

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych

Martyna Górska

Rozprawa doktorska

**Rozłączność automorfizmów
zachowujących miarę, ortogonalność
ciągów i funkcje arytmetyczne**

Promotor:
prof. dr hab. Mariusz Lemańczyk

Toruń 2025

Spis treści

1	Wstęp	5
1.1	Motywacja. Klasy charakterystyczne i problem ortogonalności ciągów. Ortogonalność a rozłączność w sensie Furstenberga	5
1.2	Wyniki teorio-ergodyczne rozprawy	7
1.3	Problem Boshernitzana i jego uogólnienia	10
1.4	Zastosowania teorio-liczbowe i kombinatoryczne	11
2	Wiadomości wstępne	13
2.1	Teoria miary	13
2.2	Teoria spektralna	16
2.3	Teoria ergodyczna	20
2.3.1	Ergodyczność, słabe mieszanie i mieszanie	20
2.3.2	Entropia miarowego układu dynamicznego	24
2.3.3	Faktory	24
2.3.4	Rozkład na składowe ergodyczne	26
2.3.5	Operatory Markowa	28
2.3.6	Połączenia automorfizmów i ich rozłączność	29
2.3.7	Połączenia automorfizmu nieergodycznego z układem ergodycznym	36
2.3.8	Rozkład na składowe relatywnie ergodyczne	39
2.3.9	Słabo ergodyczna część układu dynamicznego	40
2.3.10	Mierzalność relacji rozłączności	41
2.3.11	Automorfizmy z dyskretnym widmem	45
2.3.12	Rozłączność w sensie Furstenberga a rozłączność spektralna	46
2.3.13	Rozszerzenia domknięte	46
2.3.14	Mnożniki klasy automorfizmów \mathcal{A}^\perp	48
2.3.15	Klasy charakterystyczne	50
2.4	Dynamika topologiczna	53
2.4.1	Generowanie i quasi-generowanie miary	56
2.4.2	Układy Furstenberga ciągów ograniczonych	57
2.4.3	Entropia topologiczna	58
2.5	Funkcje moltiplikatywne	58

3	O klasie automorfizmów rozłącznych z automorfizmami ergodycznymi	63
3.1	Przykłady elementów klasy Erg^\perp	63
3.2	Twierdzenie charakteryzacyjne	65
3.2.1	Dowód 2. \Rightarrow 1.	66
3.2.2	Dowód 3. \Rightarrow 2.	66
3.2.3	Twierdzenie Kallmana i połączenia	67
3.2.4	Dowód 1. \Rightarrow 3.	68
3.2.5	Przykłady	69
3.3	Mnożniki klasy Erg^\perp	69
3.4	Produkty kartezjańskie w Erg^\perp	77
3.5	Automorfizm, którego samopołączenia są rozłączne z automorfizmami ergodycznymi. Mnożniki, a klasy charakterystyczne	79
4	Ortogonalność do ergodycznych obrazów Markowa	85
4.1	Obserwacje przygotowawcze i pewne motywacje	85
4.2	Charakteryzacja elementów przestrzeni $F_{\text{we}}(T)^\perp$	88
4.3	Dowód twierdzenia 4.2.1. Dostateczność	90
4.4	Dowód twierdzenia 4.2.1. Konieczność	91
4.5	Ortogonalność i ergodyczne obrazy Markowa	91
4.6	Warunek ortogonalności do ergodycznych obrazów Markowa	92
4.7	Przykłady ciągów ortogonalnych do wszystkich układów monoergodycznych	94
4.8	Problem Boshernitzana a kombinatoryka punktów quasi-generujących	100
4.8.1	Jak rozpoznać, że samopołączenie układu Furstenberga ma miarę produktową jako rzut?	100
4.8.2	Podsumowanie	101
4.8.3	Aproksymacje samopołączeń układów Furstenberga miarami empirycznymi	102
5	Klasy charakterystyczne i ortogonalność do układów monoergodycznych	115
5.0.1	Klasy charakterystyczne i rozłączność	115
5.0.2	Ortogonalność do monoergodycznych układów o zerowej entropii. Ogólny przypadek klasy charakterystycznej	116
5.0.3	Przykłady	119
6	Funkcje arytmetyczne	125
6.1	Pretensjonalna funkcja moltiplikatywna ortogonalna do wszystkich układów monoergodycznych	125
6.1.1	Zastosowanie: uśredniona własność Chowli	126

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Motywacja. Klasy charakterystyczne i problem ortogonalności ciągów. Ortogonalność a rozłączność w sensie Furstenberga

W 2010 roku Sarnak sformułował słynną hipotezę mówiącą o tym, że jeżeli mamy zwartą przestrzeń metryczną i homeomorfizm $T : X \rightarrow X$ taki, że jego entropia topologiczna wynosi zero, to wówczas funkcja Möbiusa μ jest *ortogonalna* do dowolnej ciągłej obserwowalnej w tym układzie, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) \mu(n) = 0 \quad (1.1)$$

dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$ i $x \in X$ (co zapisujemy $\mu \perp (X, T)$). Zamiast funkcji Möbiusa μ możemy równoważnie rozważać funkcję Liouville'a λ (patrz: podrozdział 2.5 oraz artykuł przeglądowy [14]). Zauważmy, że hipoteza Sarnaka mówi o ortogonalności funkcji Möbiusa (lub Liouville'a) do rodziny \mathcal{C}_{ZE} układów topologicznych o zerowej entropii, a więc (na mocy zasady wariacyjnej) układów, w których każda miara niezmiennicza wyznacza miarowy układ o entropii zero. Rozszerzając zagadnienie, w sposób analogiczny rozważać możemy problem ortogonalności $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ innych ciągów ograniczonych $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ takich, że $M(\mathbf{u}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mathbf{u}(n) = 0$ do układów z rodziny $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, gdzie \mathcal{F} jest pewną klasą charakterystyczną (patrz: podrozdział 2.3.15, ZE jest przykładem klasy charakterystycznej) układów miarowych, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) \mathbf{u}(n) = 0 \quad (1.2)$$

dla dowolnego układu $(X, T) \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, dowolnej funkcji $f \in C(X)$ i elementu $x \in X$, przy założeniu, że $(X, \nu, T) \in \mathcal{F}$ dla dowolnej miary T -niezmienniczej $\nu \in \mathcal{M}(X, T)$. Podobnie definiujemy $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}$ dla dowolnej klasy \mathcal{C} układów topologicznych.

Warto wspomnieć, że motywacją do sformułowania hipotezy Sarnaka była hipoteza Chowli z 1965 roku mówiąca o tym, iż wszystkie autokorelacje funkcji Liouville'a zerują się, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \lambda(n+r_1) \cdot \dots \cdot \lambda(n+r_s) = 0$$

dla dowolnego $s \geq 1$ oraz $0 \leq r_1 < \dots < r_s$, lub równoważnie (w języku układów dynamicznych), że funkcja Liouville'a jest punktem generującym dla miary Bernoulliego $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pełnego shiftu $(\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}, S)$. Hipoteza Chowli implikuje hipotezę Sarnaka [43] (na odwrót wiadomo jedynie, że hipoteza Sarnaka implikuje hipotezę Chowli wzdłuż podciągu [24]).

Kontynuując idee i rezultaty Tao [45], średnie Cesàro w (1.2) możemy zamienić na średnie logarytmiczne i wówczas rozważać logarytmiczną ortogonalność, a co za tym idzie, rozpatrywać tzw. logarytmiczną hipotezę Sarnaka oraz logarytmiczną hipotezę Chowli. W rozprawie jednak nie będziemy zajmowali się tymi wersjami. Niemniej warto wspomnieć, że logarytmiczna wersja hipotezy Chowli jest równoważna logarytmicznej hipotezie Sarnaka [45]. Ponadto z głównego rezultatu pracy Frantzikinasa-Hosta [15] wynika, że wiele funkcji moltiplikatywnych \mathbf{u} (w tym również funkcja Liouville'a, czy Möbiusa) jest logarytmicznie ortogonalnych do układów monoergodycznych (klasa UE) o zerowej entropii, tzn. $\mathbf{u} \perp_{\log} \mathcal{C}_{ZE} \cap \text{UE}$.

Wracając do średniowania w sensie Cesàro, w [7], Conze, Downarowicz i Serafin problem charakteryzacji wszystkich ciągów, które są ortogonalne do rodziny wszystkich homeomorfizmów ściśle ergodycznych (tzn. homeomorfizmów monoergodycznych i minimalnych), przypisują Boshernitzanowi. Stosując teorię rozłączności Furstenberga, pokazują oni, że rozwiązanie problemu Boshernitzana musi być nietrywialne.¹ Nieco modyfikując to zagadnienie, w rozprawie *problem Boshernitzana* oznacza dla nas scharakteryzowanie ciągów (ograniczonych) ortogonalnych do klasy UE.²

Rozwiązania problemu Boshernitzana oczekujemy w terminach tzw. układów Furstenberga danego ciągu.³ Przez układ Furstenberga ciągu ograniczonego \mathbf{u} rozumie się dowolny miarowy układ dynamiczny, w którym rozpatrywanym działaniem jest shift dwustronny S działający na przestrzeni otrzymanej przez domknięcie orbity punktu $\mathbf{u} \in \mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$ dla S , zaś miara κ jest quasi-generowana przez \mathbf{u} (patrz: definicja 2.4.16). Zbiór tak otrzymanych miar oznaczamy przez $V(\mathbf{u})$. Dla przykładu, hip-

¹W podejściu w pracy [7] rozpatruje się punkty (quasi)-generujące dla miar niezmienniczych i odpowiadające problemy nieskorelowania. W szczególności Conze, Downarowicz i Serafin rozpatrują problem nieskorelowania miary ν niezmienniczej dla shiftu (a więc mamy stowarzyszony układ (X, \mathcal{B}, ν, S)) ze wszystkimi miarami ergodycznymi. Autorzy zauważają, że jeśli (X, \mathcal{B}, ν, S) jest rozłączny w sensie Furstenberga ze wszystkimi układami ergodycznymi, to zachodzi nieskorelowanie odpowiadających miar, a następnie podają ważny przykład (Example 5.2 [7]), pokazujący, że problem nieskorelowania jest istotnie słabszy od problemu rozłączności.

²Jak zauważa się w Theorem 2.3 [7] tak sformułowany problem Boshernitzana jest równoważny oryginalnemu problemowi Boshernitzana.

³Ponownie, nietrudno spostrzec (patrz np.: [14]), że rozłączność układów Furstenberga ze wszystkim automorfizmami z klasy \mathcal{F} implikuje ortogonalność $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Jest to jednak warunek jedynie wystarczający.

teza Chowli oznacza, że istnieje tylko jeden układ Furstenberga funkcji Liouville'a λ i jest on układem Bernoulliego $(\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}, B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), S)$, tzn. $V(\lambda) = \{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Wspomniana praca Frantzikinakis-Hosta [15] wskazała, że w przypadku układów Furstenberga aperiodycznych funkcji moltiplicatywnych specjalną rolę mogą odgrywać układy dynamiczne generowane przez procesy ściśle stacjonarne.⁴ Z kolei dla tych ostatnich układów zachodzą następujące fakty: jeśli układ taki jest ergodyczny, to jest on izomorficzny z układem Bernoulliego, jeśli zaś ma zerową entropię (i wtedy nie jest ergodyczny), to jest on rozłączny ze wszystkimi układami ergodycznymi. Jest jednak otwartym problemem odpowiedź na pytanie, czy to dokładnie układy dane przez procesy ściśle stacjonarne generują wszystkie układy Furstenberga funkcji Möbiusa, czy Liouville'a. Wiemy jedynie, że ściśła stacjonarność pojawia się, gdy rozważamy logarytmiczne układy Furstenberga funkcji Liouville'a (patrz: [15], [16], [17]). Pojawia się więc tu naturalne i interesujące z punktu widzenia teorii ergodycznej pytanie dotyczące charakteryzacji elementów rodziny Erg^{\perp} wszystkich automorfizmów rozłącznych (w sensie Furstenberga) ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi.⁵ Jest rzeczą raczej zaskakującą, że pytanie to nie było dotychczas rozpatrywane w teorii ergodycznej, a odpowiedź na nie (patrz: twierdzenie A poniżej) jest jednym z głównych wyników rozprawy.⁶ Pewnym wyjaśnieniem tej sytuacji jest to, że w teorii rozłączności Furstenberga zazwyczaj badano przypadek, w którym oba automorfizmy są ergodyczne i wówczas problem sprowadzał się do sprawdzania jedynie połączeń ergodycznych (w przypadku dwóch automorfizmów nieergodycznych mamy brak rozłączności, patrz: stwierdzenie 2.3.53). Zauważmy, że również sam problem Boshernitzana motywuje do wcześniejszego podania opisu klasy Erg^{\perp} .

Przechodzimy teraz do przedstawienia głównych rezultatów rozprawy.⁷

1.2 Wyniki teorio-ergodyczne rozprawy

Niech T będzie automorfizmem standardowej przestrzeni probabilistycznej (X, \mathcal{B}_X, μ) . Jak wspomnieliśmy w poprzednim podrozdziale, interesuje nas opisanie warunków, które spełniać musi automorfizm T , aby był on rozłączny ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi (co oznaczamy $T \in \text{Erg}^{\perp}$ lub $T \perp \text{Erg}$).⁸ Zatem rozważamy przypadek, gdy automorfizm T jest nieergodyczny, tzn. posiada nietrywialny rozkład na składowe ergodyczne. Przyjmując $\bar{X} = X/\mathcal{I}_T$, gdzie \mathcal{I}_T oznacza σ -algebrę

⁴Proces stacjonarny $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nazywamy ściśle stacjonarnym, gdy rozkład wektora $(E_{n_1}, \dots, E_{n_k})$ jest równy rozkładowi wektora $(E_{rn_1}, \dots, E_{rn_k})$ dla dowolnych $n_1 < \dots < n_k$, $k \geq 1$ i $r \geq 1$.

⁵Oczywiście od czasu fundamentalnej pracy Furstenberga [19] z 1967 roku wiadomo było, że $\text{Id} \in \text{Erg}^{\perp}$.

⁶Po uzyskaniu informacji o wyniku w pracy [26], E. Glasner i B. Weiss w artykule „On the class of systems which are disjoint from every ergodic system”, arXiv:2405.00463, podali inny dowód twierdzenia A rozprawy, a także rozpatrzyli przypadek działania grup przeliczalnych.

⁷Zaprezentowane wyniki pochodzą z prac [6] i [26].

⁸Jeśli T' jest innym automorfizmem, rozłącznym z T , to piszemy $T \perp T'$.

zbiorów T -niezmienniczych, rozkład ten możemy zapisać jako

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}), \quad (1.3)$$

gdzie $\bar{x} = [x]_{\sim \mathcal{I}_T}$, miary $\mu_{\bar{x}}$ są T -niezmiennicze oraz $\bar{\mu} = \mu|_{\mathcal{I}_T}$ (patrz: podrozdział 2.3.4).

Kluczowym wynikiem pracy jest charakteryzacja elementów klasy Erg^\perp (patrz: twierdzenie 3.2.1), zawarta w poniższym twierdzeniu:

Twierdzenie A. *Następujące warunki są równoważne:*

1. $T \in \text{Erg}^\perp$.
2. Rozszerzenie $T \rightarrow \text{Id}_{\bar{X}}$ jest domknięte⁹.
3. Dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -prawie wszystkich $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$, mamy $(T, \mu_{\bar{x}}) \perp (T, \mu_{\bar{x}'})$.

Dla zadanej klasy charakterystycznej \mathcal{F} miarowych układów dynamicznych (tzn. klasy zamkniętej na branie połączeń i faktorów) niech $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X, \mu, T)$ oznacza największy \mathcal{F} -faktor układu (X, μ, T) (patrz: podrozdział 2.3.15). (W przypadku klasy ZE układów o zerowej entropii wspomnianym faktorem $\mathcal{A}_{\text{ZE}}(X, \mu, T)$ jest faktor Pinskera $\Pi(T)$.) Kolejny rezultat (patrz: wniosek 5.0.2, uwaga 5.0.4 i uwaga 5.0.6) jest uogólnieniem twierdzenia A na klasy charakterystyczne.

Twierdzenie B. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ i niech \mathcal{F} będzie klasą charakterystyczną. Niech $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ będzie największym \mathcal{F} -faktorem automorfizmu T . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $T \perp \mathcal{F} \cap \text{Erg}$,
- (ii) rozszerzenie $T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \rightarrow \text{Id}_{\bar{X}}$ jest domknięte.

Jeżeli $\mathcal{F} = \text{ZE}$, to warunki (i) oraz (ii) są równoważne stwierdzeniu: dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $\Pi((T, \mu_{\bar{x}})) \perp \Pi((T, \mu_{\bar{x}'})$.

Kolejnym otwartym problemem dotyczącym klasy Erg^\perp była kwestia opisu klasy $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$ jej mnożników,¹⁰ czyli automorfizmów, których dowolne połączenie z układem z Erg^\perp nadal jest elementem klasy Erg^\perp . Klasycznym faktem jest, że klasa ID

⁹Domkniętość rozszerzenia oznacza, że jedynym samopołączeniem rzędu 2 automorfizmu rzutującym się na miarę produktową faktora jest miara produktowa.

¹⁰Problem mnożników jest jednym z klasycznych problemów teorii ergodycznej, np. częściowo rozwiązano problem mnożników klasy WM^\perp (WM oznacza klasę układów słabo mieszających): [3], [9], [22], [23], [38].

wszystkich identyczności jest podzbiorem klasy $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$. Udało nam się pokazać, że prawdziwa jest również relacja w drugą stronę (patrz: twierdzenie 3.3.2), tzn. zachodzi następujące:

Twierdzenie C. $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp) = \text{ID}$.

Okazuje się jednak, że jeżeli układy z klasy Erg^\perp łączymy w sposób trywialny (patrz: twierdzenie 3.4.1), czyli biorąc ich produkt kartezjański, to otrzymujemy kolejny element tej klasy, a zatem zachodzi:

Twierdzenie D. *Załóżmy, że $(X, \mathcal{B}, \mu, T), (Y, \mathcal{C}, \nu, S) \in \text{Erg}^\perp$. Wówczas*

$$(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu, T \times S) \in \text{Erg}^\perp.$$

W świetle powyższego twierdzenia, w szczególności mamy $(T \times T, \mu \otimes \mu) \in \text{Erg}^\perp$. Z drugiej jednak strony, klasyczny przykład 3.3.1 pokazuje, że nietrywialne samopowiązania układów z klasy Erg^\perp mogą nas z niej wyprowadzać. Pozostaje zatem pytanie o istnienie warunków, które spełniać musi automorfizm z Erg^\perp , aby jego dowolne (nieskończone) samopowiązanie było elementem tej klasy. Kluczowymi w tej kwestii okazują się być dwie własności: MSJ i PID (patrz odpowiednio: definicja 2.3.56 i definicja 2.3.58) oraz „odpowiednio” dużo rozłączności między składowymi ergodycznymi. W rezultacie otrzymaliśmy następujące (patrz: twierdzenie 3.5.3):

Twierdzenie E. *Niech $T : X \rightarrow X$ będzie homeomorfizmem zwartej przestrzeni metrycznej X , zachowującym miarę μ . Niech*

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne dla (T, μ) i niech $T_{\bar{x}}$ oznacza ergodyczne działanie automorfizmu T na włóknie odpowiadającym punktowi $\bar{x} \in \bar{X}$, tzn. $T_{\bar{x}}$ odpowiada $(T, \mu_{\bar{x}})$. Załóżmy, że $\bar{\mu}$ jest ciągłą miarą probabilistyczną oraz, że spełnione są następujące warunki:

- *dla dowolnego punktu $\bar{x} \in \bar{X}$ istnieje zbiór $\bar{X}' \subset \bar{X}$, którego dopełnienie jest przeliczalne oraz dla dowolnego $\bar{y} \in \bar{X}'$ mamy $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{y}}$;*
- *dla dowolnych $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}$ jeśli $T_{\bar{x}} \not\perp T_{\bar{y}}$, to automorfizmy $T_{\bar{x}}$ i $T_{\bar{y}}$ są izomorficzne;*
- *dla każdego $\bar{x} \in \bar{X}$ automorfizm $T_{\bar{x}}$ ma własność MSJ (w szczególności ma własność PID).*

Wtedy $(T^{\times\infty}, \eta) \in \text{Erg}^\perp$ dla każdego $\eta \in J_\infty(T, \mu)$.

Ponadto ze stwierdzenia 3.5.4 i lematu 3.5.5 wynika, że istnieje automorfizm zbudowany z pewnej rodziny automorfizmów rangi 1, który spełnia założenia twierdzenia E. Zatem istnieją nietrywialne automorfizmy spełniające tezę twierdzenia E.

Ponieważ $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp) = \text{ID}$, więc powstaje pytanie o istnienie nietrywialnych klas charakterystycznych zawartych w Erg^\perp .¹¹ Konsekwencją twierdzenia E jest następujący (patrz: wniosek 3.5.6):

Wniosek F. *Jeśli T spełnia założenia twierdzenia 3.5.3, to najmniejsza klasa charakterystyczna $\mathcal{F}(T)$, do której należy T , jest klasą charakterystyczną zawartą w Erg^\perp .*

1.3 Problem Boshernitzana i jego uogólnienia

Niech $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$. Przez $F_{\text{we}}(T)$ oznaczamy słabo ergodyczną część przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ dla automorfizmu T (patrz: definicja 2.3.9) i niech

$$F_{\text{we},0}(T) := F_{\text{we}}(T) \cap L_0^2(X, \mathcal{B}_X, \mu).$$

Ponadto przez $J_2^{\text{RelErg}}(T)$ oznaczamy zbiór wszystkich 2-samopoleceń λ automorfizmu T takich, że $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ oraz $\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J^e(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'})$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$.

W celu rozwiązania problemu Boshernitzana potrzebujemy następujących rezultatów (patrz: twierdzenie 4.2.1 i wniosek 4.6.2):

Twierdzenie G. *Załóżmy, że $f \in L_0^2(X, \mu)$ spełnia $\mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{I}_T] = 0$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \perp F_{\text{we}}(T)$.

(ii) *Dla wszystkich miar $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$ mamy $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = 0$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$.*

(iii) *Dla wszystkich samopoleceń $\lambda \in J_2(T)$ spełniających $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$, mamy $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \mathcal{I}_{T \times T}] = 0$.*

Stwierdzenie H. *Niech $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$. Wtedy $\mathbf{u} \perp \text{UE}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$ mamy $\pi_0 \perp F_{\text{we},0}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$, przy czym funkcja π_0 jest obcięciem rzutowania $\mathbb{D}^{\mathbb{Z}} \ni (y_n) \rightarrow y_0 \in \mathbb{D}$ do podshiftu $X_{\mathbf{u}}$ (patrz: stwierdzenie 4.5.1).*

W twierdzeniu L (poniżej) w sposób kombinatoryczny opisane zostały wszystkie 2-samopoleczenia układów Furstenberga funkcji \mathbf{u} . Zatem stwierdzenie H i twierdzenie G razem z twierdzeniem von Neumanna dają pełne rozwiązanie problemu Boshernitzana w terminach układów Furstenberga funkcji \mathbf{u} (patrz: uwaga 4.6.3

¹¹Zauważmy, że dla dowolnej rodziny \mathcal{R} automorfizmów, klasa $\mathcal{M}(\mathcal{R}^\perp)$ jest naturalną klasą charakterystyczną zawartą w \mathcal{R}^\perp (patrz: przykład 2.3.97 (7)).

oraz podrozdział 4.8.2).¹²

Mamy ponadto wersję stwierdzenia H dla klas charakterystycznych (patrz: wniosek 5.0.8):

Wniosek I. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\mathbf{u} \perp \mathcal{F} \cap \text{UE}$ (tzn. $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \text{UE}$).

