziału 3 jak i 4 mają też ogólniejsze wersje dotyczące klas układów będących podzbiorami Erg^\perp lub, odpowiednio, podzbiorami klasy układów monoergodycznych. Ponadto rozdziały 5 i 6 opisują zastosowania wcześniej opisanych rezultatów, ale nie będę ich opisywał, jako że wspomniane dotąd osiągnięcia są w zupełności wystarczające do pozytywnej oceny doktoratu.

OCENA PRACY

Omawiana praca jest trudna. Jak już pisałem, zawartość pracy jest spora, więc przeczytanie jej ze zrozumieniem było dla mnie dużym wysiłkiem. Używany aparat matematyczny jest bardzo zaawansowany, a cały tekst przywodzi na myśl skomplikowany gobelin, w którym pojedyncze nici wplecione w jednym miejscu pojawiają się później we wzorze w zupełnie innej jego części. Wstęp dobrze porządkuje ten materiał i wyróżnia, które twierdzenia są najważniejsze, ale przy pierwszym czytaniu był dla mnie nałozony, bo ważna pojęcia są w nim tłumaczone pobieżnie. To jednak częsty urok prac matematycznych. Praca w znacznym stopniu dziedziczy styl z artykułów, na których jest oparta. Jest więc dość zwięzła, mimo ponad 120 stron. W wielu miejscach Autorka pozostawia sporo domyślności czytelnika, wskazując, których narzędzi należy użyć, ale bez dodatkowych podpowiedzi, jak to zrobić. Często więc trzeba wertować pracę w te i z powrotem, by odszukać odpowiednie sformułowania wcześniej sformułowanych lematów, a następnie odpowiednio je zastosować, interpretując treść narzędzia w kontekście aktualnych potrzeb. Wołałbym, żeby praca doktorska, nie mająca ograniczeń objętościowych, była pod tym względem bardziej łaskawa dla czytającego. Przykładowo, w dowodzie stwierdzenia 5.0.12 (strona 121, linia 7 od dołu), chciałbym żeby pisać „przechodzimy do odpowiedniego modelu orbitalnego” Autorka wprost wskazała użycie twierdzenia 2.4.15. W dowodzie wniosku 3.5.6 (str. 84) wskazane jest z jakich trzech wcześniej sformułowanych należy skorzystać, ale wydaje się, że można by dodać słowo wyjaśnienia, jak z nich skorzystać, i dowód nie wydłużyłby się bardzo. W uwadze 4.7.5, strona 95, na dłuższą chwilę zawiesiło mnie wnioskowanie bezpośrednio przed użyciem twierdzenia von Neumanna – równość norm średnich Cesaro. Myślę, że przydałoby się zdanie lu dwa wyjaśnienia. Itp.

W szczególności, nie rozumiem dlaczego ostatnia granica w dowodzie stw.4.5.1 wynosi zero. Wydaje mi się, że powstająca tam średnia składa się z kawałków będących początkowymi wyrazami ciągów zbieżnych do zera. Nie widzę, jakie założenie gwarantuje nam, że są one już odpowiednio małe.

Niezależnie od powyższych uwag, praca pokazuje sporą ogólną wiedzę matematyczną i szczegółową znajomość tematyki. Rozumowania są wielopoziomowe, często bardzo pomysłowe i zrozumienie ich daje czytającemu satysfakcję.

Pod względem edytorskim trudna jednoznacznie pracę ocenić. Przyznać należy, że praca zawiera stosunkowo niewiele literówek, zazwyczaj trudnych do wychwycenia w sposób automatyczny. Przykładowo: N zamiast N_k w jednej z sum na str.86, $k\infty$ zamiast $k \rightarrow \infty$ na str.95, Q_j zamiast Q_{-j} na stronie 107, linia 5, czy też mianownik zamiast dopełniacza w treści zdania: „twierdzenie” zamiast „twierdzenia”. Nie utrudniają one czytania. Natomiast skład jest dość niestaranny. Bardzo często wzory brzydko wystają na margines pracy, co dla mnie było irytujące, ale jednak jest to usterka drugoplanowa. Praca zawiera mnóstwo oznaczeń, w których łatwo się zgubić lub zapomnieć co oznaczała dana literka. Oznaczenia dawno

nie używane warto na bieżąco przypominać (Autorka niekiedy tak robi, ale nie zawsze), a przy tej objętości idealny byłby indeks oznaczeń, choć nie jest to standard (ani wymaganie) w pracach doktorskich. Trochę byłem skonfundowany, gdy Autorka oznaczyła we wstępie okrąg $|z| = 1$ przez \mathbb{T} , a w dalszej części pracy używała oznaczenia S^1 na ten okrąg, a \mathbb{T} zaczęło oznaczać \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Z wyjątkiem początkowego oznaczenia we wstępie, było to jednak konsekwentnie stosowane rozróżnienie.

KONKLUZJA

Podsumowując, uważam, że przedstawiona rozprawa z nadmiarem spełnia ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Jest to oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i w wystarczającym stopniu pokazuje, że Autorka dysponuje zarówno wiedzą teoretyczną, jak i umiejętnością prowadzenia badań naukowych. Zatem przedkładam Radzie Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu wniosek o przyjęcie rozprawy i wnoszę o dopuszczenie pani Marty Górskiej do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dyscyplinie Matematyka. Ze względu na imponującą zawartość pracy i jej poziom trudności wnoszę, by Komisja przeanalizowała również możliwość uznania pracy za wyróżniającą.

Bartosz Frej