(b) Dla dowolnego układu Furstenberga κ funkcji \mathbf{u} zachodzi następująca zależność: dla dowolnego samopółłączenia $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ (w szczególności $\lambda|_{\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S} = \kappa|_{\mathcal{I}_S} \otimes \kappa|_{\mathcal{I}_S}$), mamy

$$\mathbb{E}_{\lambda} \left[\mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] \otimes \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] | \mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S \right] = \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{I}_S] \otimes \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{I}_S].$$

(c) Dla dowolnego układu Furstenberga κ funkcji \mathbf{u} zachodzi następująca zależność: dla dowolnego samopółłączenia $\lambda \in J_2(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$, gdzie $\lambda|_{\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S} = \kappa|_{\mathcal{I}_S} \otimes \kappa|_{\mathcal{I}_S}$, mamy

$$\mathbb{E}_{\lambda} \left[\mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] \otimes \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}] | \mathcal{I}_{S \times S} \right] = \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{I}_S] \otimes \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{I}_S].$$

1.4 Zastosowania teorio-liczbowe i kombinatoryczne

Niech $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$. Wówczas dla funkcji \mathbf{u} jej pierwszą normę Gowersa-Hosta-Kry (u^1 - normę) określamy, przy zadanym jej układzie Furstenberga $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$, w następujący sposób:¹³

$$\|\mathbf{u}\|_{u^1}^2 := \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \int \pi_0 \circ S^h \cdot \overline{\pi_0} d\kappa.$$

Przez DISP oznaczamy klasę (charakterystyczną) automorfizmów o dyskretnym widmie. Naszym głównym zastosowaniem otrzymanych wyników jest poniższy rezultat (patrz: wniosek 6.1.5) dotyczący uśrednionej hipotezy Chowli:¹⁴

¹²Zauważmy, że w pracy [7] rozpatruje się nieskorelowania ciągów z klasą ERG ciągów generujących dla miar ergodycznych w układach topologicznych. W [7] wyjaśnia się, że nieskorelowanie ciągu z klasą UE (monoergodycznych układów dynamicznych) i tak rozumianą klasą ERG są własnościami równoważnymi.

¹³Więcej informacji o pierwszej normie GHK znajduje się w podrozdziale 4.1.

¹⁴Mówimy, że funkcja \mathbf{u} spełnia uśrednioną hipotezę Chowli, gdy

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H^k} \sum_{h_1, \dots, h_k \leq H} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{M_s} \left| \sum_{n \leq M_s} \mathbf{u}(n) \mathbf{u}(n+h_1) \dots \mathbf{u}(n+h_k) \right| = 0$$

Wniosek J. Załóżmy, że $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$ (tzn. dla wszystkich κ otrzymujemy zero). Następujące warunki są równoważne:

(a) Funkcja \mathbf{u} spełnia uśrednioną własność Chowli.

(b) $\mathbf{u} \perp \text{DISP} \cap \text{UE}$ (tzn. $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}_{\text{DISP}} \cap \text{UE}$).

(c) Funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich układów topologicznych, których wszystkie miary niezmiennicze dają miarowe układy dynamiczne o dyskretnym widmie (tzn. $\mathbf{u} \perp \mathcal{C}_{\text{DISP}}$).

Kolejny rezultat dotyczy opisu funkcji pretensjonalnych (patrz: definicja 2.5.7), które są ortogonalne do klasy UE (patrz: wniosek 6.1.1).

Wniosek K. Jedynymi pretensjonalnymi funkcjami moltiplikatywnymi $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ ortogonalnymi do wszystkich układów monoergodycznych są charaktery Archimedes a $n \mapsto n^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.

Jako ostatni, podajemy wynik dotyczący związku pomiędzy samopółaczeniami a kombinatoryką punktów quasi-generujących (patrz: twierdzenie 4.8.5).

Twierdzenie L. Niech \mathbf{u} będzie punktem quasi-generującym wzdłuż ciągu (N_k) dla pewnego układu Furstenberga κ , a miara λ niech będzie 2-samopółaczeniem miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Wówczas istnieje lokalnie orbitalny ciąg (ϕ_k) , gdzie każda funkcja ϕ_k jest pewną permutacją zbioru $\{1, \dots, N_k\}$,¹⁵ taki, że

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \delta_{(S^n \mathbf{u}, S^{\phi_k(n)} \mathbf{u})}.$$

dla dowolnego $k \geq 1$, $1 \leq h_1 < \dots < h_k$ (dla dowolnego ciągu (M_s) definiującego układ Furstenberga funkcji \mathbf{u}). Została ona udowodniona dla funkcji Liouville'a (i wielu innych funkcji moltiplikatywnych) przez Matomäki, Radziwiłła i Tao [40].

¹⁵A dokładniej wymagamy, aby

$$\frac{1}{N_k} \left| \left\{ n \in \{1, \dots, N_k - 1\}; \phi_k(n+1) = \phi_k(n) + 1 \right\} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1.$$

Rozdział 2

Wiadomości wstępne

2.1 Teoria miary

Przypomnimy teraz podstawowe pojęcia z teorii miary.

Definicja 2.1.1. Niech (X, \mathcal{B}) będzie przestrzenią mierzalną. Rozważmy dodatnie i skończone miary μ, ν określone na tej przestrzeni.

- Mówimy, że miara μ jest *skupiona na zbiorze* $A \in \mathcal{B}$, gdy $\mu(X \setminus A) = 0$.
- Mówimy, że miary μ i ν są wzajemnie *singularne* (osobliwe), gdy istnieją zbiory $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ takie, że miara μ jest skupiona na A_1 , zaś miara ν jest skupiona na A_2 . Wzajemną singularność oznaczamy przez $\mu \perp \nu$.
- Mówimy, że miara μ jest *absolutnie ciągła* względem miary ν , piszemy wtedy $\mu \ll \nu$, gdy dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$ mamy $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. Miary μ i ν nazywamy *równoważnymi*, gdy $\mu \ll \nu$ i $\nu \ll \mu$. Piszemy wówczas $\mu \equiv \nu$.
- Przez $\mathcal{M}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich miar probabilistycznych na (X, \mathcal{B}) .

Niech (X, \mathcal{B}, μ) oraz (Y, \mathcal{C}, ν) będą przestrzeniami z miarą. Pisząc

$$\pi : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu) \tag{2.1}$$

będziemy rozumieli, że odwzorowanie $\pi : X \rightarrow Y$ jest mierzalne oraz obraz $\pi_*\mu$ miary μ przez π jest równy ν , tj. $(\pi_*\mu)(C) := \mu(\pi^{-1}(C)) = \nu(C)$ dla dowolnego zbioru $C \in \mathcal{C}$. Wszystkie odwzorowania mierzalne spełniające drugi warunek nazywamy *odwzorowaniami zachowującymi miary*. Jeśli dodatkowo odwzorowanie odwrotne π^{-1} jest p.w. określone oraz $\pi^{-1} : (Y, \mathcal{C}, \nu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$, to odwzorowanie π nazywamy *izomorfizmem (miarowym) przestrzeni* (X, \mathcal{B}, μ) i (Y, \mathcal{C}, ν) .

Definicja 2.1.2. Trójkę (X, \mathcal{B}, μ) nazywamy *probabilistyczną, standardową przestrzenią borelowską*, o ile jest ona izomorficzna z przestrzenią (Y, \mathcal{C}, ν) taką, że Y

jest przestrzenią polską, czyli ośrodkową przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, zaś \mathcal{C} jest σ -algebrą zbiorów borelowskich na Y , a $\nu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ jest miarą probabilistyczną.

Uwaga 2.1.3. Wszystkie równości między zbiorami, σ -algebrami i odwzorowaniami rozumiemy jako zachodzące prawie wszędzie (p.w.) względem rozważanej miary.

Uwaga 2.1.4. W przypadku gdy X jest przestrzenią polską, to będziemy również pisali $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ lub $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$.

Dla probabilistycznej, standardowej przestrzeni borelowskiej (X, \mathcal{B}_X, μ) , jeżeli rozważymy część ciągłą μ_1 miary μ , to przestrzeń $(X, \mathcal{B}_X, \mu_1)$ jest izomorficzna (patrz: (2.1) powyżej) z $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \text{Leb})$, o ile $\mu_1 \neq 0$, zaś część dyskretna składa się z co najwyżej przeliczalnej ilości atomów.

Rozbiciem (mierzalnym) przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) nazywamy co najwyżej przeliczalną rodzinę $P = \{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ zbiorów mierzalnych taką, że spełnione są warunki:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

Niech P i Q będą rozbiciami przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) . Mówimy, że rozbiecie P *rozdrabnia* rozbiecie Q , co zapisujemy $P \geq Q$, gdy dla dowolnego zbioru $p \in P$ istnieje $q \in Q$ takie, że $p \subset q$ ([12]).

Połączeniem rozbić P i Q nazywamy rozbiecie

$$P \vee Q := \{p \cap q; p \in P, q \in Q\}.$$

Mówimy, że ciąg rozbić $(Q_k)_{k \geq 1}$ *generuje* σ -algebrę \mathcal{B} , gdy σ -algebra \mathcal{B} jest najmniejszą σ -algebrą zawierającą wszystkie elementy rozbić Q_k dla dowolnego $k \geq 1$ ([12]).

Uwaga 2.1.5. ([12]) Każda probabilistyczna, standardowa przestrzeń borelowska (X, \mathcal{B}, μ) posiada generujący ciąg skończonych rozbić (Q_k) taki, że

$$\mathcal{B} = \bigvee_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Twierdzenie 2.1.6. *Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech \mathcal{C} będzie pod- σ -algebrą σ -algebry \mathcal{B} . Wówczas istnieje odwzorowanie $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C}) : L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ takie, że dla $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ funkcja $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ (określona μ -prawie wszędzie) jest wyznaczona jednoznacznie przez następujące własności:*

1. funkcja $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ jest \mathcal{C} -mierzalna;
2. dla dowolnego $C \in \mathcal{C}$ mamy

$$\int_C \mathbb{E}(f|\mathcal{C}) d\mu = \int_C f d\mu.$$

Odwzorowanie $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C})$ nazywamy *średnią warunkową* (względem \mathcal{C}).

Uwaga 2.1.7. Średnia warunkowa jest dobrze określona na $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ dla dowolnego $p \geq 1$, tzn. jeśli $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, to $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) \in L^p(X, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$, gdzie $\mu|_{\mathcal{C}}(C) = \mu(C)$ dla $C \in \mathcal{C}$. Ponadto nietrudno spostrzec, że dla $p = 2$ średnia warunkowa $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C}) : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$ jest projekcją ortogonalną na podprzestrzeń $L^2(X, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$.

Twierdzenie 2.1.8 (Dezintegracja miary, [37], [19]). *Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie standardową, probabilistyczną przestrzenią borelowską oraz niech (Y, \mathcal{C}, ν) będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną. Rozważmy odwzorowanie $\pi : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$. Wówczas istnieje odwzorowanie*

$$Y \ni y \mapsto \mu_y \in \mathcal{M}(X), \quad (2.2)$$

które spełnia następujące warunki:

(1) miary warunkowe μ_y skupione są na włóknach $\pi^{-1}(\{y\})$,

(2) dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ odwzorowanie

$$Y \ni y \mapsto \int_X f d\mu_y \quad (2.3)$$

jest mierzalne, dla ν -p.w. $y \in Y$ mamy $f \in L^1(X, \mu_y)$ oraz

$$\mathbb{E}(f|Y)(y) = \int_X f d\mu_y$$

(przez $\mathbb{E}(f|Y)$) rozumiemy $\mathbb{E}(f|\pi^{-1}(\mathcal{C})) \circ \pi^{-1}$),

(3) dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ zachodzi

$$\int_X f d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu_y \right) d\nu(y).$$

Odwzorowanie (2.2) nazywamy *dezintegracją miary μ nad miarą ν* (względem π) i wówczas piszemy

$$\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y).$$

Sformułujemy teraz twierdzenia o mierzalnych selektorach, które pełnić będą istotną rolę w dowodzie kluczowych rezultatów rozprawy, tj. twierdzenia 3.2.1 oraz twierdzenia 3.3.2.

Twierdzenie 2.1.9 (Kallman, [32]). *Niech (X, \mathcal{B}_X) będzie standardową przestrzenią borelowską, zaś Y niech będzie przestrzenią polską. Załóżmy, że zbiór $A \subset X \times Y$ jest borelowski oraz, że dla każdego $x \in X$ zbiór $A_x := \{y \in Y; (x, y) \in A\}$ jest σ -zwarty, tzn. jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych. Niech $\pi : X \times Y \rightarrow X$ będzie rzutem na pierwszą współrzędną. Wówczas zbiór $\pi(A)$ jest borelowski oraz istnieje selektor borelowski odwzorowania $\pi|_A : A \rightarrow \pi(A)$.*

Uwaga 2.1.10. Istnienie selektora borelowskiego odwzorowania $\pi|_A : A \rightarrow \pi(A)$ oznacza, że w sposób mierzalny przyporządkować możemy elementom $x \in \pi(A)$ reprezentanta z odpowiadającego im włókna A_x .

Twierdzenie 2.1.11 ([44]). *Niech X, Y będą przestrzeniami polskimi oraz niech $A \subset X$ będzie zbiorem borelowskim. Niech $f : A \rightarrow Y$. Wówczas f jest odwzorowaniem borelowskim wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór*

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in A\}$$

jest borelowskim podzbiorem zbioru $A \times Y$.

Twierdzenie 2.1.12 (Kuratowski-Ryll-Nardzewski, [36]). *Niech (X, \mathcal{B}) będzie przestrzenią polską z σ -algebrą zbiorów borelowskich oraz niech (Ω, \mathcal{C}) będzie przestrzenią mierzalną. Niech $f : \Omega \rightarrow 2^X$ będzie funkcją wielowartościową na Ω o wartościach w domkniętych podzbiórach zbioru X . Załóżmy ponadto, że f jest słabo mierzalna, tzn. dla każdego otwartego podzbioru $A \subset X$ zbiór postaci*

$$\{\omega \in \Omega; f(\omega) \cap A \neq \emptyset\}$$

jest mierzalny. Wówczas istnieje mierzalny selektor $F : \Omega \rightarrow X$ funkcji f , tzn. $F(\omega) \in f(\omega)$ dla dowolnego elementu $\omega \in \Omega$.

Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną. Przez $\tilde{\mathcal{M}}(X)$ oznaczmy zbiór (borelowskich) miar dodatnich i skończonych na X . Zauważmy, że $\mathcal{M}(X) \subset \tilde{\mathcal{M}}(X)$. Niech $C(X)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych na X . Na $\mathcal{M}(X)$ rozważamy *-słabą topologię, tzn. najszlubszą topologię, dla której odwzorowania

$$\mathcal{M}(X) \ni \mu \mapsto \int_X f d\mu$$

są ciągłe dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$. Przestrzeń $\mathcal{M}(X)$ z tą topologią jest zwarta i metryzowalna. Zauważmy, że w twierdzeniu 2.1.8, gdy X jest przestrzenią zwartą, to mierzalność odwzorowania (2.3) jest równoważna mierzalności odwzorowania (2.2) działającego z (Y, \mathcal{C}) do $(\mathcal{M}(X), \mathcal{B}_{\mathcal{M}(X)})$.

2.2 Teoria spektralna

Wiadomości z tego podrozdziału pochodzą głównie z [37].

Niech $\sigma \in \tilde{\mathcal{M}}(\mathbb{T})$, gdzie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Przypomnijmy, że skończona miara dodatnia może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele atomów.

Dla $n \in \mathbb{Z}$, n -tym współczynnikiem Fouriera miary σ nazywamy liczbę

$$\hat{\sigma}[n] := \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\sigma(z).$$

Zachodzi następujący fakt:

Lemat 2.2.1 (Wiener). Niech $\sigma \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathbb{T})$. Przez $\{z_1, z_2, \dots, z_m, \dots\}$ oznaczmy zbiór wszystkich atomów miary σ . Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(\{z_m\})^2.$$

Ponadto ponieważ dla $z \neq 1$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0,$$

więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\sigma}[k] = \sigma(\{1\}). \quad (2.4)$$

Rozważając dodatnią miarę borelowską σ na \mathbb{T} , bezpośrednio z lematu Wienera otrzymujemy, że

$$\sigma \text{ jest miarą ciągłą} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = 0. \quad (2.5)$$

Niech H_i , $i = 1, 2$, będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznaczmy iloczyn skalarny na H_i , $i = 1, 2$ (w zależności od kontekstu, na H_1 lub H_2). Rozważmy przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych działających z H_1 do H_2 , tzn.

$$L(H_1, H_2) := \{A : H_1 \rightarrow H_2; A \text{ jest operatorem liniowym i ciągłym}\}$$

oraz kulę jednostkową w $L(H_1, H_2)$, tzn.

$$K := \{A \in L(H_1, H_2); \|A\| \leq 1\}. \quad (2.6)$$

Jeżeli $H_1 = H_2 = H$, to zamiast $L(H, H)$ piszemy $L(H)$. Na przestrzeni $L(H_1, H_2)$ rozpatrywać możemy następujące topologie:

- mocną topologię operatorową - jest to najslabsza topologia, dla której odwzorowania

$$L(H_1, H_2) \ni A \mapsto Ax \in H_2, x \in H_1,$$

są ciągłe,

- słabą topologię operatorową - najslabszą topologię, w której odwzorowania

$$L(H_1, H_2) \ni A \mapsto \langle Ax, y \rangle \in \mathbb{C}, x \in H_1, y \in H_2,$$

są ciągłe.

Gdy powyższe topologie ograniczymy do K , to wówczas są one metryzowalne. Przejdźmy zatem do wskazania odpowiadających im metryk.

Niech $\{x_n \in H_1; \|x_n\| = 1, n \geq 1\}$ będzie podzbiorem liniowo gęstym w H_1 . Dla $A, B \in K$ kładziemy

$$d(A, B) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|Ax_n - Bx_n\|}{2^n}$$

oraz

$$\rho(A, B) := \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{|\langle Ax_n, x_m \rangle - \langle Bx_n, x_m \rangle|}{2^{n+m}}.$$

Tak określone metryki d i ρ zadają odpowiednio mocną i słabą topologię. Zauważmy, że topologie wyznaczone przez te metryki nie zależą od wyboru podzbioru liniowo gęstego. Zatem dla mocnej topologii operatorowej mamy

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A \iff \forall x \in H_1 \quad A_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Ax.$$

Natomiast dla słabej topologii operatorowej zachodzi

$$A_n \rightarrow A \iff \forall x \in H_1, y \in H_2 \quad \langle A_n x, y \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle Ax, y \rangle.$$

Przestrzeń K rozważana ze słabą topologią operatorową jest przestrzenią zwartą.

Operator liniowy i ciągły $U : H \rightarrow H$ nazywamy *unitarnym*, gdy

$$U \circ U^* = U^* \circ U = \text{Id},$$

tzn., $U^* = U^{-1}$ lub, równoważnie, U jest odwracalną izometrią.

Gdy przez $U(H) \subset K \subset L(H)$ oznaczymy przestrzeń operatorów unitarnych oraz rozpatrzmy metrykę d' taką, że dla $U, V \in U(H)$ mamy

$$d'(U, V) := d(U, V) + d(U^{-1}, V^{-1}),$$

to okazuje się, że słaba i mocna topologia operatorowa na $U(H)$ są równoważne. Ponadto przestrzeń $U(H)$ wyposażona w te topologie jest przestrzenią polską.

W mocnej topologii operatorowej składanie operatorów jest operacją ciągłą, w szczególności $U(H)$ jest grupą topologiczną. Natomiast składanie operatorów w K jest operacją półciągłą w słabej topologii, tzn. jeżeli $K \ni A_n \rightarrow A \in K$, to

$$BA_n \rightarrow BA \text{ oraz } A_n B \rightarrow AB$$

dla dowolnego operatora $B \in K$.

Dla operatorów $U \in U(H)$ zachodzi twierdzenie o zbieżności średnich ergodycznych sformułowane przez von Neumanna:

Twierdzenie 2.2.2 (von Neumann). *Dla dowolnego elementu $x \in H$ mamy*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x = \text{proj}_{\text{Fix}(U)}(x),$$

gdzie $\text{proj}_{\text{Fix}(U)} : H \rightarrow \text{Fix}(U)$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni H na domkniętą podprzestrzeń $\text{Fix}(U) := \{x \in H; Ux = x\}$ składającą się z punktów stałych operatora U .

Definicja 2.2.3. Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością własną operatora unitarnego $U \in U(H)$* , jeżeli istnieje wektor $x \in H$ taki, że $x \neq 0$ oraz $Ux = \lambda x$. Taki element x nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ* .

Uwaga 2.2.4. Zauważmy, że skoro $U \in U(H)$ jest izometrią, to $|\lambda| = 1$.

Niech $x \in H$ i połóżmy

$$\mathbb{Z}(x) := \overline{\text{span}\{U^n x; n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Jest to najmniejsza domknięta podprzestrzeń U -niezmiennicza ($U(\mathbb{Z}(x)) = \mathbb{Z}(x)$) zawierająca element x . Przestrzeń $\mathbb{Z}(x)$ nazywamy *przestrzenią cykliczną generowaną przez x* .

Rozpatrzmy element $x \in H$. Z twierdzenia Herglotza wynika, że istnieje dokładnie jedna miara $\sigma_x \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, która wyznaczona jest przez równości

$$\hat{\sigma}_x[-n] = \langle U^n x, x \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Miarę tę nazywamy *miarą spektralną elementu x* .

Zauważmy, że

$$\sigma_x(\mathbb{T}) = \hat{\sigma}_x[0] = \|x\|^2.$$

Miary spektralne posiadają szereg własności. Przejdźmy do przedstawienia części z nich.

Lemat 2.2.5. *Jeżeli $\sigma_x \perp \sigma_y$, to $\mathbb{Z}(x) \perp \mathbb{Z}(y)$ i w szczególności $x \perp y$.*

Stwierdzenie 2.2.6. *Element $x \in H$ jest wektorem własnym operatora U odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_x = \|x\|^2 \delta_\lambda$.*

Przejdziemy teraz do klasyfikacji operatorów unitarnych.

Lemat 2.2.7. *Niech $U \in U(H)$. Wówczas istnieje rozkład*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(x_n) \quad \text{oraz} \quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \dots$$

Powyższy rozkład przestrzeni H nazywamy *rozkładem spektralnym*, zaś otrzymany ciąg miar nazywamy *ciągami spektralnymi* operatora U . Typ miary σ_{x_1} , czyli klasę wszystkich miar jej równoważnych, nazywamy *maksymalnym typem spektralnym* operatora U i oznaczamy przez σ_U .

Poniższe twierdzenie jest kluczowe w teorii spektralnej operatorów unitarnych na ośrodkowych przestrzeniach Hilberta i uzasadnia jedyność rozkładu spektralnego z dokładnością do równoważności miar spektralnych i, w szczególności, niezależność σ_U od rozkładu spektralnego.

Twierdzenie 2.2.8 (twierdzenie spektralne). *Niech $U \in U(H)$. Rozważmy dwa rozkłady spektralne:*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(x_n) \text{ oraz } \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \dots,$$

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(y_n) \text{ oraz } \sigma_{y_1} \gg \sigma_{y_2} \gg \dots$$

Wówczas $\sigma_{x_n} \equiv \sigma_{y_n}$ dla $n \geq 1$.

Mówimy, że:

- $U \in U(H)$ ma *proste widmo*, jeśli jego ciąg spektralny jest postaci

$$\sigma_{x_1} \gg 0 \equiv 0 \equiv \dots$$

lub równoważnie $H = \mathbb{Z}(x_1)$;

- $U \in U(H)$ ma *jednorodne widmo krotności n* , jeśli ciąg spektralny tego operatora ma postać

$$\sigma_{x_1} \equiv \dots \equiv \sigma_{x_n} \gg 0 \equiv \dots;$$

- $U \in U(H)$ ma *widmo Lebesgue'a* (*widmo absolutnie ciągłe/ widmo singularne, widmo dyskretne*), gdy σ_{x_1} jest miarą równoważną mierze Lebesgue'a (mierze absolutnie ciągłej/singularnej względem miary Lebesgue'a, mierze dyskretnej).

2.3 Teoria ergodyczna

2.3.1 Ergodyczność, słabe mieszanie i mieszanie

Podstawowe informacje na temat teorii ergodycznej w tym podrozdziale zostały zaczerpnięte z [21], [37] i [46].

Rozważać będziemy probabilistyczne przestrzenie standardowe. Niech zatem (X, \mathcal{B}, μ) będzie taką przestrzenią. Przypomnijmy, że ze względu na miarę μ , wszystkie równości między zbiorami, σ -algebrami i odwzorowaniami rozumiemy jako zachodzące μ -prawie wszędzie (p.w.).

Definicja 2.3.1. Odwzorowanie $T : X \rightarrow X$ nazywamy *endomorfizmem* przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) , jeżeli jest ono \mathcal{B} -mieralne oraz zachowuje miarę μ , tzn. $T_*\mu = \mu$ (patrz: (2.1)). Jeżeli dodatkowo $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ jest izomorfizmem, to mówimy, że T jest *automorfizmem* przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) . Przez $\text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oznaczamy przestrzeń automorfizmów przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) . Czwórkę (X, \mathcal{B}, μ, T) nazywamy *miarowym układem dynamicznym*. Będziemy również pisali (T, μ) lub nawet T , gdy kontekst jest jasny.

Z automorfizmem T stowarzyszyć możemy operator unitarny $U_T : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, który działa w następujący sposób:

$$U_T f = f \circ T \text{ dla dowolnej funkcji } f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu).$$

Operator ten nazywamy *operatorem Koopmana* stowarzyszonym z T .

Przestrzeń operatorów unitarnych $U(L^2(X, \mathcal{B}, \mu))$ jest ośrodkową i zupełną grupą topologiczną (tzn. grupą polską), zaś operatory Koopmana tworzą jej domknięty podzbiór. Na $\text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ rozważać będziemy tzw. słabą topologię, przez co rozumiemy mocną topologię przeniesioną z przestrzeni operatorów Koopmana (ze względu na standardowość przestrzeni X odwzorowanie $T \mapsto U_T$ jest różnowartościowe).

Definicja 2.3.2. Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością własną* automorfizmu T , gdy jest ona wartością własną operatora U_T . Mówimy, że funkcja $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest *funkcją własną* automorfizmu T , gdy jest ona funkcją własną operatora U_T .

Definicja 2.3.3. Mówimy, że automorfizm $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ ma *dyskretne widmo*, gdy przestrzeń $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ posiada bazę ortonormalną złożoną z funkcji własnych automorfizmu T .

Ogólna teoria spektralna operatorów unitarnych mówi nam zatem, że dla automorfizmu T z dyskretnym widmem, maksymalny typ spektralny operatora U_T jest typem miary dyskretnej, której atomami są wartości własne automorfizmu T .

Definicja 2.3.4. *Centralizatorem* automorfizmu $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywamy zbiór

$$C(T) := \{S \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu); S \circ T = T \circ S\}.$$

Uwaga 2.3.5. Zauważmy, że automorfizmy postaci $S = T^n$, $n \in \mathbb{Z}$, są oczywistymi elementami grupy $C(T)$.

Centralizator $C(T)$ możemy zanurzyć w przestrzeń $U(L^2(X, \mathcal{B}, \mu))$ przez odwzorowanie

$$C(T) \ni S \mapsto U_S \in U(L^2(X, \mathcal{B}, \mu)).$$

Przenosząc na $C(T)$ mocną topologię operatorową otrzymamy, że:

Wniosek 2.3.6. *Dla dowolnego $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ jego centralizator $C(T)$ jest grupą polską (z przeniesioną mocną topologią operatorową).*

Definicja 2.3.7. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Mówimy, że automorfizm T jest:

1. *ergodyczny*, gdy dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}$ takiego, że $T^{-1}B = B$ (zbiory o tej własności nazywamy T -niezmienniczymi) mamy $\mu(B) \in \{0, 1\}$,
2. *słabo mieszający*, gdy dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{B}$ mamy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0,$$

3. *mieszający*, gdy dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{B}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Uwaga 2.3.8. Nietrudno spostrzec, że mieszanie implikuje słabe mieszanie, które z kolei implikuje ergodyczność.

Przez Erg oznaczmy klasę wszystkich automorfizmów ergodycznych probabilistycznych standardowych przestrzeni borelowskich, zaś przez $WM \subset Erg$ oznaczamy klasę automorfizmów, które są słabo mieszające.

Uwaga 2.3.9. Jeżeli \mathcal{S} jest semi-algebrą generującą σ -algebrę \mathcal{B} , to warunki z definicji 2.3.7 wystarczy sprawdzać dla elementów semi-algebry \mathcal{S} .

Do dyspozycji mamy szereg twierdzeń, które mówią nam o warunkach równoważnych dla wprowadzonych powyżej definicji.

Stwierdzenie 2.3.10. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Następujące warunki są równoważne:*

1. T jest odwzorowaniem ergodycznym.
2. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$ takiego, że $\mu(A) > 0$ mamy $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.
3. Dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{B}$ takich, że $\mu(A), \mu(B) > 0$ istnieje $n > 0$ takie, że $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.

Stwierdzenie 2.3.11. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Następujące warunki są równoważne:*

1. T jest odwzorowaniem ergodycznym.
2. Jeżeli funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ jest \mathcal{B} -mierzalna oraz $f \circ T = f$, to wówczas f jest funkcją stałą.
3. Jeżeli $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $f \circ T = f$, to wówczas f jest funkcją stałą.

Poniższe twierdzenie pokazuje nam związek pomiędzy słabym mieszaniem automorfizmu T oraz ergodycznością automorfizmu $T \times T$ rozważanego z miarą produktową $\mu \otimes \mu$ (patrz: przykład 2.3.27).

Stwierdzenie 2.3.12. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Następujące warunki są równoważne:

1. T jest odwzorowaniem słabo mieszającym.
2. $T \times T$ jest odwzorowaniem ergodycznym z miarą $\mu \otimes \mu$.
3. $T \times T$ jest odwzorowaniem słabo mieszającym z miarą $\mu \otimes \mu$.

Przejdziemy teraz do związku zachodzącego pomiędzy słabym mieszaniem automorfizmu T a własnościami spektralnymi stowarzyszonego z nim operatora U_T (własności spektralne operatora U_T nazywamy często własnościami spektralnymi automorfizmu T).

Definicja 2.3.13. Mówimy, że $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ ma *ciągłe widmo*, jeżeli 1 jest jedyną wartością własną automorfizmu T oraz odpowiadające jej funkcje własne są stałe.

Twierdzenie 2.3.14. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Wówczas T jest odwzorowaniem słabo mieszającym wtedy i tylko wtedy, gdy T ma ciągłe widmo.

Uwaga 2.3.15. Przypomnijmy, że $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywa się *mieszającym rzędu* $r \geq 2$, gdy dla dowolnych zbiorów $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{B}$ mamy

$$\mu(A_1 \cap T^{n_2} A_2 \cap \dots \cap T^{n_r} A_r) \rightarrow \prod_{j=1}^r \mu(A_j),$$

gdy $n_2 \rightarrow \infty$ oraz $n_{j+1} - n_j \rightarrow \infty$ dla $2 \leq j < r$. Mieszanie rzędu 2, to zwykłe mieszanie. Nie wiadomo (problem Rokhlina), czy mieszanie automorfizmu implikuje jego mieszanie dowolnego rzędu. Nietrudno spostrzec, że warunek mieszania rzędu r jest równoważny stwierdzeniu: dla dowolnej funkcji $f \in L_0^2(X, \mu)$ oraz $g_1, \dots, g_{r-1} \in L^\infty(X, \mu)$ mamy

$$\int_X f \cdot g_1 \circ T^{n_2} \cdot \dots \cdot g_{r-1} \circ T^{n_r} d\mu \rightarrow 0,$$

dla n_j -ów j.w.

Uwaga 2.3.16. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz niech $f \in L_0^2(X, \mu)$. Przypuśćmy, że miara spektralna σ_f funkcji f jest ciągła. Wówczas dla $K \geq 1$ mamy

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H^K} \sum_{h_1, \dots, h_k \leq H} \left| \int f \cdot g_1 \circ T^{h_1} \cdot \dots \cdot g_k \circ T^{h_k} d\mu \right| = 0,$$

dla dowolnych funkcji $g_1, \dots, g_k \in L^\infty(X, \mu)$ (patrz: [33]). Rezultat ten możemy więc traktować jako stwierdzenie typu „słabe mieszanie implikuje słabe mieszanie dowolnego rzędu”.

2.3.2 Entropia miarowego układu dynamicznego

Niech P będzie skończonym rozbiem (mierzalnym) probabilistycznej, standardowej przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) .

Definicja 2.3.17. *Entropią (Shannona) rozbitcia P względem miary μ nazywamy liczbę*

$$H(P, \mu) := - \sum_{p \in P} \mu(p) \log \mu(p).$$

Dla dowolnego $n \geq 1$ wprowadzamy oznaczenie

$$P^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} P.$$

Definicja 2.3.18. Niech P będzie rozbiem skończonym przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) oraz $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Liczbę

$$h(T, \mu, P) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(P^n)$$

nazywamy *entropią układu (X, \mathcal{B}, μ, T) względem rozbitcia P* (granica ta istnieje na mocy znanego twierdzenia o istnieniu granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n$ dla ciągu podaddytywnego: $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, liczb nieujemnych).

Definicja 2.3.19. *Entropią miarowego układu dynamicznego (X, \mathcal{B}, μ, T) nazywamy*

$$h(T, \mu) := \sup_{P - \text{skończone rozbitcie p. } X} h(T, \mu, P).$$

Uwaga 2.3.20. Ponadto jeżeli (P_k) jest ciągiem generującym σ -algebrę \mathcal{B} takim, że rozbitcie P_{k+1} rozdrabnia rozbitcie P_k , to

$$h(T, \mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(T, \mu, P_k).$$

2.3.3 Faktory

Definicja 2.3.21. Rozważmy $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $S \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Mówimy, że automorfizm S jest *faktorem* automorfizmu T (równoważnie, T jest *rozszerzeniem* S), jeśli istnieje odwzorowanie $\pi : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$ takie, że $\pi \circ T = S \circ \pi$. Wówczas piszemy $T \rightarrow S$ (czasami, gdy kontekst będzie jasny, będziemy pisać $X \rightarrow Y$).

Jeżeli dodatkowo odwzorowanie π jest odwracalne (w tym kontekście oznacza to dodatkowo mierzalność i zachowywanie miar przez odwzorowanie odwrotne), to mówimy, że automorfizmy T i S są *izomorficzne*.

Uwaga 2.3.22. Zauważmy, że $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ jest T -niezmienniczą pod- σ -algebrą σ -algebry \mathcal{B} .

Pojęcie faktora można wprowadzić równoważnie za pomocą pod- σ -algebr (i działania ilorazowego), które są T -niezmiennicze, co opiszemy dokładniej za chwilę (patrz: (2.7)).

Twierdzenie 2.3.23. *Istnieje wzajemna jednoznaczność pomiędzy odwzorowaniem $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz pod- σ -algebrami T -niezmienniczymi σ -algebry \mathcal{B} .*

Uwaga 2.3.24. Powyższe twierdzenie mówi nam, że w szczególności σ -algebra $\mathcal{I}(T)$ zbiorów T -niezmienniczych określa nam pewien faktor automorfizmu T . Jest to największy faktor, dla którego odwzorowanie ilorazowe \bar{T} (patrz: (2.7) poniżej) działa jako identyczność, tzn. każdy inny faktor o tej własności jest jego faktorem.

Niech \mathcal{C} będzie pod- σ -algebrą T -niezmienniczą σ -algebry \mathcal{B} . Wybierzmy podzbiór gęsty $\{C_n \in \mathcal{C}; n \geq 1\}$ w \mathcal{C} , tzn. taki, że dla dowolnego zbioru $C \in \mathcal{C}$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje $n \geq 1$ takie, że $\mu(C \Delta C_n) < \varepsilon$.

Na przestrzeni X określamy relację równoważności $\sim_{\mathcal{C}}$ w następujący sposób:

$$x_1 \sim_{\mathcal{C}} x_2 \iff \text{dla dowolnego } n \geq 1 \text{ mamy albo } \{x_1, x_2\} \subset C_n, \text{ albo } \{x_1, x_2\} \subset X \setminus C_n.$$

Przez X/\mathcal{C} oznaczmy przestrzeń ilorazową stowarzyszoną z relacją $\sim_{\mathcal{C}}$. Na przestrzeni $(X/\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$ rozważać możemy odwzorowanie ilorazowe \bar{T} zadane w następujący sposób:

$$\bar{T}([x]) := [Tx] \text{ dla } [x] \in X/\mathcal{C}. \quad (2.7)$$

Uwaga 2.3.25. Automorfizm \bar{T} będziemy oznaczać również jako $T|_{\mathcal{C}}$.

Odwzorowanie to jest faktorem automorfizmu T stowarzyszonym z pod- σ -algebrą \mathcal{C} , gdyż odwzorowanie ilorazowe π jest jednocześnie odwzorowaniem faktoryzującym. W dalszej części pracy przyjmujemy następujące oznaczenia: $\bar{X} := X/\mathcal{C}$ oraz $\bar{x} := [x]$, przy czym oznaczenia te są rozumiane w kontekście rozważanego faktora.

Zauważmy, że przyjmując $Y = \bar{X}$ oraz $\nu = \mu|_{\mathcal{C}}$, zaś jako π rozważając odwzorowanie ilorazowe $\pi : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (\bar{X}, \mathcal{C}, \mu|_{\mathcal{C}})$, spełnione są założenia twierdzenia 2.1.8, a zatem mamy:

Twierdzenie 2.3.26 (Rozkład miary nad faktorem). *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ i niech $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ będzie pod- σ -algebrą T -niezmienniczą. Wówczas istnieje odwzorowanie miaralne (w sensie (2.3))*

$$\bar{X} \ni \bar{x} \mapsto \mu_{\bar{x}} \in \mathcal{M}(X)$$

spełniające następujące warunki:

(1) miary warunkowe $\mu_{\bar{x}}$ skupione są na włóknach $\pi^{-1}(\bar{x})$,

(2) zachodzi równość

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\mu|_{\mathcal{C}}(\bar{x}),$$

(3) obrazem miary $\mu_{\bar{x}}$ przez automorfizm T jest miara $\mu_{T\bar{x}}$, tzn. $T_*\mu_{\bar{x}} = \mu_{T\bar{x}}$.

Rozważmy teraz pewne przykłady faktorów.

Przykład 2.3.27 (Automorfizm produktowy). Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ i rozpatrzmy układ produktowy $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2, T_1 \times T_2)$. Wówczas jego naturalnymi faktorem są automorfizmy T_1 i T_2 (jako odwzorowanie faktoryzujące wystarczy rozpatrzeć naturalny rzut na odpowiadające współrzędne).

Przykład 2.3.28 (Identyczność jako faktor automorfizmu nieergodycznego). Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie automorfizmem nieergodycznym. Wówczas istnieje zbiór T -niezmienniczy $B \in \mathcal{B}$ taki, że $0 < \mu(B) < 1$. Zdefiniujmy miarę $\nu : 2^{\{0,1\}} \rightarrow [0, 1]$ w następujący sposób

$$\nu(\{0\}) = \mu(B) \text{ oraz } \nu(\{1\}) = \mu(X \setminus B). \quad (2.8)$$

Wówczas $\text{Id} \in \text{Aut}(\{0, 1\}, 2^{\{0,1\}}, \nu)$ jest faktorem automorfizmu nieergodycznego $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Ponadto mamy następujące własności faktorów:

Twierdzenie 2.3.29. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz rozważmy jego faktor $S \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Wówczas:*

1. *Jeżeli T jest automorfizmem ergodycznym, to S również jest automorfizmem ergodycznym.*
2. *Jeżeli T jest automorfizmem słabo mieszającym, to S również jest automorfizmem słabo mieszającym.*
3. *Jeżeli T jest automorfizmem mieszającym, to S również jest automorfizmem mieszającym.*

Definicja 2.3.30. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Jeżeli istnieje ciąg $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{B}$, składający się z σ -algebr T -niezmienniczych, taki, że $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1}$ dla $i \geq 1$ oraz $\mathcal{B} = \bigvee_{i \geq 1} \mathcal{A}_i$, to wówczas mówimy, że automorfizm T jest *granica odwrotną swoich faktorów* $(T|_{\mathcal{A}_i})_{i \geq 1}$.

2.3.4 Rozkład na składowe ergodyczne

Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie automorfizmem nieergodycznym. Oznacza to, że σ -algebra $\mathcal{I}(T)$ (również oznaczana jako \mathcal{I}_T) zbiorów T -niezmienniczych zadaje nietrywialny (różny od identyczności na jednym punkcie) faktor. Wówczas miarę μ da się przedstawić jako kombinację wypukłą miar $\mu_{\bar{x}}$ (patrz: twierdzenie 2.3.26 dla $\mathcal{C} = \mathcal{I}(T)$), które dodatkowo są ergodyczne (odwzorowanie \bar{T} jest identycznością, więc z (3) w twierdzeniu 2.3.26 otrzymujemy $T_*\mu_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}}$), tzn. zachodzi następujące twierdzenie (przez $\mathcal{M}(X, T) \subset \mathcal{M}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich miar T -niezmienniczych):

Twierdzenie 2.3.31 (Rozkład na składowe ergodyczne). *Dla dowolnego automorfizmu $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ istnieje odwzorowanie mierzalne (w sensie (2.3))*

$$X/\mathcal{I}(T) = \bar{X} \ni \bar{x} \mapsto \mu_{\bar{x}} \in \mathcal{M}(X, T)$$

takie, że:

1. miary warunkowe $\mu_{\bar{x}}$ skupione są na włóknach $\pi^{-1}(\bar{x})$,
2. automorfizmy $T : (\pi^{-1}(\bar{x}), \mathcal{B}|_{\pi^{-1}(\bar{x})}, \mu_{\bar{x}}) \rightarrow (\pi^{-1}(\bar{x}), \mathcal{B}|_{\pi^{-1}(\bar{x})}, \mu_{\bar{x}})$ są ergodyczne,
3. zachodzi równość

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d(\mu|_{\mathcal{I}(T)})(\bar{x}).$$

Niech T będzie automorfizmem probabilistycznej, standardowej przestrzeni borelowskiej (X, \mathcal{B}_X, μ) . Interesuje nas warunek rozłączności automorfizmu T z klasą wszystkich automorfizmów ergodycznych (patrz: podrozdział 2.3.6), co zapisujemy jako $T \in \text{Erg}^\perp$. Dlatego skupiamy się na przypadku, gdy układ jest *nieergodyczny*. Przedstawimy jego rozkład na składowe ergodyczne nieco inaczej, a mianowicie:

$$\mu = \int_X \mu_x d\mu(x), \quad (2.9)$$

gdzie odwzorowanie

$$X \ni x \mapsto \mu_x \in \mathcal{M}^e(X, T)$$

($\mathcal{M}^e(X, T) \subset \mathcal{M}(X, T)$ jest zbiorem wszystkich miar ergodycznych na X) jest mierzalne, a generowana przez nie σ -algebra pokrywa się modulo μ z σ -algebrą \mathcal{I}_T (miary μ_x i $\mu_{x'}$ są równe, gdy $x \sim_{\mathcal{I}_T} x'$). Wtedy (z dokładnością do μ -zaniedbywalnego zbioru) możemy zapisać przestrzeń X jako rozłączną sumę mnogościową

$$X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} X_n,$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$, X_n jest podzbiorem takich $x \in X$, że μ_x jest miarą skupioną na n punktach o równej masie $\frac{1}{n}$ (tych n punktów jest cyklicznie permutowanych przez T), a X_∞ oznacza podzbiór tych $x \in X$, że μ_x jest miarą bezatomową. Kładziemy

$$\bar{X} := \{\mu_x; x \in X\} \subset \mathcal{M}^e(X, T),$$

gdzie rozważamy miarę $\bar{\mu}$, która jest obrazem miary μ poprzez odwzorowanie $x \mapsto \mu_x$. Zauważmy, że wówczas układ (X, μ, T) pojawia się jako relatywnie ergodyczne rozszerzenie układu $(\bar{X}, \bar{\mu}, \text{Id}_{\bar{X}})$, tzn. każda borelowska funkcja T -niezmiennicza jest mierzalna względem σ -algebry $\mathcal{I}(T)$. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ określamy

$$\bar{X}_n := \{\mu_x; x \in X_n\} \subset \bar{X}$$

i wtedy

$$\bar{X} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \bar{X}_n.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ rozważamy skończony układ ergodyczny $(\{1, \dots, n\}, \nu_n, R_n)$, gdzie ν_n jest jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa na $\{1, \dots, n\}$ i $R_n j := j + 1 \pmod n$. Wprowadzamy również abstrakcyjną probabilistyczną, standardową przestrzeń borelowską (Y, \mathcal{B}_Y, ν) , gdzie ν jest miarą bezatomową. Wówczas układ (X, μ, T) można przedstawić, z dokładnością do izomorfizmu miarowego, w sposób następujący:

- Dla $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \bar{X}_n \times \{1, \dots, n\}$, a dla $x = (\bar{x}, j) \in X_n$, $Tx = (\bar{x}, R_n j)$. Ponadto

$$\mu|_{X_n} = \bar{\mu}|_{\bar{X}_n} \otimes \nu_n.$$

- $X_\infty = \bar{X}_\infty \times Y$, a dla $x = (\bar{x}, y) \in X_\infty$, $Tx = (\bar{x}, T_{\bar{x}}y)$, gdzie automorfizmy $T_{\bar{x}} \in \text{Aut}(Y, \nu)$, $\bar{x} \in \bar{X}$, są ergodyczne. Tutaj odwzorowanie

$$\bar{X}_\infty \ni \bar{x} \mapsto T_{\bar{x}} \in \text{Aut}(Y, \nu) \text{ jest borelowskie.} \quad (2.10)$$

Ponadto

$$\mu|_{X_\infty} = \bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty} \otimes \nu.$$

Aby ujednoczyć naszą notację, oznaczymy również $T_{\bar{x}} := R_n$ dla $\bar{x} \in \bar{X}_n$. Pozwala nam to przepisać rozkład na składowe ergodyczne (2.9) jako

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}), \quad (2.11)$$

gdzie miary warunkowe $\mu_{\bar{x}}$ są teraz albo $\delta_{\bar{x}} \otimes \nu_n$, jeśli $\bar{x} \in \bar{X}_n$, albo $\delta_{\bar{x}} \otimes \nu$, o ile $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$.

2.3.5 Operatory Markowa

Rozważamy probabilistyczne przestrzenie standardowe $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$.

Definicja 2.3.32. Operator liniowy i ciągły $\Phi : L^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \rightarrow L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ nazywamy *operatorem Markowa*, jeżeli:

1. $\Phi f \geq 0$ dla dowolnej funkcji $f \in L^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ takiej, że $f \geq 0$,
2. $\Phi \mathbf{1}_{X_1} = \mathbf{1}_{X_2}$ i $\Phi^* \mathbf{1}_{X_2} = \mathbf{1}_{X_1}$.

Uwaga 2.3.33. Zauważmy, że jeżeli Φ jest operatorem Markowa, to operator do niego sprzężony Φ^* również jest operatorem Markowa. Ponadto złożenie dwóch operatorów Markowa (o ile możliwe) jest operatorem Markowa. Z liniowości i własności 2. w powyższej definicji wynika, że operator Markowa przeprowadza funkcje stałe na funkcje stałe ($\Phi(c\mathbf{1}_{X_1}) = c\Phi(\mathbf{1}_{X_1}) = c\mathbf{1}_{X_2}$). Należy również zauważyć, że operatory Markowa przesyłają funkcje o wartościach rzeczywistych w funkcje o wartościach rzeczywistych.

Zbiór wszystkich operatorów Markowa działających z $L^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ do $L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ oznaczamy będziemy przez $O(\mu_1, \mu_2)$. Zauważmy, że $O(\mu_1, \mu_2) \subset K$, gdzie K jest kulą jednostkową w $L(H_1, H_2)$ dla $H_i = L^2(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ (patrz: (2.6)). Zatem na zbiorze operatorów Markowa rozważać możemy słabą topologię operatorową.

Stwierdzenie 2.3.34. Zbiór $O(\mu_1, \mu_2)$ jest domkniętym (w słabej topologii operatorowej) podzbiorem kuli jednostkowej K .

Przejdźmy teraz do wskazania przykładów operatorów Markowa.

Przykład 2.3.35.

1. Operator $\Pi_{X_1, X_2} : L^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \rightarrow L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ określony wzorem

$$\Pi_{X_1, X_2}(f) := \int_{X_1} f d\mu_1$$

jest operatorem Markowa. Gdy $X_1 = X_2 = X$, to będziemy pisali Π_X zamiast $\Pi_{X, X}$.

Jeżeli $\Phi \in O(\mu_1, \mu_2)$, to operator Markowa Φ jest równy Π_{X_1, X_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi|_{L_0^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)} = 0$.

2. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Operator Koopmana $U_T : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ stowarzyszony z T jest operatorem Markowa.
3. Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie standardową przestrzenią probabilistyczną oraz niech \mathcal{C} będzie pod- σ -algebrą σ -algebry \mathcal{B} . Średnia warunkowa $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{C})$ na $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest operatorem Markowa.

2.3.6 Połączenia automorfizmów i ich rozłączność

Definicja 2.3.36. Mówimy, że miara probabilistyczna ρ na $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ jest *połączeniem miar* μ_1 i μ_2 , gdy spełnione są następujące warunki:

- $\rho(\cdot \times X_2) = \mu_1$,
- $\rho(X_1 \times \cdot) = \mu_2$.

Zbiór wszystkich połączeń miar μ_1 i μ_2 oznaczamy przez $C(\mu_1, \mu_2)$.

Sformułujmy twierdzenia dotyczące wygodnej charakteryzacji połączeń miar.

Stwierdzenie 2.3.37. *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorami $C(\mu_1, \mu_2)$ oraz $O(\mu_1, \mu_2)$ zadana przez następujące warunki:*

- (1) *Jeżeli $\rho \in C(\mu_1, \mu_2)$, to odpowiadający operator Φ_ρ wyznaczony przez równość*

$$\int_{X_2} \Phi_\rho(f_1) \cdot f_2 d\mu_2 = \int_{X_1 \times X_2} f_1 \otimes f_2 d\rho \quad (2.12)$$

dla dowolnych funkcji $f_i \in L^2(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, jest operatorem Markowa.

- (2) *Jeżeli $\Phi \in O(\mu_1, \mu_2)$, to odpowiadające mu połączenie miar ρ_Φ jest wyznaczone przez równość*

$$\rho_\Phi(A_1 \times A_2) = \int_{A_2} \Phi(\mathbf{1}_{A_1}) d\mu_2 \quad (2.13)$$

dla dowolnych zbiorów $A_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$.

Zauważmy, że dzięki powyższej identyfikacji $O(\mu_1, \mu_2)$ z $C(\mu_1, \mu_2)$, zbieżność $\rho_n \rightarrow \rho$ w przestrzeni $O(\mu_1, \mu_2)$ jest równoważna zbieżności

$$\rho_n(A_1 \times A_2) \rightarrow \rho(A_1 \times A_2) \quad (2.14)$$

dla dowolnych zbiorów $A_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$.

Definicja 2.3.38. Mówimy, że miara $\rho \in C(\mu_1, \mu_2)$ jest *połączeniem automorfizmów* $T_1 \in \text{Aut}(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ i $T_2 \in \text{Aut}(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, gdy miara ρ jest $T_1 \times T_2$ -niezmiennicza, tzn. $(T_1 \times T_2)_* \rho = \rho$. Otrzymany w ten sposób układ dynamiczny $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \rho, T_1 \times T_2)$ czasami oznaczają będziemy przez $T_1 \vee T_2$.

Zbiór wszystkich połączeń między T_1 i T_2 oznaczają będziemy przez $J(T_1, T_2)$. Gdy $T_1 = T_2 = T$, to mówimy o *samopłączeniach* automorfizmu T i zamiast $J(T, T)$ piszemy $J_2(T)$.

Zauważmy, że $J(T_1, T_2) \neq \emptyset$, bowiem miara produktowa $\mu_1 \otimes \mu_2$ spełnia warunki z powyższej definicji.

Uwaga 2.3.39. Jeżeli $\rho \in J(T_1, T_2)$, to wówczas automorfizm $T_1 \times T_2$ określony na przestrzeni $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \rho)$ posiada dwa naturalne faktory, a mianowicie automorfizmy T_1 i T_2 . Istotnie, odwzorowaniem faktoryzującym dla T_i jest rzut na i -tą współrzędną, tzn. $X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i$, $i = 1, 2$.

Niech $J^e(T_1, T_2) \subset J(T_1, T_2)$ oznacza zbiór połączeń ergodycznych automorfizmów T_1 i T_2 . Może się zdarzyć, że $J^e(T_1, T_2)$ jest zbiorem pustym. Wystarczy, aby któryś z automorfizmów T_1 lub T_2 nie był ergodyczny (faktor automorfizmu ergodycznego musi być ergodyczny). Sytuacja ulegnie zmianie, gdy założymy ergodyczność obu rozważanych automorfizmów. Wówczas można łatwo pokazać, korzystając z własności ekstremalności miar ergodycznych, że szukanymi połączeniami są miary warunkowe z rozkładu na składowe ergodyczne dowolnego połączenia $\rho \in J(T_1, T_2)$.

Przejdźmy do przedstawienia kilku przykładów połączeń pomiędzy automorfizmami T_1 i T_2 .

Przykład 2.3.40 (Połączenie wykresowe). Niech automorfizm T_2 będzie (nietrywialnym) faktorem automorfizmu T_1 . Wówczas istnieje odwzorowanie faktoryzujące $\pi : (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ spełniające warunek ekwiwariantności: $T_2 \circ \pi = \pi \circ T_1$. Wtedy równość

$$\Delta_\pi(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1 \cap \pi^{-1}A_2) \text{ dla dowolnych } A_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2,$$

wyznacza miarę probabilistyczną Δ_π na przestrzeni produktowej $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$. Jest to (nietrywialne, tj. różne od miary produktowej) połączenie automorfizmów T_1 i T_2 , które nazywamy *połączeniem wykresowym*. Zauważmy, że miara Δ_π skupiona jest na zbiorze postaci $\{(x_1, \pi x_1); x_1 \in X_1\}$. Oznacza to, że automorfizm $T_1 \times T_2 \in \text{Aut}(X_1 \times X_2, \Delta_\pi)$ jest izomorficzny z automorfizmem T_1 przez odwzorowanie $(x_1, \pi x_1) \mapsto x_1$. Zatem, jeśli automorfizm T_1 jest ergodyczny, to $\Delta_\pi \in J^e(T_1, T_2)$.

Uwaga 2.3.41. Zauważmy, że dla $S \in C(T)$, gdzie $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$, otrzymujemy, że analogiczny do powyższego warunek

$$\Delta_S(A \times B) := \mu(A \cap S^{-1}B) \text{ dla } A, B \in \mathcal{B},$$

wyznacza element zbioru $J_2(T)$. W szczególności, dla $S = T^n$, $n \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy miary Δ_{T^n} , które nazywamy *połączeniami poza-diagonalnymi*.

Przykład 2.3.42 (Relatywnie niezależne rozszerzenie połączenia faktorów). Niech automorfizm $S_i \in \text{Aut}(Y_i, \mathcal{C}_i, \nu_i)$ będzie faktorem automorfizmu $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, tzn. istnieje odwzorowanie faktoryzujące $\pi_i : (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i) \rightarrow (Y_i, \mathcal{C}_i, \nu_i)$ takie, że $S_i \circ \pi_i = \pi_i \circ T_i$, $i = 1, 2$. Niech $\lambda \in J(S_1, S_2)$ będzie nietrywialnym połączeniem tych faktorów. Rozważmy rozkład miary μ_i nad miarą ν_i , a więc

$$\mu_i = \int_{Y_i} \mu_{y_i}^i d\nu_i(y_i), \quad i = 1, 2.$$

Wówczas kładąc

$$\hat{\lambda}(A_1 \times A_2) := \int_{Y_1 \times Y_2} \mu_{y_1}^1(A_1) \mu_{y_2}^2(A_2) d\lambda(y_1, y_2)$$

dla $A_i \in \mathcal{B}_i$, otrzymujemy (nietrywialne) połączenie $\hat{\lambda}$ automorfizmów T_1 i T_2 , które nazywamy *relatywnie niezależnym rozszerzeniem połączenia λ* .

Przykład 2.3.43 (Relatywnie niezależne rozszerzenie miary diagonalnej na wspólnym faktorze). Niech $S \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie wspólnym faktorem automorfizmów $T_1 \in \text{Aut}(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ i $T_2 \in \text{Aut}(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$. Istnieją zatem odwzorowania faktoryzujące $\pi_i : (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$ takie, że $S \circ \pi_i = \pi_i \circ T_i$, $i = 1, 2$. Rozważmy rozkład miary μ_i , $i = 1, 2$, nad miarą ν , a więc

$$\mu_i = \int_Y \mu_y^i d\nu(y).$$

Na $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ określamy miarę ρ_C wyznaczoną przez warunek

$$\rho_C(A_1 \times A_2) := \int_Y \mu_y^1(A_1) \mu_y^2(A_2) d\nu(y).$$

Wówczas miarę $\rho_C \in J(T_1, T_2)$ nazywamy *relatywnie niezależnym rozszerzeniem miary diagonalnej na wspólnym faktorze*.

Zauważmy, że rozważane połączenie ρ_C jest szczególnym przypadkiem przykładu 2.3.42, gdzie wspólny faktor łączymy ze sobą w sposób diagonalny (tzn. $\rho_C = \widehat{\Delta_{\text{Id}_Y}}$).

Z definicji 2.3.38 mamy, że $J(T_1, T_2) \subset C(\mu_1, \mu_2)$. Zatem, analogicznie do stwierdzenia 2.3.37, możemy podać warunek dotyczący związku pomiędzy połączeniami i pewnym podzbiorem operatorów Markowa.

Stwierdzenie 2.3.44. *Operator Markowa $\Phi \in O(\mu_1, \mu_2)$ odpowiada połączeniu automorfizmów T_1 i T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Phi \circ U_{T_1} = U_{T_2} \circ \Phi.$$

Przez $\mathcal{J}(T_1, T_2)$ oznaczmy podzbiór $O(\mu_1, \mu_2)$ odpowiadający $J(T_1, T_2)$. Wówczas zachodzi następujące:

Stwierdzenie 2.3.45. *Zbiór $\mathcal{J}(T_1, T_2)$ jest domkniętym podzbiorem zbioru $O(\mu_1, \mu_2)$ w słabej topologii operatorowej. W szczególności jest to zbiór zwarty (w słabej topologii operatorowej).*

Zatem identyfikując $\mathcal{J}(T_1, T_2)$ z $J(T_1, T_2)$, na zbiór połączeń $J(T_1, T_2)$ przenosimy topologię ze zbioru $\mathcal{J}(T_1, T_2)$ operatorów Markowa. Topologię tę nazywamy *słabą topologią na zbiorze połączeń*. Wówczas zbieżność połączeń w tej topologii jest równoważna warunkowi (2.14).

Uwaga 2.3.46. Jeżeli miara $\rho \in J(T_1, T_2)$ oraz Φ_ρ jest odpowiadającym jej operatorem Markowa, to przez $\rho^* \in J(T_2, T_1)$ oznaczamy połączenie wyznaczone przez operator do niego sprzężony Φ_ρ^* .

Wskażemy teraz operatory Markowa odpowiadające omówionym wcześniej przykładom połączeń:

Przykład 2.3.47. (1) Mierze produktowej $\mu_1 \otimes \mu_2$ odpowiada operator Markowa Π_{X_1, X_2} z przykładu 2.3.35.

(2) (Przykład 2.3.40) Połączeniu wykresowemu Δ_π odpowiada operator sprzężony do operatora $L^2(X_2, \mu_2) \ni g \mapsto g \circ \pi \in L^2(X_1, \mu_1)$.

(3) (Przykład 2.3.42) Połączeniu $\hat{\lambda}$ odpowiada operator Markowa

$$\Phi_{\hat{\lambda}} = i_{L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)} \circ U_{\pi_2} \circ \Phi_\lambda \circ U_{\pi_1}^{-1} \circ \text{proj}_{L^2(X_1, \pi_1^{-1}\mathcal{C}_1, \mu_1|_{\pi_1^{-1}\mathcal{C}_1})},$$

gdzie $i_{L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)}$ jest zanurzeniem przestrzeni $L^2(X_2, \pi_2^{-1}\mathcal{C}_2, \mu_2|_{\pi_2^{-1}\mathcal{C}_2})$ w przestrzeń $L^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$.

Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ oraz niech $\lambda \in J(T_1, T_2)$, $\rho \in J(T_2, T_3)$. Ze stwierdzenia 2.3.44 mamy odpowiadające im operatory Markowa Φ_λ oraz Φ_ρ . Zauważmy, że wówczas rozważać możemy ich złożenie $\Phi_\rho \circ \Phi_\lambda$. Jest ono operatorem Markowa spełniającym warunek ekwiwariantności $U_{T_3} \circ (\Phi_\rho \circ \Phi_\lambda) = (\Phi_\rho \circ \Phi_\lambda) \circ U_{T_1}$. Zatem, ponownie ze stwierdzenia 2.3.44, otrzymujemy, że złożenie to odpowiada pewnemu elementowi z $J(T_1, T_3)$.

Rozważmy rozkład miar $\lambda \in J(T_1, T_2)$ i $\rho^* \in J(T_3, T_2)$ (patrz: uwaga 2.3.46) nad wspólnym faktorem T_2 :

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_{X_2} \lambda_{x_2} d\mu_2(x_2), \\ \rho^* &= \int_{X_2} \rho_{x_2}^* d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Definicja 2.3.48 ([21]). Miarę $\rho \circ \lambda$ na przestrzeni $(X_1 \times X_3, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_3)$ wyznaczoną przez warunek

$$\rho \circ \lambda := \int_{X_2} \lambda_{x_2} \otimes \rho_{x_2}^* d\mu_2(x_2) = (\text{proj}_{X_1 \times X_3})_* (\widehat{\Delta}_{\text{Id}_{X_2}})$$

nazywamy *złożeniem miar* λ i ρ . Powstaje ona poprzez najpierw wzięcie relatywnie niezależnego rozszerzenia miary diagonalnej nad wspólnym faktorem T_2 automorfizmów $(T_1 \times T_2, \lambda)$ i $(T_2 \times T_3, \rho)$, a następnie poprzez rzut tej miary na $X_1 \times X_3$. Jest więc ona elementem zbioru $J(T_1, T_3)$.

Zdefiniowana powyżej miara opowiada operatorowi Markowa $\Phi_\rho \circ \Phi_\lambda$, a więc:

Stwierdzenie 2.3.49 ([21]). *Zachodzi następująca równość*

$$\Phi_{\rho \circ \lambda} = \Phi_\rho \circ \Phi_\lambda.$$

Definicja 2.3.50. Jeżeli $J(T_1, T_2) = \{\mu_1 \otimes \mu_2\}$, to mówimy, że automorfizmy T_1 i T_2 są *rozłączne w sensie Furstenberga*, co oznaczamy $T_1 \perp T_2$.

Rozłączność automorfizmów oznacza, że są one skrajnie nieizomorficzne. W szczególności nie mogą one mieć wspólnych (nietrywialnych) faktorów, gdyż relatywnie niezależnie rozszerzenie miary diagonalnej nad tym wspólnym faktorem jest ich nietrywialnym (tj. różnym od miary produktowej) połączeniem (patrz: przykład 2.3.43).

Z uwagi 2.3.41 otrzymujemy, że układy dynamiczne, które nie są jednopunktowe, nigdy nie są rozłączne same ze sobą. Istotnie, szukanym nietrywialnym połączeniem jest na przykład miara diagonalna Δ_{Id} .

Niech $0 < a, b < 1$ oraz na przestrzeni $(\{0, 1\}, 2^{\{0,1\}})$ określmy miary ν_a oraz ν_b w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \nu_a(\{0\}) &:= a \text{ oraz } \nu_a(\{1\}) := 1 - a, \\ \nu_b(\{0\}) &:= b \text{ oraz } \nu_b(\{1\}) := 1 - b. \end{aligned}$$

Wówczas zachodzi następujące:

Stwierdzenie 2.3.51. *Identyczności $\text{Id}_i \in \text{Aut}(\{0, 1\}, 2^{\{0,1\}}, \nu_i)$, $i \in \{a, b\}$ nie są rozłączne.*

Dowód. Szukamy miary probabilistycznej λ na $\{0, 1\}^2$, która jest rozwiązaniem układu

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 - a \\ b \\ 1 - b \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wyznacznik macierzy tego układu zeruje się oraz istnieje rozwiązanie tego układu, w którym wszystkie elementy są różne od zera (miara produktowa

zadana przez wektor probabilistyczny $v_p = [ab, a(1-b), b(1-a), (1-a)(1-b)]$. Wystarczy zatem wziąć rozwiązanie $v_0 = [p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}]^T$ układu jednorodnego stowarzyszonego z układem (*) takie, że wektor

$$v := v_p + v_0$$

jest dodatnim wektorem probabilistycznym i jest on rozwiązaniem układu (*) (jest to możliwe, gdyż wektor v_0 może być dowolnie mały). Zadaje on nietrywialne połączenie automorfizmów Id_a i Id_b . \square

Uwaga 2.3.52. Zauważmy, że dla $a \neq b$ i $a \neq 1-b$ powyższe automorfizmy nie mają wspólnego faktora. Zatem posiadanie wspólnego nietrywialnego faktora implikuje nierozłączność, ale brak rozłączności nie implikuje posiadania nietrywialnego wspólnego faktora.

Rozważmy automorfizmy $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, które nie są ergodyczne. Na mocy stwierdzenia 2.3.28, kładąc odpowiednie wagi a i b (patrz: (2.8)), otrzymujemy, że Id_a oraz Id_b są faktorem odpowiednio automorfizmów T_1 i T_2 . Z powyższego stwierdzenia wiemy, że $\text{Id}_a \not\perp \text{Id}_b$, co oznacza, że istnieje nietrywialne połączenie $\lambda \in J(\text{Id}_a, \text{Id}_b)$. Z przykładu 2.3.42 otrzymujemy nietrywialne połączenie $\hat{\lambda} \in J(T_1, T_2)$. Zachodzi zatem następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.3.53. *Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, będą automorfizmami nieergodycznymi. Wówczas nie są one rozłączne.*

Lemat 2.3.54. *Niech $S \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Wówczas zbiór*

$$S^\perp := \{R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa); R \not\perp S\}$$

nie może zawierać nieprzeliczalnej rodziny automorfizmów parami rozłącznych.

Dowód. Niech I będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Przypuśćmy, że odwzorowania $S^\perp \ni R_i \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$, gdzie $i \in I$, tworzą rodzinę automorfizmów parami rozłącznych. Zatem istnieje operator Markowa $\Phi_i : L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa) \rightarrow L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$ odpowiadający nietrywialnemu połączeniu automorfizmów R_i i S , $i \in I$. Niech $f, g \in L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. Wówczas, dla $i \neq j$, operator Markowa $\Phi_j^* \Phi_i$ odpowiada połączeniu automorfizmów R_i and R_j (patrz: rozważania po przykładzie 2.3.47), a więc mierze produktowej. Zatem $\Phi_j^* \Phi_i = 0$ na $L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ i stąd

$$\langle \Phi_i f, \Phi_j g \rangle = \langle \Phi_j^* \Phi_i f, g \rangle = 0.$$

Oznacza to, iż $\Phi_i(L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)) \perp \Phi_j(L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa))$ dla $i \neq j$, co stoi w sprzeczności z ośrodkowością przestrzeni $L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. \square

Rozważmy rodzinę układów dynamicznych $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)$, $i \geq 1$. Wówczas możemy mówić o nieskończonych połączeniach $\lambda \in J(T_1, T_2, \dots)$, tzn. o miarach niezmienniczych na $X_1 \times X_2 \times \dots$, dla których $(\pi_i)_* \lambda = \mu_i$, gdzie π_i jest rzutem na i -tą współrzędną, $i \geq 1$. Oczywiście $J(T_1, T_2, \dots) \neq \emptyset$, gdyż miara produktowa

$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \in J(T_1, T_2, \dots)$. W szczególności możemy mówić o *połączeniach rzędu N* , gdy rozważamy skończoną rodzinę automorfizmów $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)$, $1 \leq i \leq N$.

Jeżeli automorfizmy T_i , $i \geq 1$, są ergodyczne, to, analogicznie do przypadku dwóch automorfizmów, otrzymujemy, że $J^e(T_1, T_2, \dots) \neq \emptyset$.

Gdy $T_1 = T_2 = \dots = T$, to mówimy o nieskończonych samopołączeniach automorfizmu T i ich zbiór oznaczamy przez $J_\infty(T)$. Jeżeli $S_i \in C(T)$, $i \geq 1$, to (analogicznie do uwagi 2.3.41) rozpatrywać możemy połączenia wykresowe $\Delta_{S_1, S_2, \dots}$ wyznaczone przez warunki

$$\Delta_{S_1, S_2, \dots}(A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times X \times X \times \dots) := \mu(A_0 \cap S_1^{-1}A_1 \cap S_2^{-1}A_2 \cap \dots \cap S_k^{-1}A_k)$$

dla $k \geq 1$ oraz $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$. Gdy $S_i = T^{k_i}$, $i \geq 1$, to mówimy o połączeniach *poza-diagonalnych*.

Rozważmy rodzinę automorfizmów $\{(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)\}_{i \geq 1}$ oraz niech dane będą odpowiadające im faktory $\{(Y_i, \mathcal{C}_i, \nu_i, S_i)\}_{i \geq 1}$, tzn. S_i jest faktorem automorfizmu T_i , gdzie $i \geq 1$. Niech $\lambda \in J(S_1, S_2, \dots)$. Dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ rozważmy dezintegrację miary μ_i nad faktorem S_i , a więc

$$\mu_i = \int_{Y_i} \mu_{i, y_i} d\nu_i(y_i).$$

Odwzorowania $Y_i \ni y_i \mapsto \mu_{i, y_i} \in \mathcal{M}(X_i)$ są mierzalne dla dowolnego $i \geq 1$, więc również odwzorowania $Y_1 \times Y_2 \times \dots \ni (y_1, y_2, \dots) \mapsto \mu_{i, y_i} \in \mathcal{M}(X_i)$ są mierzalne dla $i \geq 1$. Sprawdzając warunek mierzalności na cylindrach, z powyższego łatwo otrzymujemy, że odwzorowanie

$$Y_1 \times Y_2 \times \dots \ni (y_1, y_2, \dots) \mapsto \mu_{1, y_1} \otimes \mu_{2, y_2} \otimes \dots \in \mathcal{M}(X_1 \times X_2 \times \dots)$$

jest mierzalne. Zatem miara

$$\hat{\lambda} := \int_{Y_1 \times Y_2 \times \dots} (\mu_{1, y_1} \otimes \mu_{2, y_2} \otimes \dots) d\lambda(y_1, y_2, \dots). \quad (2.15)$$

na $X_1 \times X_2 \times \dots$ jest poprawnie określona oraz $\hat{\lambda} \in J(T_1, T_2, \dots)$. Miarę $\hat{\lambda}$ nazywamy (*nieskończonym*) *relatywnie niezależnym rozszerzeniem połączenia λ* .

Lemat 2.3.55. *Niech $\{(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)\}_{i \geq 1}$ będzie rodziną automorfizmów. Niech $(Y_i, \mathcal{C}_i, \nu_i, S_i)$ będzie faktorem automorfizmu T_i , zaś $\pi_i : (X_i, \mu_i) \rightarrow (Y_i, \nu_i)$ niech będzie odwzorowaniem faktoryzującym, $i \in \mathbb{N}$. Wówczas dla dowolnego połączenia $\lambda \in J(S_1, S_2, \dots)$ istnieje miara $\eta \in J(T_1, T_2, \dots)$ taka, że układ $(S_1 \times S_2 \times \dots, \lambda)$ jest faktorem układu $(T_1 \times T_2 \times \dots, \eta)$.*

Dowód. Na $X_1 \times X_2 \times \dots$ rozważmy miarę $\eta := \hat{\lambda}$ zadaną wzorem (2.15). Jest ona elementem zbioru $J(T_1, T_2, \dots)$ i wówczas układ $(S_1 \times S_2 \times \dots, \lambda)$ jest faktorem układu $(T_1 \times T_2 \times \dots, \eta)$, gdzie odwzorowanie faktoryzujące dane jest wzorem

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (\pi_1(x_1), \pi_2(x_2), \dots).$$

□

Definicja 2.3.56 ([41]). Mówimy, że automorfizm ergodyczny $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ ma własność MSJ (ang. *minimal self-joining property*), gdy dla dowolnego samopołączenia $\lambda \in J_\infty^e(T)$ istnieje rozbitcie

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j \geq 1} A_j$$

takie, że dla $j \in \mathbb{N}$ miara

$$\lambda|_{\prod_{n \in A_j} X}$$

jest samopołączeniem poza-diagonalnym automorfizmu T oraz (z dokładnością do permutacji współrzędnych)

$$\lambda = \lambda|_{\prod_{n \in A_1} X} \otimes \lambda|_{\prod_{n \in A_2} X} \otimes \dots \quad (2.16)$$

Dla automorfizmów z własnością MSJ zachodzi następująca dychotomia:

Uwaga 2.3.57. Obrót $Tx = x + 1$ na $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ($m \geq 1$) ma własność MSJ, ale jeżeli automorfizm ergodyczny T jest aperiodyczny, to własność MSJ implikuje słabe mieszanie ([41]).

Definicja 2.3.58 ([31]). Mówimy, że automorfizm $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ ma własność PID (ang. *pairwise independence property*), gdy dla dowolnej miary $\lambda \in J_\infty(T)$, jeśli rzut λ na dowolne dwie współrzędne jest równy mierze produktowej $\mu \otimes \mu$, to λ jest miarą produktową.

Uwaga 2.3.59. Zauważmy, że w przypadku automorfizmów słabo mieszających własność PID wystarczy sprawdzać dla samopołączeń ergodycznych (ponieważ składowe ergodyczne samopołączenia parami niezależnego będą parami niezależne). Jeśli więc (ergodyczny) automorfizm aperiodyczny T ma własność MSJ, to ma też własność PID. Istotnie, jeśli $\lambda \in J_\infty^e(T)$ jest samopołączeniem parami niezależnym, to każdy ze zbiorów A_j w rozbitciu $\mathbb{N} = \bigcup_{j \geq 1} A_j$ musi być zbiorem jednoelementowym, zatem z (2.16) wynika, że

$$\lambda = \mu \otimes \mu \otimes \dots$$

Uwaga 2.3.60. Jak udowodnił Host w [28], wszystkie automorfizmy słabo mieszające o widmie osobliwym mają własność PID.

Uwaga 2.3.61. Zauważmy ponadto, że ergodyczne i aperiodyczne automorfizmy z dyskretnym widmem nie posiadają własności PID (niemniej obrót na dwóch punktach, a więc automorfizm mający własność MSJ, posiada własność 3-PID).

2.3.7 Połączenia automorfizmu nieergodycznego z układem ergodycznym

Wiemy już, że dwa (nietrywialne) automorfizmy nieergodyczne nie są ze sobą rozłączne (patrz: stwierdzenie 2.3.53). Zatem, aby badać problem rozłączności, należy przyjąć, że przynajmniej jeden z rozważanych automorfizmów jest ergodyczny.

Załóżmy, że $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ nie jest automorfizmem ergodycznym. W notacji wprowadzonej na początku podrozdziału 2.3.4, automorfizm T możemy rozważać w nowych „współrzędnych”, tzn. $T : (\bar{x}, u) \mapsto (\bar{x}, T_{\bar{x}}(u))$ działa na przestrzeni

$$X = \bigsqcup_{n \geq 1} \bar{X}_n \times \{1, \dots, n\} \sqcup \bar{X}_\infty \times Y,$$

gdzie $\mu|_{\bar{X}_n \times \{1, \dots, n\}} = \bar{\mu}|_{\bar{X}_n} \otimes \nu_n$ i $\mu|_{\bar{X}_\infty \times Y} = \bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty} \otimes \nu$. Ustalmy automorfizm ergodyczny R przestrzeni (Z, \mathcal{D}, κ) . Niech $\rho \in J(T, R)$. Wówczas otrzymujemy następujący ciąg faktorów:

$$(X \times Z, \rho) \rightarrow (X, \mu) \rightarrow (\bar{X}, \bar{\mu}),$$

Zatem możemy rozłożyć miarę ρ nad faktorem $(\bar{X}, \bar{\mu})$:

$$\rho = \int_{\bar{X}} \rho_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}). \quad (2.17)$$

Ponieważ automorfizm T działa na \bar{X} jako identyczność, więc

$$\text{miary } \rho_{\bar{x}} \text{ są } T \times R\text{-niezmiennicze.} \quad (2.18)$$

Ponadto dla zbiorów $A \in \mathcal{B}_X$ i $B \in \mathcal{D}$, mamy

$$\rho(A \times B) = \int_{\bar{X}} \rho_{\bar{x}}(A \times B) d\bar{\mu}(\bar{x}),$$

więc

$$\mu(A) = \rho(A \times Z) = \int_{\bar{X}} \rho_{\bar{x}}(A \times Z) d\bar{\mu}(\bar{x})$$

i

$$\kappa(B) = \rho(X \times B) = \int_{\bar{X}} \rho_{\bar{x}}(X \times B) d\bar{\mu}(\bar{x}).$$

Zauważmy, że jednoznaczność rozkładu miary μ (nad miarą $\bar{\mu}$) i ergodyczność κ w zestawieniu z powyższymi równościami oraz (2.18), implikują, że

$$\rho_{\bar{x}} \in J((T_{\bar{x}}, \bar{\nu}), (R, \kappa)), \quad (2.19)$$

gdzie $\bar{\nu} = \nu_n$, gdy $\bar{x} \in \bar{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bar{\nu} = \nu$, gdy $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$.

I odwrotnie: jeśli (2.19) zachodzi i odwzorowanie $\bar{x} \mapsto \rho_{\bar{x}}$ jest mierzalne (w sensie (2.3)), to wzór (2.17) definiuje połączenie $\rho \in J(T, R)$. Ta obserwacja jest całkiem znacząca, gdyż pozwala na uzyskanie wielu połączeń $\rho_D \in J(T, R)$, indeksowanych mierzalnymi podzbiorami $D \subset \bar{X}$, zdefiniowanych następująco:

$$(\rho_D)_{\bar{x}} = \begin{cases} \rho_{\bar{x}}, & \text{dla } \bar{x} \in D; \\ \delta_{\bar{x}} \otimes (\nu \otimes \kappa), & \text{dla } \bar{x} \in \bar{X}_\infty \setminus D; \\ \delta_{\bar{x}} \otimes (\nu_n \otimes \kappa), & \text{dla } \bar{x} \in \bar{X}_n \setminus D. \end{cases} \quad (2.20)$$

W dalszej części pracy, w większości przypadków, będziemy rozważać tylko funkcje o wartościach rzeczywistych.

Lemat 2.3.62. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ i niech $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ będzie automorfizmem ergodycznym. Załóżmy, że $f \in L^2(X, \mu)$ i $g \in L^2_0(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych oraz niech $f \perp \text{Im}(\Phi_\rho|_{L^2_0(Z, \kappa)})$ dla dowolnego połączenia $\rho \in J(R, T)$.¹ Wówczas dla p.w. $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$ mamy

$$\int_Y f(\bar{x}, \cdot) \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) d\nu = 0$$

i dla dowolnego $n \geq 1$ oraz p.w. $\bar{x} \in \bar{X}_n$ zachodzi

$$\int_{\{1, \dots, n\}} f(\bar{x}, \cdot) \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) d\nu_n = 0.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy w przypadku \bar{X}_∞ (przebiega on w analogiczny sposób dla pozostałych przypadków). Załóżmy, że dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$, zbiór

$$\begin{aligned} D &:= \left\{ \bar{x} \in \bar{X}_\infty; \int_Y f(\bar{x}, \cdot) \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) d\nu \geq \varepsilon_0 \right\} = \\ &= \left\{ \bar{x} \in \bar{X}_\infty; \int_{Y \times Z} f(\bar{x}, \cdot) \otimes g d\rho_{\bar{x}} \geq \varepsilon_0 \right\} \end{aligned}$$

ma dodatnią miarę $\bar{\mu}$. Zauważmy, że warunek $\int g d\kappa = 0$, implikuje

$$\int \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) d\nu = \int g d\kappa = 0.$$

W szczególności, jeśli dla $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy $\rho_{\bar{x}} = \delta_{\bar{x}} \otimes (\nu \otimes \kappa)$, to $\Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) = \int \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g) d\kappa = 0$. Zgodnie z naszym założeniem, $f \perp \Phi_{\rho_D}(g)$, ponieważ $\rho_D \in J(R, T)$. Jednak wtedy mamy

$$\begin{aligned} \int f \Phi_{\rho_D}(g) d\mu &= \int f \otimes g d\rho_D = \int \left(\int f \otimes g d(\rho_D)_{\bar{x}} \right) d\bar{\mu}(\bar{x}) = \\ &= \int_D \left(\int f(\bar{x}, y) \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(g)(y) d\nu(y) \right) d\bar{\mu}(\bar{x}) \geq \varepsilon_0 \bar{\mu}(D) > 0, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. \square

Uwaga 2.3.63. Z powyższego lematu wynika, iż badanie ortogonalności do obrazów Markowa układów ergodycznych sprowadza się do badania obrazów operatorów Markowa odpowiadających połączeniu (ergodycznych) układów włóknowych z układami ergodycznymi.

¹Założenie to będzie spełnione, gdy $f \perp F_{\text{we},0}(T)$, patrz: podrozdział 2.3.9.

2.3.8 Rozkład na składowe relatywnie ergodyczne

Przypomnijmy, że (X, \mathcal{B}_X) jest standardową przestrzenią borelowską (tzn., z dokładnością do borelowskiego izomorfizmu, przestrzenią mierzalną przestrzeni polskiej) oraz niech $T : X \rightarrow X$ będzie odwracalnym odwzorowaniem \mathcal{B}_X -mierzalnym takim, że odwzorowanie odwrotne T^{-1} również jest odwzorowaniem \mathcal{B}_X -mierzalnym. Przez $\mathcal{I}(T)$ oznaczamy pod- σ -algebrę zbiorów T -niezmienniczych, tzn.

$$\mathcal{I}(T) := \{B \in \mathcal{B}_X; T^{-1}B = B\}.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do poprzednich podrozdziałów, rozważamy tutaj niezmienniczość bez odniesienia do żadnej miary T -niezmienniczej, gdyż takiej miary nie wyróżniamy, tzn. jeśli $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, to

$$\mathcal{I}_\mu(T) := \{B \in \mathcal{B}_X; \mu(B \Delta T^{-1}B) = 0\},$$

i wówczas rozróżniamy te dwie σ -algebry mimo, iż $\mathcal{I}_\mu(T) = \mathcal{I}(T) \pmod{\mu}$.

Niech $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Rozważmy mierzalną (niekoniecznie standardową) przestrzeń (Y, \mathcal{A}) . Niech $\varphi : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym, które spełnia własność

$$\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{I}(T). \quad (2.21)$$

Stwierdzenie 2.3.64 ([26]). *Istnieje odwzorowanie $[0, 1] \ni t \mapsto \nu_t \in \mathcal{M}(X)$ takie, że:*

(1) dla dowolnego elementu $t \in [0, 1]$ mamy $\nu_t \in \mathcal{M}(X, T)$,

(2) mamy następujący rozkład

$$\mu = \int_0^1 \nu_t dt,$$

(3) dla dowolnego $t \in [0, 1]$ mamy $\varphi_*(\nu_t) = \varphi_*(\mu)$ oraz

$$\mathcal{I}(T) = \varphi^{-1}(\mathcal{A}) \pmod{\nu_t}.$$

Ponadto jeżeli $\mathcal{I}(T) = \varphi^{-1}(\mathcal{A}) \pmod{\mu}$, to dla dowolnego rozbitcia spełniającego warunki (1), (2) i (3) mamy $\nu_t = \mu$ dla dowolnego $t \in [0, 1]$.

Uwaga 2.3.65. Argumenty niezbędne do dowodu powyższego twierdzenia pochodzą od T. Austina (patrz: Section 9. w [26]).

Rozważmy teraz tezę ze stwierdzenia 2.3.64 w kontekście samopołączeń automorfizmu T działającego na przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) w następujący sposób:

$$T(\bar{x}, u) = (\bar{x}, T_{\bar{x}}(u)),$$

gdzie $T_{\bar{x}}$ są ergodyczne (jak wyjaśniono w podrozdziale 2.3.4). Niech $\lambda \in J_2(T)$, $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. Wówczas dezintegracja miary λ względem $\bar{X} \times \bar{X}$ ma postać

$$\lambda = \int_{\bar{X} \times \bar{X}} \lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} d\bar{\mu}(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}'), \quad (2.22)$$

gdzie $\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'})$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$. Zauważmy, że $\bar{X} \times \bar{X}$ jest faktorem układu $(T \times T, \lambda)$, na którym ten automorfizm jest identycznością, nie wiemy jednak, czy jest to największy faktor o tej własności. Możemy jednak zastosować stwierdzenie 2.3.64 do układu $(T \times T, \lambda)$, gdy $\phi : X \times X \rightarrow \bar{X} \times \bar{X}$ jest projekcją na $\bar{X} \times \bar{X}$. Otrzymujemy, że

$$\lambda = \int_0^1 \lambda_t dt,$$

gdzie, z (1), każda miara włóknowa λ_t jest $T \times T$ -niezmiennicza, a z (3), jej rzut na $\bar{X} \times \bar{X}$ jest równy $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. Ponadto układ $(X \times X, \lambda_t, T \times T)$ jest relatywnie ergodycznym rozszerzeniem układu $(\bar{X} \times \bar{X}, \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}, \text{Id})$. Z tego wynika, że rozkład miary λ_t na składowe ergodyczne przyjmuje postać

$$\lambda_t = \int_{\bar{X} \times \bar{X}} \lambda_{t, \bar{x}, \bar{x}'} d\bar{\mu}(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}'),$$

gdzie miary $\lambda_{t, \bar{x}, \bar{x}'}$ są ergodyczne (dla automorfizmu $T_{\bar{x}} \times T_{\bar{x}'}$). Całkując względem t i porównując z (2.22), otrzymujemy, że dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -prawie wszystkich (\bar{x}, \bar{x}') mamy

$$\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} = \int_0^1 \lambda_{t, \bar{x}, \bar{x}'} dt.$$

Rzutując powyższą relację na każdą współrzędną Y i pamiętając, że automorfizmy $T_{\bar{x}}$ są ergodyczne, otrzymujemy, że dla p.w. (w sensie miary Lebesgue'a) $t \in [0, 1]$ (w zależności od (\bar{x}, \bar{x}')), miara $\lambda_{t, \bar{x}, \bar{x}'}$ jest ergodycznym połączeniem automorfizmów $T_{\bar{x}}$ i $T_{\bar{x}'}$. Zatem kładąc

$$J_2^{\text{RelErg}}(T) := \{\lambda \in J_2(T); \lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}, \\ \lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J^e(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'}) \text{ dla } \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\text{-p.w. } (\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}\}, \quad (2.23)$$

i stosując stwierdzenie 2.3.64, otrzymujemy następujący:

Wniosek 2.3.66. *Każde samopłączenie λ automorfizmu T , którego rzut (na $\bar{X} \times \bar{X}$) jest równy $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$, ma postać $\lambda = \int_0^1 \lambda_t dt$, gdzie $\lambda_t \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$.*

Uwaga 2.3.67. Dowodzi to w szczególności, że $J_2^{\text{RelErg}}(T)$ jest zbiorem niepustym, ponieważ wniosek 2.3.66 stosuje się również do $\lambda = \mu \otimes \mu$.

2.3.9 Słabo ergodyczna część układu dynamicznego

Definicja 2.3.68. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Mówimy, że funkcja $f \in L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ jest *słabo ergodyczna*, gdy istnieje automorfizm ergodyczny $T' \in \text{Aut}(X', \mathcal{B}_{X'}, \mu')$ oraz połączenie $\rho \in J(T', T)$ takie, że $f \in \text{Im}(\Phi_\rho)$, gdzie $\Phi_\rho : L^2(X', \mathcal{B}_{X'}, \mu') \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ jest operatorem Markowa odpowiadającym ρ .

Przez $F_{\text{we}}(T)$ oznaczamy domkniętą podprzestrzeń rozpinaną przez słabo ergodyczne elementy układu (X, \mathcal{B}_X, μ) . Podprzestrzeń $F_{\text{we}}(T)$ nazywamy *słabo ergodyczną częścią przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ dla automorfizmu T* .

Zauważmy, że

$$\text{jeśli } f \perp F_{\text{we}}(T), \text{ to } f \in L_0^2(X, \mathcal{B}_X, \mu). \quad (2.24)$$

Istotnie, ponieważ operator Markowa przeprowadza funkcje stałe na funkcje stałe (patrz: uwaga 2.3.33), więc dla $c \neq 0$ mamy

$$0 = \int_X f \cdot \Phi_\rho(c) d\mu = \int_X f \cdot c d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Ponadto dla wszystkich automorfizmów ergodycznych T' i $\rho' \in J(T, T')$ mamy

$$f \perp F_{\text{we}}(T) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \Phi_{\rho'}(f) = 0, \quad (2.25)$$

gdyż $\langle f, \Phi_{\rho'}^*(g) \rangle = 0$ dla dowolnej funkcji $g \in L^2(X', \mu')$. Zatem $\langle \Phi_{\rho'}(f), g \rangle = 0$, a więc $\Phi_{\rho'}(f) = 0$.

W dalszej części, gdy rozważać będziemy problem ortogonalności, to, o ile nie zaznaczono inaczej, będziemy rozważać tylko funkcje o zerowej średniej. Zatem zajmować będziemy się przestrzenią $F_{\text{we},0}(T)$ generowaną przez $\text{Im}(\Phi_\rho|_{L_0^2(X', \mu')})$ dla wszystkich automorfizmów ergodycznych T' .

Uwaga 2.3.69. Zauważmy, że jeśli układ $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ jest nieergodyczny, to (domknięta) podprzestrzeń $F_{\text{we}}(T)$ jest zawsze podzbiorem właściwym przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Ponadto przestrzeń $F_{\text{we}}(T)$ nigdy nie jest gęstym podzbiorem przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Rzeczywiście, weźmy dowolny nietrywialny faktor $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_X$ automorfizmu T , który należy do klasy Erg^\perp (możemy wziąć za \mathcal{A} σ -algebrę zbiorów niezmienniczych, patrz: stwierdzenie 3.1.1). Jeśli $g \in L_0^2(\mathcal{A})$, to

$$\int \Phi_\rho(f') \bar{g} d\mu = \int f' \otimes \bar{g} d\rho = 0,$$

gdzie druga równość wynika z rozłączności automorfizmów T' i $T|_{\mathcal{A}}$.

2.3.10 Mierzalność relacji rozłączności

Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną oraz niech $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

- Uwaga 2.3.70.**
1. Bez straty ogólności możemy zakładać, że X jest przestrzenią zero-wymiarową, tzn. posiada bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych;
 2. Zauważmy, że nawet, gdy o przestrzeni X założymy jedynie, że jest przestrzenią polską, to przestrzeń $C_2(\mu)$ jest zwarta, gdyż tworzy ona rodzinę ciasną. Rzeczywiście, z regularności miary borelowskiej, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subset X$ taki, że $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ i wtedy dla dowolnej miary $\rho \in C_2(\mu)$ mamy $\rho(K \times K) > 1 - 2\varepsilon$, gdzie $K \times K \subset X \times X$ jest podzbiorem zwartym.

Chcemy udowodnić, że zbiór par automorfizmów przestrzeni (X, \mathcal{B}_X, μ) , które są rozłączne, jest zbiorem mierzalnym. W tym celu wykorzystamy (nieco zmodyfikowane) rozumowanie autorstwa del Junco (patrz: Theorem 1 w [29]).

Niech P i Q będą skończonymi, mierzalnymi rozbiciami zbioru X oraz niech $\delta, \varepsilon > 0$.

Na przestrzeniach $\text{Aut}(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ i $C_2(\mu)$ rozważmy odpowiednio pseudometryki zadane przez rozbitcie Q :

$$d(T, T'; Q) := \sum_{q \in Q} \mu(Tq \Delta T'q)$$

oraz

$$d(\rho, \rho'; Q) := \sum_{q_1, q_2 \in Q} |\rho(q_1 \times q_2) - \rho'(q_1 \times q_2)|. \quad (2.26)$$

Przez $\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta)$ oznaczmy zbiór tych wszystkich par (S, T) automorfizmów przestrzeni (X, μ) spełniających warunek następujący: jeżeli $\rho \in C_2(\mu)$, to

$$d(\rho, (S \times T)_*\rho; Q) < \delta \implies d(\rho, \mu \otimes \mu; P) < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Zanim przejdziemy do sformułowania kluczowego lematu, przypomnijmy podstawowe własności różnicy symetrycznej zbiorów. Niech $A, B, A', B' \in \mathcal{B}_X$ oraz $\rho \in C_2(\mu)$. Wówczas mamy:

$$|\rho(A \times B) - \rho(A' \times B')| \leq \rho((A \times B) \Delta (A' \times B')), \quad (2.28)$$

$$(A \times B) \Delta (A' \times B') \subset (A \Delta A') \times X \cup X \times (B \Delta B'). \quad (2.29)$$

Lemat 2.3.71. $\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta) \subset \text{Int}(\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \frac{\delta}{3}))$.

Dowód. Załóżmy, że $(S, T) \in \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta)$. Przypuśćmy, że

$$\tilde{d}((S, T), (S', T'); Q) < \frac{\delta}{3|Q|},$$

przy czym powyższa pseudometryka produktowa \tilde{d} zadana jest przez maksimum z $d(S, T; Q)$ i $d(S', T'; Q)$.

Chcemy pokazać, że $(S', T') \in \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \frac{\delta}{3})$. Weźmy zatem $\rho \in C_2(\mu)$ i załóżmy, że $d(\rho, (S' \times T')_*\rho; Q) < \frac{\delta}{3}$. Musimy zatem sprawdzić, czy $d(\rho, \mu \otimes \mu; P) < \varepsilon$.

Na początku zauważmy, że

$$d(\rho, (S \times T)_*\rho; Q) \leq d(\rho, (S' \times T')_*\rho; Q) + d((S' \times T')_*\rho, (S \times T)_*\rho; Q).$$

Z naszego założenia wynika, że pierwszy składnik po prawej stronie szacuje się przez $\frac{1}{3}\delta$. Z nierówności trójkąta dla d oraz własności (2.28) oraz (2.29) otrzymujemy,

ze drugi z powyższych składników szacuje się w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
& d((S' \times T')_*\rho, (S \times T)_*\rho; Q) \leq d((S' \times T')_*\rho, (S \times T')_*\rho; Q) + \\
& \quad + d((S \times T')_*\rho, (S \times T)_*\rho; Q) = \\
& = \sum_{q_1, q_2 \in Q} |\rho(S'q_1 \times T'q_2) - \rho(Sq_1 \times T'q_2)| + \sum_{q_1, q_2 \in Q} |\rho(Sq_1 \times T'q_2) - \rho(Sq_1 \times Tq_2)| \leq \\
& \leq \sum_{q_1, q_2 \in Q} \rho((S'q_1 \times T'q_2) \Delta (Sq_1 \times T'q_2)) + \sum_{q_1, q_2 \in Q} \rho((Sq_1 \times T'q_2) \Delta (Sq_1 \times Tq_2)) \leq \\
& \leq \sum_{q_1, q_2 \in Q} \rho((S'q_1 \Delta Sq_1) \times X) + \sum_{q_1, q_2 \in Q} \rho(X \times (T'q_2 \Delta Tq_2)) = \\
& = \sum_{q_1, q_2 \in Q} \mu(S'q_1 \Delta Sq_1) + \sum_{q_1, q_2 \in Q} \mu(T'q_2 \Delta Tq_2) = \\
& = |Q|d(S', S; Q) + |Q|d(T', T; Q) < |Q| \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{3|Q|} = \frac{2}{3}\delta.
\end{aligned}$$

Zatem

$$d(\rho, (S \times T)_*\rho; Q) < \frac{1}{3}\delta + \frac{2}{3}\delta = \delta,$$

a skoro $(S, T) \in \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta)$, więc $d(\rho, \mu \otimes \mu; P) < \varepsilon$. \square

Z powyższego wynika, że zbiór

$$\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q) := \bigcup_{\delta > 0} \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta)$$

jest otwarty. Istotnie, weźmy $(S, T) \in \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q)$. Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka, że $(S, T) \in \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \delta)$. Z lematu 2.3.71 otrzymujemy, że $(S, T) \in \text{Int}(\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \frac{\delta}{3}))$, a zatem istnieje otwarte otoczenie U punktu (S, T) takie, że

$$U \subset \text{Int}(\mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \frac{\delta}{3})) \subset \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q, \frac{\delta}{3}) \subset \mathcal{O}(P, \varepsilon, Q).$$

Zatem zbiór

$$\mathcal{O} := \bigcap_{n, m \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{O}\left(P_m, \frac{1}{n}, P_l\right)$$

jest typu G_δ , gdzie P_n jest (skończonym i mierzalnym) rozbięciem przestrzeni X składającym się ze zbiorów domknięto-otwartych i zmierzającym do rozbięcia na punkty, gdy $n \rightarrow \infty$.

Udowodnimy teraz następujące:

Stwierdzenie 2.3.72 ([26]). *Zbiór $\{(S, T); S, T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu), S \perp T\}$ jest G_δ , a więc jest on borelowskim podzbiorem przestrzeni $\text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu) \times \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$.*

Dowód. Pokażemy, że $\{(S, T); S, T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu), S \perp T\} = \mathcal{O}$.

Przypuśćmy, że $(S, T) \notin \mathcal{O}$. Wówczas z definicji zbioru \mathcal{O} wynika, że istnieją $m, n \geq 1$

takie, że dla dowolnego $l \geq 1$ mamy $(S, T) \notin \mathcal{O}(P_m, \frac{1}{n}, P_l, \frac{1}{l})$. Zatem dla pewnej miary $\rho_l \in C_2(\mu)$ mamy

$$d(\rho_l, (S \times T)_* \rho_l; P_l) < \frac{1}{l} \quad (2.30)$$

oraz

$$d(\rho_l, \mu \otimes \mu; P_m) \geq \frac{1}{n}. \quad (2.31)$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho_l \rightarrow \rho$ w metryce na przestrzeni $C_2(\mu)$, gdzie $\rho \in C_2(\mu)^2$. Połóżmy $\rho'_l = (S \times T)_* \rho_l$ i oznaczmy atomy rozbicia P_l przez $p_i^{(l)}$. Z (2.30) wynika więc, że

$$\sum_{i,j} |\rho_l(p_i^{(l)} \times p_j^{(l)}) - \rho'_l(p_i^{(l)} \times p_j^{(l)})| < \frac{1}{l}. \quad (2.32)$$

Ustalmy teraz $\varepsilon' > 0$ i niech $A, B \in \mathcal{B}$. Wówczas dla wszystkich dostatecznie dużych l możemy aproksymować zbiory A i B zbiorami P_l -mierzalnymi, a więc

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{i \in I} p_i^{(l)}\right) < \varepsilon', \quad \mu\left(B \Delta \bigcup_{j \in J} p_j^{(l)}\right) < \varepsilon' \quad (2.33)$$

dla pewnych podzbiorów I, J indeksów atomów rozbicia P_l . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & (A \times B) \Delta \left(\bigcup_{i \in I, j \in J} p_i^{(l)} \times p_j^{(l)} \right) \subset \\ & \subset \left(A \Delta \bigcup_{i \in I} p_i^{(l)} \right) \times X \cup X \times \left(B \Delta \bigcup_{j \in J} p_j^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Zatem, stosując (2.33), otrzymujemy, że jednostajnie względem $\eta \in C_2(\mu)$ mamy

$$\eta\left((A \times B) \Delta \left(\bigcup_{i \in I, j \in J} p_i^{(l)} \times p_j^{(l)} \right)\right) < 2\varepsilon', \quad (2.34)$$

w szczególności nierówność ta zachodzi dla ρ_l oraz ρ'_l . Stosując teraz (2.34) dla ρ_l , (2.32) oraz (2.34) dla ρ'_l , otrzymujemy następujący ciąg przybliżonych równości:

$$\rho_l(A \times B) \sim \sum_{i \in I, j \in J} \rho_l(p_i^{(l)} \times p_j^{(l)}) \sim \sum_{i \in I, j \in J} \rho'_l(p_i^{(l)} \times p_j^{(l)}) \sim \rho'_l(A \times B).$$

Wynika stąd, że również $(S \times T)_* \rho_l = \rho'_l \rightarrow \rho$, a więc $(S \times T)_* \rho = \rho$. Zatem $\rho \in J(S, T)$. Natomiast z (2.31) otrzymujemy, że $\rho \neq \mu \otimes \mu$, co oznacza, że $T \not\perp S$.

Przejdźmy do dowodu przeciwnej inkluzji. Załóżmy zatem, że $(S, T) \in \mathcal{O}$. Wówczas, dla dowolnych $m, n \geq 1$ istnieje $l \geq 1$ i $\delta > 0$ takie, że $(S, T) \in \mathcal{O}(P_m, \frac{1}{n}, P_l, \delta)$. Jeżeli $\rho \in C_2(\mu)$ jest dodatkowo połączeniem automorfizmów T i S , tzn. miara ta jest $S \times T$ -niezmiennicza, a zatem $d(\rho, (S \times T)_* \rho; P_l) = 0 < \delta$. Z naszego założenia wynika, że $d(\rho, \mu \otimes \mu; P_m) < \frac{1}{n}$, co oznacza, że $\rho = \mu \otimes \mu$ i kończy dowód stwierdzenia. \square

²Zbiór $C_2(\mu)$ jest zwarty, więc możemy wybrać podciąg zbieżny do pewnego $\rho \in C_2(\mu)$ (patrz: (2.14)).

Uwaga 2.3.73. Oryginalne twierdzenie del Junco [29] stanowiło, że zbiór automorfizmów rozłącznych z ustalonym automorfizmem jest zbiorem borelowskim.

Uwaga 2.3.74. Możemy również badać zagadnienie mierzalności w kontekście rozłączności, gdy automorfizmy są zdefiniowane na różnych przestrzeniach. Na przykład, jeśli $(X', \mathcal{B}_{X'}, \mu')$ jest inną probabilistyczną, standardową przestrzenią borelowską (zakładamy, że X' jest zwartą przestrzenią metryczną), to zbiór

$$\{(T, T') \in \text{Aut}(X, \mu) \times \text{Aut}(X', \mu'); T \perp T'\}$$

jest podzbiorem borelowskim (jest to zbiór typu G_δ). Dowód tego faktu przebiega w sposób analogiczny do dowodu stwierdzenia 2.3.72 z pseudometryką d na $C_2(\mu)$ w (2.26) zastąpioną pseudometryką d' na przestrzeni $C(\mu, \mu')$ daną wzorem

$$d'(\rho_1, \rho_2; Q, Q') = \sum_{q \in Q, q' \in Q'} |\rho_1(q \times q') - \rho_2(q \times q')|,$$

gdzie Q i Q' są skończonymi (mierzalnymi) rozbiciami odpowiednio przestrzeni X i X' .

2.3.11 Automorfizmy z dyskretnym widmem

Przedstawimy teraz twierdzenia dotyczące automorfizmów ergodycznych z dyskretnym widmem. Przyjrzyjmy się najpierw warunkom na izomorficzność i rozłączność takich automorfizmów w kategoriach wspólnych wartości własnych:

Twierdzenie 2.3.75. (*Halmosa-von Neumanna*) Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, będą automorfizmami ergodycznymi z widmem dyskretnym. Wówczas automorfizmy T_1 i T_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają dokładnie te same wartości własne.

Twierdzenie 2.3.76. Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, będą automorfizmami ergodycznymi. Załóżmy, że automorfizm T_1 ma dyskretne widmo. Wówczas, jeżeli $T_1 \not\perp T_2$, to stowarzyszone operatory Koopmana posiadają wspólną nietrywialną wartość własną.

Kolejne dwa twierdzenia pokazują zastosowanie centralizatora automorfizmu T do sprawdzenia, czy automorfizm T posiada dyskretne widmo.

Twierdzenie 2.3.77. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie automorfizmem ergodycznym. Wówczas automorfizm T ma dyskretne widmo wtedy i tylko wtedy, gdy $C(T)$ jest zbiorem zwartym w mocnej topologii operatorowej.

Twierdzenie 2.3.78. Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie automorfizmem ergodycznym. Wówczas automorfizm T ma dyskretne widmo wtedy i tylko wtedy, gdy

$$J_2^e(T) = \{\Delta_S; S \in C(T)\}.$$

Uwaga 2.3.79. Dla dowolnego automorfizmu $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ istnieje jego maksymalny faktor o widmie dyskretnym. Faktor ten nazywamy *faktorem Kroneckera* automorfizmu T i oznaczamy przez $\mathcal{K}(T)$.

2.3.12 Rozłączność w sensie Furstenberga a rozłączność spektralna

Definicja 2.3.80. Mówimy, że automorfizmy $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, są *spektralnie rozłączne*, jeśli maksymalne typy spektralne operatorów $U_{T_1}|_{L_0^2(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)}$ oraz $U_{T_2}|_{L_0^2(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)}$ są miarami wzajemnie singularnymi. Wówczas piszemy $T_1 \perp_{sp} T_2$.

Okazuje się, że istnieje związek pomiędzy spektralną rozłącznością, a rozłącznością w sensie Furstenberga automorfizmów standardowych przestrzeni borelowskich. Mianowicie, zachodzi następujący fakt:

Twierdzenie 2.3.81. *Niech $T_i \in \text{Aut}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Wówczas*

$$T_1 \perp_{sp} T_2 \implies T_1 \perp T_2.$$

2.3.13 Rozszerzenia domknięte

Niech $\tilde{R} \in \text{Aut}(\tilde{Z}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\kappa})$ będzie rozszerzeniem automorfizmu $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. W tej części rozważać będziemy tzw. rozszerzenia domknięte. Pojęcie to oraz własności domkniętych rozszerzeń zostały omówione w [4].

Definicja 2.3.82 ([4]). Mówimy, że rozszerzenie $\tilde{Z} \rightarrow Z$ jest *domknięte*, jeżeli dla dowolnego samopołączenia $\tilde{\lambda} \in J_2(\tilde{R})$ mamy

$$\tilde{\lambda}|_{Z \times Z} = \kappa \otimes \kappa \implies \tilde{\lambda} = \tilde{\kappa} \otimes \tilde{\kappa}.$$

Pokażemy, że rozszerzenia domknięte zachowują rozłączność. Jednak najpierw potrzebujemy paru lematów.

Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. Rozważmy $\rho \in J(R, T)$ i stowarzyszony operator Markowa $\Phi_\rho : L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Zauważmy, że wówczas operator Markowa będący złożeniem $\Phi_\rho \circ \Phi_\rho^*$ odpowiada pewnemu samopołączeniu automorfizmu T .

Lemat 2.3.83 ([26]). *Jeżeli $\Phi_\rho : L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $\pi_0 \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, to*

$$\pi_0 \perp \text{Im}(\Phi_\rho) \iff \pi_0 \perp \text{Im}(\Phi_\rho \circ \Phi_\rho^*).$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\pi_0 \perp \text{Im}(\Phi_\rho \circ \Phi_\rho^*)$. Wówczas, z twierdzenia o projekcji ortogonalnej, dla dowolnej funkcji $g \in L^2(Z, \kappa)$ mamy $g = g_1 + g_2$, gdzie $g_1 \in \overline{\text{Im}(\Phi_\rho^*)}$ oraz $g_2 \perp \text{Im}(\Phi_\rho^*)$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_X \pi_0 \Phi_\rho(g) d\mu &= \int_X \pi_0 \Phi_\rho(g_1) d\mu + \int_X \pi_0 \Phi_\rho(g_2) d\mu = \\ &= \int_X \pi_0 \Phi_\rho(g_1) d\mu + \int_Z \Phi_\rho^*(\pi_0) g_2 d\kappa = \int_X \pi_0 \Phi_\rho(g_1) d\mu, \end{aligned}$$

gdyż $\int_Z \Phi_\rho^*(\pi_0)g_2 d\kappa = 0$ z założenia. Ponieważ $g_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\rho^*(h_n)$, gdzie $h_n \in L^2(X, \mu)$ dla $n \geq 1$, oraz operator Φ_ρ jest ciągły, więc otrzymujemy $\Phi_\rho(g_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\rho(\Phi_\rho^*(h_n))$. Stąd

$$\int_X \pi_0 \Phi_\rho(g_1) d\mu = 0,$$

co kończy dowód pierwszej implikacji.

Przeciwna implikacja jest oczywista, gdyż $\text{Im}(\Phi_\rho \circ \Phi_\rho^*) \subset \text{Im}(\Phi_\rho)$. \square

Uwaga 2.3.84. Przypomnijmy, że

$$\Phi_\rho(L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)) \subset L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu).$$

Gdy w powyższym lemacie 2.3.83 ograniczymy się do podprzestrzeni L_0^2 , to wówczas otrzymujemy następujący:

Lemat 2.3.85 (del Junco-Rudolph). *Mamy $\Phi_\rho|_{L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_\rho \circ \Phi_\rho^*|_{L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu)} = 0$.*

Powyższy lemat mówi nam zatem, że połączenie ρ jest miarą produktową wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczone przez nie samopłączenie $\rho \circ \rho^*$ jest miarą produktową.

Wróćmy do automorfizmu $\tilde{R} \in \text{Aut}(\tilde{Z}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\kappa})$, który jest rozszerzeniem automorfizmu R , co zapisujemy jako $\tilde{R} \rightarrow R$. Jeżeli $\tilde{\lambda} \in J_2(\tilde{R}, \tilde{\kappa})$ oraz $\lambda := \tilde{\lambda}|_{Z \times Z}$, to wówczas operatorem Markowa odpowiadającym mierze $\lambda \in J_2(R, \kappa)$ jest operator

$$\Phi_\lambda = \text{proj}_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)} \circ \Phi_{\tilde{\lambda}}|_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)}. \quad (2.35)$$

Lemat 2.3.86 ([26]). *Niech $\tilde{\rho} \in J(\tilde{R}, T)$ oraz niech $\rho := \tilde{\rho}|_{Z \times X}$. Wówczas*

$$\Phi_\rho^* \circ \Phi_\rho = \text{proj}_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)} \circ \Phi_{\tilde{\rho}}^* \circ \Phi_{\tilde{\rho}}|_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)}.$$

Dowód. Analogicznie do (2.35) otrzymujemy, że $\Phi_\rho = \Phi_{\tilde{\rho}}|_{L^2(Z, \kappa)}$. Zatem dla funkcji $f, g \in L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ mamy

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\rho^* \circ \Phi_\rho f, g \rangle &= \langle \Phi_\rho f, \Phi_\rho g \rangle = \\ &= \langle \Phi_{\tilde{\rho}} f, \Phi_{\tilde{\rho}} g \rangle = \langle \Phi_{\tilde{\rho}}^* \circ \Phi_{\tilde{\rho}} f, g \rangle = \langle \text{proj}_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)} \circ \Phi_{\tilde{\rho}}^* \circ \Phi_{\tilde{\rho}} f, g \rangle. \end{aligned}$$

\square

Przejdźmy do sformułowania głównego stwierdzenia części dotyczącej rozszerzeń domkniętych.

Twierdzenie 2.3.87 ([4]). *Niech $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ oraz rozważmy rozszerzenie domknięte $\tilde{R} \in \text{Aut}(\tilde{Z}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\kappa})$ tego automorfizmu. Niech automorfizm $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ spełnia $R \perp T$. Wówczas $\tilde{R} \perp T$.*

Dowód. Niech $\tilde{\rho} \in J(\tilde{R}, T)$ i niech $\tilde{\lambda} \in J_2(\tilde{R})$ będzie wyznaczone przez operator Markowa $\Phi_{\tilde{\lambda}} := \Phi_{\tilde{\rho}}^* \circ \Phi_{\tilde{\rho}}$. Zatem z (2.35), operator Markowa dla $\lambda := \tilde{\lambda}|_{Z \times Z}$ jest postaci

$$\Phi_{\lambda} = \text{proj}_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)} \circ \Phi_{\tilde{\rho}}^* \circ \Phi_{\tilde{\rho}}|_{L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)}.$$

Na mocy lematu 2.3.86 otrzymujemy, że $\Phi_{\lambda} = \Phi_{\rho}^* \circ \Phi_{\rho}$, gdzie $\rho := \tilde{\rho}|_{Z \times X} \in J(R, T)$. Jednak $R \perp T$, a więc, ograniczając się do podprzestrzeni L_0^2 , mamy $\Phi_{\rho} = 0$. To jednak oznacza, że $\Phi_{\lambda} = 0$. Założyliśmy, że rozszerzenie $\tilde{R} \rightarrow R$ jest domknięte, więc także $\Phi_{\tilde{\lambda}} = 0$ na L_0^2 . Teraz wystarczy użyć lematu 2.3.85, aby otrzymać, że miara $\tilde{\rho}$ jest połączeniem trywialnym pomiędzy \tilde{R} i T . \square

Uwaga 2.3.88. Zauważmy, że dowód twierdzenia 2.3.87 w istocie rzeczy oznacza, że jeżeli $\tilde{R} \rightarrow R$ jest domkniętym rozszerzeniem oraz $\tilde{\rho} \in J(\tilde{R}, T)$ jest połączeniem takim, że $\tilde{\rho}|_{Z \times X} = \kappa \otimes \mu$, to wówczas $\tilde{\rho} = \tilde{\kappa} \otimes \mu$.

Niech $\text{Aut}(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}) \ni \tilde{T} \rightarrow T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $\text{Aut}(\tilde{Z}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\kappa}) \ni \tilde{R} \rightarrow R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ będą domkniętymi rozszerzeniami. Przypuśćmy, że połączenie $\tilde{\rho} \in J(\tilde{T}, \tilde{R})$ spełnia warunek $\tilde{\rho}|_{X \times Z} = \kappa \otimes \mu$, to przez dwukrotne zastosowanie twierdzenia 2.3.87 (najpierw do rozszerzenia $\tilde{T} \rightarrow T$ i R , następnie do $\tilde{R} \rightarrow R$ i \tilde{T}) otrzymujemy, że $\tilde{\rho} = \tilde{\mu} \otimes \tilde{\kappa}$. Udowodniliśmy zatem następujący wniosek:

Wniosek 2.3.89. *Niech $\tilde{T} \rightarrow T$ oraz $\tilde{R} \rightarrow R$ będą domkniętymi rozszerzeniami. Jeżeli miara $\tilde{\rho} \in J(\tilde{T}, \tilde{R})$ spełnia warunek $\tilde{\rho}|_{X \times Z} = \kappa \otimes \mu$, to $\tilde{\rho} = \tilde{\mu} \otimes \tilde{\kappa}$.*

2.3.14 Mnożniki klasy automorfizmów \mathcal{A}^{\perp}

Rozważmy pewną klasę automorfizmów \mathcal{A} . Przez \mathcal{A}^{\perp} oznaczamy klasę wszystkich automorfizmów rozłącznych z dowolnym elementem należącym do klasy \mathcal{A} .

Definicja 2.3.90. Mówimy, że $T \in \mathcal{A}^{\perp}$ jest *mnożnikiem klasy \mathcal{A}^{\perp}* , gdy dla dowolnego automorfizmu $S \in \mathcal{A}^{\perp}$ oraz dowolnej miary $\lambda \in J(T, S)$, automorfizm $(T \times S, \lambda)$ również jest elementem klasy \mathcal{A}^{\perp} . Klasę wszystkich mnożników klasy \mathcal{A}^{\perp} oznaczamy przez $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\perp})$.

Lemat 2.3.91. *Układ dynamiczny $(X, \mathcal{B}, \mu, T) \in \mathcal{A}^{\perp}$ jest mnożnikiem klasy \mathcal{A}^{\perp} wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\eta \in J_{\infty}(T)$ układ dynamiczny $(X^{\times \infty}, \mathcal{B}^{\otimes \infty}, \eta, T^{\times \infty})$ jest mnożnikiem klasy \mathcal{A}^{\perp} .*

Dowód. \Leftarrow : Zauważmy, że automorfizm T jest izomorficzny z układem

$$(X^{\times \infty}, \mathcal{B}^{\otimes \infty}, (\text{Id} \times \text{Id} \times \dots)_* \mu, T^{\times \infty}).$$

\Rightarrow : Załóżmy, że $(X, \mathcal{B}, \mu, T) \in \mathcal{A}^{\perp}$ jest mnożnikiem klasy \mathcal{A}^{\perp} . Zauważmy najpierw, że dla dowolnego $n \geq 2$ oraz dla dowolnego samopołączenia $\tilde{\lambda} \in J_n(T)$ układ $(X^n, \mathcal{B}^{\otimes n}, \tilde{\lambda}, T^{\times n})$ jest mnożnikiem \mathcal{A}^{\perp} . Rzeczywiście, ponieważ $T \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\perp})$, więc dla $n = 1$ oraz $(Y, \mathcal{C}, \nu, S) \in \mathcal{A}^{\perp}$ mamy $T \vee S \in \mathcal{A}^{\perp}$. Ponownie, z faktu, że T jest

mnożnikiem klasy \mathcal{A}^\perp wynika, że dla $n = 2$ mamy $T \vee (T \vee S) \in \mathcal{A}^\perp$. Teza wynika z indukcji.

Niech $(Y, \mathcal{C}, \nu, S) \in \mathcal{A}^\perp$ oraz $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R) \in \mathcal{A}$. Rozważmy $\eta \in J_\infty(T)$ oraz $\zeta \in J(T^{\times\infty} \vee S, R)$. Przez $\zeta_n := \pi_*^{n, Y, Z} \zeta$ oznaczmy obraz miary ζ przez rzut przestrzeni $X^\infty \times Y \times Z$ na pierwsze n współrzędnych przestrzeni X^∞ oraz współrzędne Y i Z . W szczególności $\zeta_n \in J(T^{\times n} \vee S, R)$. Z poprzedniego akapitu wynika, że $\zeta_n = \zeta|_{X^n \times Y} \otimes \kappa$. Ponieważ cylindry generują σ -algebrę produktową, więc przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy, że $\zeta = (\zeta|_{X^\infty \times Y}) \otimes \kappa = (\eta \vee \nu) \otimes \kappa$. \square

Poniższy fakt został udowodniony w [38] przy założeniu ergodyczności. Pokażemy jednak, że założenie o ergodyczności w dowodzie Proposition 5.1 w [38] można pominąć.

Stwierdzenie 2.3.92. *Dla dowolnych automorfizmów $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ i $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ mamy $T \in \mathcal{M}(\{R\}^\perp)$, o ile dla dowolnego samopojęcia $\lambda \in J_2(T)$ mamy $(T \times T, \lambda) \perp (R \times R, \kappa \otimes \kappa)$.*

Uwaga 2.3.93. Zauważmy, że powyższe stwierdzenie ma nietrywialne zastosowanie jedynie w przypadku, gdy automorfizm R jest słabo mieszający. Istotnie, jeżeli R nie jest automorfizmem słabo mieszającym, to produkt $R \times R$ nie jest ergodyczny. Dodatkowo rozważamy również połączenia $\lambda \in J_2(T)$, które nie są ergodyczne, więc korzystamy z faktu, że dwa nietrywialne nieergodyczne automorfizmy nie są rozłączne.

Dowód. ([38]) Niech $S \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie automorfizmem rozłącznym z R i niech $\rho \in J(T, S)$. Musimy pokazać, że dla dowolnego połączenia $\eta \in J(T, S, R)$ mamy, że $\eta = \rho \otimes \kappa$. Wystarczy sprawdzić, że dla dowolnych funkcji $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$ i $h \in L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ mamy

$$\int_{X \times Y \times Z} f \otimes g \otimes h d\eta = \int_{X \times Y} f \otimes g d\rho \int_Z h d\kappa = 0.$$

Miarę η będziemy rozważać jako połączenie automorfizmów $(T \times R, \mu \otimes \kappa)$ i (S, ν) . Niech $\Phi_\eta : L^2(X \times Z, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}, \mu \otimes \kappa) \rightarrow L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie operatorem Markowa odpowiadającym połączeniu η . Ponieważ $S \perp R$, więc

$$\int_Y \Phi_\eta(\mathbb{1}_X \otimes h) g d\nu = 0 = \int_{Z \times Y} h \otimes g d\kappa d\nu.$$

Z dowolności $g \in L^2(Y, \nu)$ otrzymujemy, że $\Phi_\eta(\mathbb{1}_X \otimes h) = 0$. Zatem

$$\Phi_\eta^* \circ \Phi_\eta(\mathbb{1}_X \otimes h) = 0. \quad (2.36)$$

Niech $\tilde{\eta} \in J_2(T \times R, \mu \otimes \kappa)$ będzie połączeniem odpowiadającym operatorowi Markowa $\Phi_{\tilde{\eta}} := \Phi_\eta^* \circ \Phi_\eta$. Zatem dla dowolnych funkcji $f_i \in L^2(X, \mu)$ oraz $h_i \in L^2(Z, \kappa)$, $i = 1, 2$ mamy

$$\int_{(X \times Z) \times (X \times Z)} f_1 \otimes h_1 \otimes f_2 \otimes h_2 d\tilde{\eta} = \int_{X \times Z} \Phi_\eta^* \circ \Phi_\eta(f_1 \otimes h_1) f_2 \otimes h_2 d\mu d\kappa.$$

Przyjmując $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_X$ oraz $h_1 \in L_0^2(Z, \kappa)$, z powyższej równości i (2.36), otrzymujemy

$$\int_{Z \times Z} h_1 \otimes h_2 d\tilde{\eta}|_{Z \times Z} = \int_Z h_1 d\kappa \int_Z h_2 d\kappa = 0,$$

a więc $\tilde{\eta}|_{Z \times Z} = \kappa \otimes \kappa$. Niech $\lambda := \tilde{\eta}|_{X \times X} \in J_2(T)$. Z założenia otrzymujemy $(T \times T, \lambda) \perp (R \times R, \kappa \otimes \kappa)$ i stąd $\tilde{\eta} = \lambda \otimes (\kappa \otimes \kappa)$. Zatem dla $h \in L_0^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ mamy

$$\Phi_{\tilde{\eta}}(f \otimes h) = \Phi_{\eta}^* \circ \Phi_{\eta}(f \otimes h) = \Phi_{\lambda}(f) \int_Z h d\kappa = 0. \quad (2.37)$$

Istotnie, zauważmy, że

$$\begin{aligned} \int_{X \times Z} \Phi_{\tilde{\eta}}(f_1 \otimes h_1) f_2 \otimes h_2 d(\mu \otimes \kappa) &= \int_{(X \times Z) \times (X \times Z)} f_1 \otimes h_1 \otimes f_2 \otimes h_2 d\lambda d(\kappa \otimes \kappa) = \\ &= \int_{X \times X} f_1 \otimes f_2 d\lambda \int_Z h_1 d\kappa \int_Z h_2 d\kappa = \\ &= \int_{X \times Z} \left(\Phi_{\lambda}(f_1) \int_Z h_1 d\kappa \right) \cdot f_2 \otimes h_2 d\mu d\kappa. \end{aligned}$$

Zatem z lematu 2.3.85 i (2.37) otrzymujemy, że $\Phi_{\eta}(f \otimes h) = 0$. Stąd

$$\int_{X \times Y \times Z} f \otimes g \otimes h d\eta = \int_Y \Phi_{\eta}(f \otimes h) g d\nu = 0,$$

co kończy dowód. \square

Wniosek 2.3.94 ([6]). *Niech \mathcal{A} będzie klasą automorfizmów zamkniętą ze względu na branie produktu kartezjańskiego. Wówczas $T \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego samopółłączenia $\lambda \in J_2(T)$ i dowolnego automorfizmu $R \in \mathcal{A}$ mamy $(T \times T, \lambda) \perp R$.*

Dowód. Konieczność powyższego warunku wynika bezpośrednio z faktu, że T jest mnożnikiem klasy \mathcal{A}^\perp . Do dowodu przeciwnej implikacji wystarczy skorzystać ze stwierdzenia 2.3.92 dla dowolnego automorfizmu $R \in \mathcal{A}^\perp$. \square

Uwaga 2.3.95. Analogicznie do stwierdzenia 2.3.92, powyższy wniosek ma nietrywialne zastosowanie jedynie, gdy $\mathcal{A} \subset \text{WM}$.

2.3.15 Klasy charakterystyczne

Definicja 2.3.96. (1) Klasę \mathcal{F} automorfizmów (rozpatrywanych z dokładnością do izomorfizmu) nazywamy *klasą charakterystyczną*, gdy jest ona zamknięta ze względu na branie czynników oraz przeliczalnych połączeń (co implikuje, że jest ona również zamknięta na branie granic odwrotnych). Rozumiemy przez to, że czynnik elementu klasy \mathcal{F} również należy do tej klasy oraz przeliczalne połączenie elementów klasy \mathcal{F} jest elementem tej klasy.

- (2) \mathcal{F} -faktorem układu dynamicznego $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R)$ nazywamy R -niezmienniczą pod- σ -algebrę \mathcal{A} σ -algebry \mathcal{D} taką, że działanie automorfizmu R ograniczone do \mathcal{A} określa element z \mathcal{F} , tzn. układ dynamiczny $(Z/\mathcal{A}, \mathcal{A}, \kappa|_{\mathcal{A}}, R|_{\mathcal{A}})$ należy do klasy \mathcal{F} .

Omówimy teraz kilka ważnych przykładów klas charakterystycznych:

Przykład 2.3.97. ([33])

- (1) Klasa ALL wszystkich automorfizmów probabilistycznych, standardowych przestrzeni borelowskich.
- (2) $\{*\}$ - identyczność na jednym punkcie.
- (3) Klasa ID składająca się ze wszystkich identyczności probabilistycznych, standardowych przestrzeni borelowskich. Jest to najmniejsza nietrywialna klasa charakterystyczna (Proposition 2.3 w [33]).
- (4) Klasa ZE wszystkich automorfizmów o zerowej entropii. Jest to największa nietrywialna klasa charakterystyczna, tzn. każda właściwa (różna od ALL) klasa charakterystyczna jest zawarta w ZE (Proposition 2.8 w [33]).
- (5) Klasa DISP wszystkich automorfizmów z dyskretnym widmem.
- (6) klasa $\mathcal{F}(T)$ składająca się ze wszystkich miarowych układów dynamicznych, które są faktorem przeliczalnych samopółłączeń automorfizmu T , jest klasą charakterystyczną. Wynika to z lematu 2.3.55 oraz z faktu, że faktor faktora danego automorfizmu S jest również faktorem automorfizmu S . Jest ona najmniejszą (w sensie inkluzji) klasą charakterystyczną zawierającą automorfizm T .
- (7) Klasa $\mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$ mnożników klasy \mathcal{A}^\perp . Istotnie, z lematu 2.3.91 wynika, że jest ona zamknięta ze względu na branie przeliczalnych połączeń. Wystarczy sprawdzić zatem zamkniętość ze względu na branie faktorów. Niech $T \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$ i przypuścimy, że $T|_{\mathcal{B}'} \notin \mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$ dla pewnego faktora $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Zatem istnieje automorfizm $R \in \mathcal{A}^\perp$ oraz połączenie $\lambda \in J(T|_{\mathcal{B}'}, R)$ takie, że układ $(T|_{\mathcal{B}'} \times R, \lambda) \notin \mathcal{A}^\perp$. Biorąc relatywnie niezależne rozszerzenie $\hat{\lambda}$ połączenie λ otrzymujemy automorfizm $(T \times R, \hat{\lambda})$, którego faktorem jest automorfizm $(T|_{\mathcal{B}'} \times R, \lambda)$. Stąd $(T \times R, \hat{\lambda}) \notin \mathcal{A}^\perp$, co jest sprzeczne z faktem, że automorfizm T jest mnożnikiem klasy $\mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$.

Twierdzenie 2.3.98 ([42]). *Jeżeli \mathcal{F} jest klasą charakterystyczną oraz $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$, to istnieje największy (w sensie inkluzji) \mathcal{F} -faktor $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D}$ układu $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R)$. Ponadto dowolne połączenie ρ pomiędzy automorfizmem R a automorfizmem $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$, który należy do \mathcal{F} , jest relatywnie niezależnym rozszerzeniem pewnego połączenia z $J(R|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}, T)$. Równoważnie, dla dowolnych funkcji $f \in L^2(Z, \kappa)$ oraz $g \in L^2(X, \mu)$ mamy*

$$\int_{Z \times X} f(z)g(x) d\rho(z, x) = \int_{Z \times X} \mathbb{E}_\rho(f|\mathcal{A}_{\mathcal{F}})(z)g(x) d\rho(z, x).$$

Wniosek 2.3.99. *Niech \mathcal{F} będzie klasą charakterystyczną oraz załóżmy, że $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. Niech $S \in \mathcal{F}$. Wówczas $S \perp R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \perp R|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$.*

Wróćmy do przypadku, gdy $\mathcal{F} = \mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$, gdzie \mathcal{A} jest pewną klasą automorfizmów. Z wniosku 2.3.94 wynika następujący rezultat:

Wniosek 2.3.100 ([6]). *Niech \mathcal{A} będzie klasą automorfizmów zamkniętą ze względu na branie produktu kartezjańskiego. Wówczas $\mathcal{M}(\mathcal{A}^\perp)$ jest największą klasą charakterystyczną zawartą w \mathcal{A}^\perp . Rezultat zachodzi w szczególności, gdy $\mathcal{A} = \text{WM}$.*

Z każdą klasą charakterystyczną \mathcal{F} , możemy stowarzyszyć klasę \mathcal{F}_{ec} składającą się z automorfizmów, których p.k. składowa ergodyczna należy do \mathcal{F} . Klasa \mathcal{F}_{ec} jest również klasą charakterystyczną, którą nazywamy tzw. *ec-klasą*. Jak wykazano w [33] ec-klasy to właściwe obiekty, gdy zajmujemy się problemem ortogonalności (ograniczonych) funkcji arytmetycznych do klas układów topologicznych, których miary niezmiennicze wyznaczają automorfizmy należące do ustalonej klasy charakterystycznej. Jednakże w problemie Boshernitzana ta szczególna rola ec-klas znika, a poniższy fakt dostarcza pewnego wyjaśnienia tego problemu.

Stwierdzenie 2.3.101. *Niech \mathcal{F} będzie dowolną klasą charakterystyczną. Wówczas dla dowolnego automorfizmu T przestrzeni (X, \mathcal{B}, μ) oraz dowolnej funkcji $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, mamy*

$$\mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)] - \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(T)] \in F_{\text{we}}(T)^\perp.$$

Dowód. Niech R będzie dowolnym automorfizmem ergodycznym przestrzeni (Z, \mathcal{D}, κ) i niech $g \in L^2(Z, \mathcal{D}, \kappa)$. Załóżmy, że $\rho \in J(T, R)$. Stosujemy teraz kolejno: twierdzenie 2.3.98 dla \mathcal{F} (dwa razy), ergodyczność automorfizmu R (największy \mathcal{F} -faktor oraz największy \mathcal{F}_{ec} -faktor automorfizmu R są takie same), oraz twierdzenie 2.3.98 dla $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}$ (dwa razy), aby otrzymać następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} \int \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)] \otimes g \, d\rho &= \int \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)] \otimes \mathbb{E}_\kappa[g | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(R)] \, d\rho = \\ &= \int f \otimes \mathbb{E}_\kappa[g | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(R)] \, d\rho = \\ &= \int f \otimes \mathbb{E}_\kappa[g | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(R)] \, d\rho = \\ &= \int \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(T)] \otimes \mathbb{E}_\kappa[g | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(R)] \, d\rho = \\ &= \int \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(T)] \otimes g \, d\rho. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{\text{ec}}}(T)] - \mathbb{E}_\mu[f | \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)] \perp \text{Im}(\Phi_\rho)$ a ponieważ R jest dowolnym automorfizmem ergodycznym, więc nasza teza została udowodniona. \square

2.4 Dynamika topologiczna

Informacje pochodzące z tego podrozdziału pochodzą głównie z [46].

Definicja 2.4.1. Parę (X, T) , gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną, zaś $T : X \rightarrow X$ jest homeomorfizmem, nazywamy *topologicznym układem dynamicznym*.

Przykład 2.4.2. Niech $S : Y^{\mathbb{Z}} \rightarrow Y^{\mathbb{Z}}$ będzie dwustronnym shiftem nad zwartym alfabetem Y , tzn. $S((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, gdzie $y_n = x_{n+1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Niech $B \subset Y^{\mathbb{Z}}$ będzie domkniętym podzbiorem S -niezmienniczym ($SB = B$). Wówczas para (B, S) jest topologicznym układem dynamicznym, który nazywamy *podshiftem* shiftu $(Y^{\mathbb{Z}}, S)$.

Jeżeli $\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$, to wówczas rozważać możemy *podshift generowany przez \underline{x}* , tzn. $B = \{S^m(\underline{x}); m \in \mathbb{Z}\}$.

Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Przypomnijmy, że na zbiorze $\mathcal{M}(X)$ probabilistycznych miar borelowskich (tzn. określonych na \mathcal{B}_X) na przestrzeni X rozważamy $*$ -słabą topologię, która jest metryzowalna i w której

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu \text{ dla dowolnej funkcji } f \in C(X).$$

Topologia ta jest zwarta, gdyż na mocy twierdzenia Riesz, możemy identyfikować miary probabilistyczne z funkcjami dodatnimi (tzn. przyjmującymi wartości nieujemne dla argumentów nieujemnych), które przeprowadzają funkcję stałą równą 1 w siebie (funkcjonały te tworzą domknięty podzbiór kuli jednostkowej w przestrzeni $C(X)^*$, a zatem zbiór zwarty w $*$ -słabej topologii).

Przez $\mathcal{M}(X, T)$ oznaczymy podzbiór przestrzeni $\mathcal{M}(X)$ wszystkich miar, które są T -niezmiennicze. Na mocy twierdzenia Kryłowa-Bogoljubowa jest to zbiór niepusty. Ponadto zbiór ten jest domknięty w $*$ -słabej topologii, a więc jest zwartym podzbiorem przestrzeni $\mathcal{M}(X)$. Zatem rozważać możemy miarowy układ dynamiczny $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$, gdzie $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Jeżeli tak otrzymany układ jest ergodyczny, to mówimy, że miara μ jest miarą ergodyczną na X i wówczas piszemy $\mu \in \mathcal{M}^e(X, T)$. Zbiór $\mathcal{M}(X, T)$ jest wypukły, a podzbiór $\mathcal{M}^e(X, T)$ jest zbiorem jego punktów ekstremalnych. Zatem z twierdzenia Kreina-Milmana otrzymujemy, że $\mathcal{M}^e(X, T)$ jest zbiorem niepustym. Gdy $|\mathcal{M}^e(X, T)| = 1$ (wtedy oczywiście $|\mathcal{M}(X, T)| = 1$), to mówimy, że układ topologiczny (X, T) jest *monoergodyczny*. Przez UE oznaczamy klasę wszystkich układów monoergodycznych.

Twierdzenie 2.4.3 (Jewett-Krieger, [21]). *Każdy układ ergodyczny (X, \mathcal{B}, μ, T) posiada topologiczny model monoergodyczny, tzn. istnieje monoergodyczny układ topologiczny (Z, R) z jedyną miarą niezmienniczą $\nu \in \mathcal{M}^e(Z, R)$ taki, że miarowe układy dynamiczne (X, \mathcal{B}, μ, T) i $(Z, \mathcal{B}_Z, \nu, R)$ są izomorficzne.*

Pokażemy teraz pewne rezultaty dotyczące miar spektralnych (patrz: podrozdział 2.2).

Lemat 2.4.4. Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Niech $f \in C(X)$ będzie ciągłą funkcją o wartościach zespolonych taką, że $|f| = 1$. Dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ niech $\sigma_{f, \mu}$ oznacza miarę spektralną funkcji f dla automorfizmu (T, μ) . Wtedy odwzorowanie $F : \mathcal{M}(X, T) \mapsto \mathcal{M}(\mathbb{T})$ zdefiniowane jako

$$F(\mu) := \sigma_{f, \mu}$$

jest ciągłe.

Dowód. Zgodnie z definicją *-słabej zbieżności w $\mathcal{M}(X)$ dla każdej funkcji $g \in C(X)$ odwzorowanie $\mu \mapsto \int_X g d\mu$ jest ciągłe. Zatem funkcja

$$\mathcal{M}(X, T) \ni \mu \mapsto \hat{\sigma}_{f, \mu}(m) = \int_X f \circ T^{-m} \cdot \bar{f} d\mu \quad (2.38)$$

jest ciągła dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$. Z tego wynika, że odwzorowanie³ $F_1 : \mathcal{M}(X, T) \rightarrow \mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$ zdefiniowane przez

$$F_1(\mu) := \left(\int_X f \circ T^{-m} \cdot \bar{f} d\mu \right)_{m \in \mathbb{Z}}$$

jest ciągłe. Ponieważ przestrzeń $\mathcal{M}(X, T)$ jest zwarta, więc obraz $\Upsilon := F_1(\mathcal{M}(X, T))$ jest również zwarty w $\mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$.

Teraz określamy funkcję $F_2 : \Upsilon \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{T})$ w następujący sposób:

$$F_2((a_m)_{m \in \mathbb{Z}}) = \sigma, \text{ gdzie } \hat{\sigma}(m) = a_m \text{ dla } m \in \mathbb{Z}.$$

Jest ona dobrze zdefiniowana na mocy twierdzenia Herglotza. Ponieważ rodzina $\{z^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ jest liniowo gęsta w $C(\mathbb{T})$, więc odwzorowanie F_2 jest również ciągłe. Rzeczywiście, niech $(a_m^n)_{m \in \mathbb{Z}}, (b_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in \Upsilon$ i $\sigma_n := F_2((a_m^n)_{m \in \mathbb{Z}})$, $\sigma := F_2((b_m)_{m \in \mathbb{Z}})$. Załóżmy ponadto, że $d((a_m^n)_{m \in \mathbb{Z}}, (b_m)_{m \in \mathbb{Z}}) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ w zbiorze Υ , tzn. mamy zbieżność po współrzędnych. Wynika stąd, że dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $\int_{\mathbb{T}} z^m d\sigma_n \rightarrow \int_{\mathbb{T}} z^m d\sigma$. Ponieważ funkcje z^m są liniowo gęste, więc otrzymujemy ciągłość funkcji F_2 . Ponieważ $F = F_2 \circ F_1$, więc F jest funkcją ciągłą jako złożenie dwóch funkcji ciągłych, co kończy dowód. \square

Lemat 2.4.5. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $T : X \rightarrow X$ jest homeomorfizmem i niech $f \in C(X)$, $|f| = 1$. Wtedy dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{S}^1$ odwzorowanie $G : \mathcal{M}(X, T) \mapsto [0, 1]$ zdefiniowane jako

$$G(\mu) := \sigma_{f, \mu}(\{\alpha\})$$

jest mierzalne.

Dowód. Ustalmy $\alpha \in \mathbb{S}^1$. W świetle lematu 2.4.4 odwzorowanie $F : \mathcal{M}(X, T) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{T})$ dane wzorem $F(\mu) = \sigma_{f, \mu}$ jest ciągłe. Wystarczy zatem pokazać, że odwzorowanie $G' : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \mapsto [0, 1]$ zdefiniowane jako $G'(\sigma) := \sigma(\{\alpha\})$ jest mierzalne.

³Przypomnijmy, że $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ i na $\mathbb{D}^{\mathbb{Z}}$ rozważamy zwykłą metrykę produktową d .

Niech $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T})$ będzie ciągiem (ograniczonym przez 1) rzeczywistych funkcji ciągłych zbieżnych punktowo do funkcji charakterystycznej $\chi_{\{\alpha\}}$. Określamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ odwzorowanie $G'_n : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ jako $G'_n(\sigma) = \int_{\mathbb{T}} g_n d\sigma$. Jest ono ciągłe, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n = G'$ punktowo. Jako granica punktowa funkcji ciągłych funkcja G' jest mierzalna. Ponieważ $G = G' \circ F$, więc kończy to dowód. \square

Uwaga 2.4.6. Zauważmy, że jeśli funkcje F i G są zdefiniowane jako

$$F(\mu) := \sigma_{f-\int f d\mu, \mu} \text{ i } G(\mu) := \sigma_{f-\int f d\mu, \mu}(\{\alpha\}),$$

to powtarzając dowody lematu 2.4.4 i lematu 2.4.5, otrzymujemy, że funkcja F jest ciągła, a funkcja G jest mierzalna.

Wykorzystamy również następujący fakt oparty na teorii spektralnej, która dostarcza narzędzia do wykrywania wartości własnych nieergodycznych układów dynamicznych.

Lemat 2.4.7. *Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym oraz niech miara $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Niech również*

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne automorfizmu (T, μ) i niech $T_{\bar{x}} = T|_{\pi^{-1}(\bar{x})}$ oznacza automorfizm włóknowy odpowiadający elementowi $\bar{x} \in \bar{X}$. Wówczas $\alpha \in \mathbb{S}^1$ jest wartością własną automorfizmu $(T_{\bar{x}}, \mu_{\bar{x}})$ dla elementów \bar{x} tworzących zbiór o dodatniej mierze $\bar{\mu}$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wartością własną automorfizmu (T, μ) .

Dowód. Niech $\alpha \in \mathbb{S}^1$ będzie jak w założeniu. Rozważmy zbiór $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji (o module 1), które tworzą liniowo gęsty podzbiór w przestrzeni zespolonych funkcji ciągłych określonych na przestrzeni X . Zauważmy, że miara $\sigma_{f_n, \mu}$ jest kombinacją wypukłą miar $\sigma_{f_n, \mu_{\bar{x}}}$, tzn. $\sigma_{f_n, \mu} = \int_{\bar{X}} \sigma_{f_n, \mu_{\bar{x}}} d\bar{\mu}(\bar{x})$. Rzeczywiście, m -ty współczynnik transformaty Fouriera miary po prawej stronie jest równy

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{X}} \int_{\mathbb{S}^1} z^{-m} d\sigma_{f_n, \mu_{\bar{x}}}(z) d\bar{\mu}(\bar{x}) = \\ &= \int_{\bar{X}} \int_X f_n \circ (T|_{\pi^{-1}(\bar{x})})^{-m}(x) \cdot \bar{f}_n(x) d\mu_{\bar{x}}(x) d\bar{\mu}(\bar{x}) = \\ &= \int_X f_n \circ T^{-m}(x) \cdot \bar{f}_n(x) d\mu(x) = \hat{\sigma}_{f_n, \mu}(m). \end{aligned}$$

Zatem następujące warunki są równoważne:

- α jest wartością własną automorfizmu (T, μ) ;
- istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\sigma_{f_n, \mu}(\{\alpha\}) > 0$;

- istnieje $n \in \mathbb{N}$ i zbiór dodatniej miary $\bar{\mu}$ tych elementów \bar{x} , że $\sigma_{f_n, \mu_{\bar{x}}}(\{\alpha\}) > 0$;
- istnieje zbiór dodatniej miary $\bar{\mu}$ tych elementów \bar{x} , dla których α jest wartością własną automorfizmu $(T_{\bar{x}}, \mu_{\bar{x}})$.

□

Wniosek 2.4.8. Niech $T \in \text{Erg}^\perp$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ zbiór tych składowych ergodycznych automorfizmu T , które mają α jako wartość własną, jest $\bar{\mu}$ -miary 0. W szczególności $\bar{\mu}(\bar{X}_n) = 0$ dla każdego $n \geq 2$.

Uwaga 2.4.9. Zauważmy, że z wniosku 2.4.8 wynika, że 1 jest jedyną wartością własną automorfizmu $T \in \text{Erg}^\perp$.

2.4.1 Generowanie i quasi-generowanie miary

Informacje z tego podrozdziału znaleźć możemy w [21]. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną.

Definicja 2.4.10. Mówimy, że ciąg $(x_n) \in X^\mathbb{N}$ jest *ciągami generującym* dla miary $\mu \in \mathcal{M}(X)$, gdy

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \delta_{x_n} \rightarrow \mu \quad (2.39)$$

w *-słabej topologii.

Jeżeli powyższa zbieżność zachodzi jedynie wzdłuż (rosnącego) podciągu (N_m) , to wówczas mówimy, że ciąg (x_n) jest *ciągami quasi-generującym dla miary μ wzdłuż podciągu (N_m)* .

Uwaga 2.4.11. Przypomnijmy, że warunek (2.39) oznacza, iż

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} g(x_n) \rightarrow \int_X g d\mu$$

dla dowolnej funkcji $g \in C(X)$.

Rozważmy topologiczny układ dynamiczny (Y, S) .

Definicja 2.4.12. Mówimy, że punkt $u \in Y$ jest *punktem generującym* dla miary $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$, gdy ciąg $(S^n u)$ jest ciągami generującym dla miary ν .

Mówimy, że punkt $u \in Y$ jest *punktem quasi-generującym* dla miary $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$ wzdłuż podciągu (N_m) , gdy ciąg $(S^n u)$ jest ciągami quasi-generującym dla miary ν wzdłuż podciągu (N_m) .

Uwaga 2.4.13. Nie każda miara S -niezmiennicza na Y ma punkt generujący, a nawet quasi-generujący. Z kolei każda miara ergodyczna $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$ posiada punkt generujący. Ponadto punkty generujące dla tej miary ergodycznej tworzą borelowski podzbiór zbioru Y o pełnej ν -mierze (Theorem 4.4, [21]).

Twierdzenie 2.4.14 (Lifting Lemma, [33]). Niech (Y, S) i (X, T) będą układami topologicznymi. Załóżmy, że $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ i niech $u \in Y$ będzie punktem quasi-generującym wzdłuż rosnącego ciągu (N_m) dla pewnej miary $\nu \in \mathcal{M}(Y, S)$. Niech $\rho \in J((S, \nu), (T, \mu))$. Wówczas istnieje ciąg $(x_n) \subset X$ oraz podciąg (N_{m_i}) takie, że ciąg $(S^{n_i}u, x_{n_i})$ jest quasi-generujący wzdłuż podciągu (N_{m_i}) dla miary ρ , a zbiór $\{n \geq 0; x_{n+1} \neq Tx_n\}$ jest postaci (b_k) , gdzie $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$, gdy $k \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 2.4.15 (Orbitalne modele monoergodyczne, [1]). Niech (X, T) będzie monoergodycznym układem topologicznym z jedyną miarą niezmienniczą μ oraz niech ciąg $(x_n) \subset X$ będzie taki, że zbiór $\{n \geq 0; x_{n+1} \neq Tx_n\}$ jest postaci (b_k) , gdzie $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$ przy $k \rightarrow \infty$. Niech $\underline{x} := (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Rozważmy $Y := \overline{\{S^m \underline{x}; m \in \mathbb{N}\}}$, gdzie S jest jednostronnym shiftem na $X^{\mathbb{N}}$. Wówczas podshift (Y, S) jest układem monoergodycznym miarowo izomorficznym z układem (X, μ, T) .

2.4.2 Układy Furstenberga ciągów ograniczonych

Dowolny ciąg liczbowy $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy funkcją arytmetyczną. Interesować nas będą funkcje arytmetyczne o wartościach w $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. W zależności od potrzeb funkcję \mathbf{u} możemy traktować jako ciąg dwustronny (np. kładąc $\mathbf{u}(0) = 0$ i $\mathbf{u}(-n) = \mathbf{u}(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$) o wartościach w \mathbb{D} . Rozważmy zatem

$$X_{\mathbf{u}} := \overline{\{S^m \mathbf{u}; m \in \mathbb{Z}\}},$$

czyli podshift generowany przez \mathbf{u} . Przez $V(\mathbf{u})$ oznaczmy zbiór wszystkich miar z $\mathcal{M}(X_{\mathbf{u}})$, które są quasi-generowane przez \mathbf{u} . Więc jeśli $\kappa \in V(\mathbf{u})$, to istnieje ciąg (N_k) taki, że

$$\kappa = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{S^n \mathbf{u}}. \quad (2.40)$$

Zauważmy, że $V(\mathbf{u}) \subset \mathcal{M}(X_{\mathbf{u}}, S)$, a zatem *-słaba zwartość zbioru $\mathcal{M}(X_{\mathbf{u}})$ implikuje, iż $V(\mathbf{u}) \neq \emptyset$.

Definicja 2.4.16. Układem Furstenberga funkcji \mathbf{u} nazywamy każdy miarowy układ dynamiczny $(X_{\mathbf{u}}, \mathcal{B}_{X_{\mathbf{u}}}, \kappa, S)$, dla którego $\kappa \in V(\mathbf{u})$.

Stwierdzenie 2.4.17 ([11]). Zbiór miar quasi-generowanych przez \mathbf{u} posiada następujące własności:

- $V(\mathbf{u})$ jest podzbiorem domkniętym zbioru $\mathcal{M}(X_{\mathbf{u}}, S)$ (w *-słabej topologii),
- $V(\mathbf{u})$ jest zbiorem spójnym i stąd, albo $|V(\mathbf{u})| = 1$, albo $V(\mathbf{u})$ jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Uwaga 2.4.18. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Przez $\pi_n : X_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{C}$ oznaczamy funkcję daną wzorem $\pi_n(\underline{x}) = x_n$ dla dowolnego $\underline{x} \in X_{\mathbf{u}}$. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ mamy zależność $\pi_n := \pi_0 \circ S^n$. Ponadto jeżeli $\kappa \in V(\mathbf{u})$, to ciąg zmiennych losowych $(\pi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ jest procesem stacjonarnym.

2.4.3 Entropia topologiczna

Przejdźmy do przypomnienia pojęcia entropii układu topologicznego (X, T) .

Pokryciem przestrzeni X nazywamy dowolną rodzinę \mathcal{U} zbiorów otwartych, których suma mnogościowa równa jest X . Mówimy, że pokrycie \mathcal{V} *rozdrabnia* pokrycie \mathcal{U} , gdy dla dowolnego $V \in \mathcal{V}$ mamy $V \subset U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}$. *Połączeniem* pokryć \mathcal{U} i \mathcal{V} nazywamy ich wspólne rozdrobnienie, tzn. pokrycie

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V; U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

Pokrycie \mathcal{V} nazywamy *podpokryciem* pokrycia \mathcal{U} , gdy $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Połóżmy

$$N(U) := \min_{\mathcal{V} \subset \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{-pokrycie } X} |\mathcal{V}|,$$

gdzie $|\mathcal{V}| = \text{card}(\mathcal{V})$ oznacza moc pokrycia \mathcal{V} .

Dla dowolnego $n \geq 1$ wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{U}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U}.$$

Położmy

$$H(\mathcal{U}) := \log N(\mathcal{U}),$$

$$h(T, \mathcal{U}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}^n).$$

Definicja 2.4.19. *Entropią topologiczną układu (X, T)* nazywamy wielkość

$$h(T) := \sup_{\mathcal{U} \text{-pokrycie } X} h(T, \mathcal{U}).$$

Zachodzi następujący związek pomiędzy entropią topologiczną, a entropią układów miarowych $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$, gdzie $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$:

Twierdzenie 2.4.20 (Zasada wariacyjna). *Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym. Wówczas*

$$h(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, T)} h(T, \mu) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^e(X, T)} h(T, \mu).$$

2.5 Funkcje moltiplikatywne

Definicja 2.5.1. Funkcję arytmetyczną \mathbf{u} , dla której zachodzi równość $\mathbf{u}(m \cdot n) = \mathbf{u}(m) \cdot \mathbf{u}(n)$, gdy $(m, n) = 1$ (tzn. m i n są względnie pierwsze) nazywamy *funkcją moltiplikatywną*. Gdy warunek ten spełniony jest dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$, to wówczas mówimy, że funkcja \mathbf{u} jest *całkowicie moltiplikatywna*.

Uwaga 2.5.2. Zauważmy, że każda funkcja moltiplikatywna \mathbf{u} jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na potęgach liczb pierwszych (zbiór liczb pierwszych oznaczamy przez \mathbb{P}), gdyż wprost z definicji wynika, że

$$\mathbf{u}(p_{i_1}^{r_1} \cdots p_{i_k}^{r_k}) = \mathbf{u}(p_{i_1}^{r_1}) \cdots \mathbf{u}(p_{i_k}^{r_k}),$$

gdzie $p_{i_j} \in \mathbb{P}$, $r_{i_j} \geq 1$, $p_{i_j} \neq p_{i_l}$ dla $j \neq l$ i $1 \leq j, l \leq k$. Analogicznie, każda funkcja całkowicie moltiplikatywna \mathbf{u} wyznaczona jest jednoznacznie przez swoje wartości na liczbach pierwszych:

$$\mathbf{u}(p_{i_1}^{r_1} \cdots p_{i_k}^{r_k}) = \mathbf{u}(p_{i_1})^{r_1} \cdots \mathbf{u}(p_{i_k})^{r_k}.$$

Przykład 2.5.3. 1. Funkcja Möbiusa

Funkcję $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ określoną wzorem

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & \text{gdzie } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{gdzie } n = p_{i_1} \cdots p_{i_k}, \text{ gdzie } p_{i_j} \neq p_{i_l} \text{ dla } i \neq j, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

nazywamy *funkcją Möbiusa*. Jest to przykład funkcji, która jest moltiplikatywna, ale nie jest całkowicie moltiplikatywna.

2. Funkcja Liouville'a

Funkcję $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ daną wzorem

$$\lambda(n) := (-1)^{r_1 + \cdots + r_k}, \text{ gdzie } n = p_{i_1}^{r_1} \cdots p_{i_k}^{r_k}$$

nazywamy *funkcją Liouville'a*. Jest to funkcja całkowicie moltiplikatywna.

3. Charaktery Dirichleta

Niech $q \in \mathbb{N}$. *Charakterem Dirichleta o module q* nazywamy dowolną funkcję $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, która dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ spełnia następujące warunki:

- $\chi(m \cdot n) = \chi(m) \cdot \chi(n)$, czyli funkcja χ jest całkowicie moltiplikatywna;
- $\chi(m) \neq 0$, gdy $(m, q) = 1$ oraz $\chi(m) = 0$, gdy $(m, q) > 1$;
- $\chi(m + q) = \chi(m)$, tzn. χ jest funkcją q -okresową.

Najprostszym przykładem charakteru Dirichleta jest *charakter główny* (o module q), który zadany jest przez wzór

$$\chi_{0,q}(m) := \begin{cases} 1, & \text{gdzie } (m, q) = 1, \\ 0, & \text{gdzie } (m, q) > 1. \end{cases}$$

Charakter Dirichleta $\chi \bmod q$ może być wyznaczony przez charakter χ' o module $q'|q$ (ściśle mniejszym niż q) wzorem $\chi = \chi' \cdot \chi_{0,q}$. Mówimy wtedy, że χ jest *indukowany* przez χ' . Jeśli χ nie może być indukowany z charakteru o ściśle mniejszym module, to mówimy, że χ jest *pierwotny*.

4. Charaktery Archimedesesa

Niech $t \in \mathbb{R}$. Funkcję całkowicie moltiplikatywną $n \mapsto n^{it} = e^{it \log n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *charakterem Archimedesesa*.

Dla dowolnej funkcji arytmetycznej $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ niech

$$\|\mathbf{u}\|_B := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |\mathbf{u}(n)|$$

oznacza pseudo-normę Besicovitcha funkcji \mathbf{u} . W przypadku, gdy dodatkowo \mathbf{u} jest funkcją moltiplikatywną, zachodzi następująca równoważność (patrz: Lemma 2.9, [5]):

$$\|\mathbf{u}\|_B = 0 \Leftrightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (1 - |\mathbf{u}(p)|) = \infty. \quad (2.41)$$

Przykładem funkcji całkowicie moltiplikatywnej o zerowej pseudo-normie Besicovitcha jest funkcja $\mathbf{u}(n) = n^{-r}$, gdzie $r > 0$. Zauważmy, że prawa strona w (2.41) daje wiele innych możliwości tworzenia funkcji moltiplikatywnych o zerowej pseudo-normie Besicovitcha.

Wróćmy teraz do założenia, że \mathbf{u} jest ogólną funkcją arytmetyczną. Przypomnijmy, że funkcję arytmetyczną \mathbf{u} nazywamy *ortogonalną* do układu topologicznego (X, T) , gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(T^n x) \mathbf{u}(n) = 0 \quad (2.42)$$

dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$ i dowolnego $x \in X$. Piszemy wówczas $\mathbf{u} \perp (X, T)$. Jeżeli dana jest klasa \mathcal{A} układów topologicznych, to mówimy, że funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do klasy \mathcal{A} , gdy $\mathbf{u} \perp (X, T)$ dla wszystkich $(X, T) \in \mathcal{A}$, co oznaczamy jako $\mathbf{u} \perp \mathcal{A}$. Zauważmy, że warunek $\mathbf{u} \perp (X, T)$ implikuje, że średnia $M(\mathbf{u}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mathbf{u}(n)$ istnieje i równa się zero. W przypadku, gdy $M(\mathbf{u})$ nie istnieje, co np. ma miejsce dla charakterów Archimedesesa dla $t \neq 0$ (lub istnieje, lecz nie jest zerem), a (X, T) jest układem monoergodycznym, naturalnym warunkiem ortogonalności $\mathbf{u} \perp (X, T)$ jest wówczas wymaganie, aby (2.42) zachodziło dla wszystkich funkcji $f \in C(X)$, których całka (względem jedynej miary niezmienniczej) jest zerem.

Gdy $\|\mathbf{u}\|_B = 0$, to $\mathbf{u}(n) \rightarrow 0$ wzdłuż podciągu o pełnej gęstości w \mathbb{N} . Łatwo widać, że dla dowolnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$ (patrz: (2.40)) mamy

$$\int_{X_{\mathbf{u}}} |\pi_0| d\kappa = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} |\mathbf{u}(n)| = 0,$$

gdzie $\pi_0(y) = y_0$ dla $y \in X_{\mathbf{u}}$. Zatem $\pi_0 = 0$ κ -p.w. i stąd $\pi_n := \pi_0 \circ S^n = 0$ κ -p.w. dla $n \in \mathbb{Z}$. Zatem $\kappa = \delta_0$ jest jedynym układem Furstenberga dla \mathbf{u} . Wynika z tego, że funkcje moltiplikatywne o zerowej pseudo-normie Besicovitcha są ortogonalne do wszystkich układów topologicznych (nie korzystamy z moltiplikatywności funkcji \mathbf{u}), w szczególności do wszystkich układów monoergodycznych. Innym przykładem jest funkcja $\mathbf{u}(n) = n^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$), która jest charakterem Archimedesesa. W tym

przypadku, \mathbf{u} jest tzw. funkcją *wolno zmieniającą się w średniej*, tzn. funkcja \mathbf{u} spełnia warunek

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{u}(n)| \rightarrow 0, \text{ gdy } N \rightarrow \infty. \quad (2.43)$$

Zauważmy, że tak naprawdę mamy $(n+1)^{it} - n^{it} \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Ponadto $\|n^{it}\|_B = 1 \neq 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Z drugiej strony, każda funkcja \mathbf{u} taka, że $\|\mathbf{u}\|_B = 0$ jest funkcją wolno zmieniającą się w średniej.

Już w pracy [25] zauważono, że funkcje wolno zmieniające się w średniej (bez założenia moltiplikatywności) to dokładnie te, których wszystkie układy Furstenberga są identycznościami. Otrzymujemy zatem klasę funkcji ortogonalnych do wszystkich układów monoergodycznych. Istotnie, jeżeli $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ jest ograniczoną funkcją arytmetyczną taką, że dla dowolnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$ układ Furstenberga $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ jest identycznością, to wówczas $\kappa = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{S^n(\mathbf{u})}$ i dla dowolnego monoergodycznego układu topologicznego (X, T) z jedyną miarą ν mamy (zakładamy, że $\int f d\nu = 0$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(T^n x) \mathbf{u}(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(T^n x) \pi_0(S^n \mathbf{u}) = \int f \otimes \pi_0 d\rho,$$

gdzie (ewentualnie przechodząc do podciągu ciągu (N_k))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(T \times S)^n(x, \mathbf{u})} = \rho.$$

Nietrudno spostrzec, że $\rho \in J((T, \nu), (S, \kappa))$, a ponieważ $(T, \nu) \perp (S, \kappa) = (\text{Id}, \kappa)$ (patrz: stwierdzenie 3.1.1), więc $\rho = \nu \otimes \kappa$ i dlatego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(T^n x) \mathbf{u}(n) = 0.$$

Klurman w [35] udowodnił, że jeśli funkcja \mathbf{u} jest moltiplikatywna ($|\mathbf{u}| \leq 1$) i wolno zmieniająca się w średniej, to

albo $\|\mathbf{u}\|_B = 0$, albo \mathbf{u} jest charakterem Archimedesesa.

Definicja 2.5.4. *Moltiplikatywną odległością* między dwiema funkcjami moltiplikatywnymi \mathbf{u} i \mathbf{v} definiujemy jako

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (1 - \text{Re}(\mathbf{u}(p) \overline{\mathbf{v}(p)})).$$

Uwaga 2.5.5. Zauważmy, że funkcja D nie jest odległością w zwykłym sensie (bo np. $D(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ może być dodatnia), ale spełnia nierówność trójkąta.

Uwaga 2.5.6. Jeśli $D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < +\infty$, to mówimy, że funkcja \mathbf{u} *udaje* funkcję \mathbf{v} . Z klasycznego twierdzenia Halásza (np. [27]) wynika, że jeśli \mathbf{u} nie udaje żadnego charakteru Archimedesesa (tj. $D(\mathbf{u}, n^{it}) = +\infty$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$), to $M(\mathbf{u}) = 0$.

Definicja 2.5.7. Funkcję \mathbf{u} nazywamy *pretensjonalną*, jeśli dla pewnych $t \in \mathbb{R}$ i charakteru Dirichleta χ mamy

$$D(\mathbf{u}, \chi \cdot n^{it})^2 = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(\mathbf{u}(p) \overline{\chi(p)} p^{-it})) < \infty.$$

Uwaga 2.5.8. Równoważnie, możemy w tej definicji zakładać, że χ jest pierwotnym charakterem Dirichleta.

Zauważmy, że w świetle (2.41), funkcja \mathbf{u} nie jest pretensjonalna, o ile $\|\mathbf{u}\|_B = 0$. Klasyczne twierdzenie Daboussiego-Delange'a [10] stanowi, że funkcje, które nie są pretensjonalne to dokładnie funkcje aperiodyczne, tzn. takie funkcje (mnożące), dla których średnia wzdłuż dowolnego postępu arytmetycznego równa jest 0. Przykładami funkcji aperiodycznych są funkcje $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ (patrz: przykład 2.5.3), a zatem nie są one pretensjonalne. Z drugiej strony, funkcja $\boldsymbol{\mu}^2$ jest pretensjonalna (zauważmy, że $D(\boldsymbol{\mu}^2, 1) < +\infty$).

Rozdział 3

O klasie automorfizmów rozłącznych z automorfizmami ergodycznymi

3.1 Przykłady elementów klasy Erg^\perp

Przypomnijmy, że przez Aut oznaczamy klasę wszystkich automorfizmów określonych na standardowych probabilistycznych przestrzeniach borelowskich. Interesuje nas klasa Erg^\perp automorfizmów rozłącznych ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi, tzn.

$$\text{Erg}^\perp := \{T \in \text{Aut}; T \perp R \text{ dla dowolnego automorfizmu ergodycznego } R\}.$$

Zauważmy, że powyższy zbiór jest niepusty, gdyż wszystkie identyczności standardowych przestrzeni borelowskich są (spektralnie) rozłączne z dowolnym automorfizmem ergodycznym. Poniżej podajemy klasyczny dowód faktu, że $\text{Id} \in \text{Erg}^\perp$.

Stwierdzenie 3.1.1. *Identyczności standardowych przestrzeni borelowskich są rozłączne ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi.*

Dowód. Rozważmy układ ergodyczny $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R)$ oraz układ $(Y, \mathcal{C}, \nu, \text{Id})$. Niech $\rho \in J(\text{Id}, R)$ oraz $h \in L^2_0(Z, \mathcal{D}, \kappa)$, $g \in L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Musimy pokazać, że

$$\int_{Y \times Z} g \otimes h \, d\rho = 0.$$

Z twierdzenia von Neumanna i ergodyczności automorfizmu R otrzymujemy, że

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h \circ R^n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^2(Z, \kappa)} 0.$$

Ponieważ przestrzeń $L^2(Z, \kappa)$ traktować możemy jako podprzestrzeń przestrzeni $L^2(Y \times Z, \rho)$ (rzut ρ na drugą współrzędną daje κ), więc powyższa zbieżność zachodzi również w $L^2(Y \times Z, \rho)$, tzn.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_Y \otimes (h \circ R^n) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^2(Y \times Z, \rho)} 0.$$

Zatem

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{Y \times Z} g \otimes (h \circ R^n) d\rho \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (3.1)$$

gdyż mocna zbieżność implikuje słabą zbieżność. Zauważmy, że dla dowolnego $N \geq 1$ mamy

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{Y \times Z} (g \otimes h) \circ (\text{Id} \times R)^n d\rho = \int_{Y \times Z} g \otimes h d\rho,$$

co razem z (3.1) kończy dowód. \square

Znanym nietrywialnym, tzn. różnym od identyczności, przykładem automorfizmu należącego do klasy Erg^\perp jest odwzorowanie $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \ni (x, y) \xrightarrow{T} (x, x + y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ (przez $\mathbb{T} = [0, 1)$ oznaczamy okrąg addytywny) rozważane z miarą $\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}$, gdzie μ jest miarą ciągłą (bezatomową) na \mathbb{T} . Istotnie, niech $R \in \text{Aut}(Z, \mathcal{D}, \kappa)$ będzie automorfizmem ergodycznym oraz niech $\rho \in J(T, R)$. Niech

$$\rho = \int_X \rho_x d\mu(x) \quad (3.2)$$

będzie dezintegracją miary ρ nad pierwszą współrzędną. Wówczas dla μ -p.w. $x \in \mathbb{T}$ (patrz: (2.19)) mamy $\rho_x \in J(T_x, R)$, gdzie $T_x(y) = x + y$ są automorfizmami ergodycznymi z dyskretnym widmem z grupą wartości własnych równą $\{e^{2\pi i n x}; n \in \mathbb{Z}\}$ (wystarczy rozpatrywać x niewymierne). Zauważmy, że zbiór tych $x \in \mathbb{T}$, że automorfizmy T_x i R posiadają wspólną nietrywialną wartość własną jest przeliczalny (automorfizm R ma przeliczalnie wiele wartości własnych), a więc w szczególności μ -miary zero. Zatem, na mocy twierdzenia 2.3.76, $T_x \perp R$ dla μ -p.w. $x \in \mathbb{T}$, co w połączeniu z (3.2) implikuje, że $T \perp R$.

Uwaga 3.1.2. W lemacie 2.4.7 dowodzimy, że $\alpha \in \mathbb{S}^1$ jest wartością własną automorfizmu T wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wartością własną dla zbioru włókien \bar{x} dodatniej miary $\bar{\mu}$. W szczególności, jeśli istnieje $\alpha \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ takie, że α jest wartością własną dla zbioru włókien \bar{x} dodatniej miary $\bar{\mu}$, to

$$\begin{aligned} & \text{automorfizm } T \text{ ma } \alpha \text{ jako wartość własną} \\ & \text{i stąd automorfizm } T \text{ nie jest elementem klasy } \text{Erg}^\perp, \end{aligned} \quad (3.3)$$

patrz: wniosek 2.4.8 oraz uwaga 2.4.9. Wynika stąd, że automorfizm $(x, y) \mapsto (x, x + y)$ (dla bezatomowej miary μ) nie ma nietrywialnych wartości własnych.

Pokażmy jeszcze, że identyczności mają silniejszą własność rozłączności niż tylko rozłączność z układami ergodycznymi.

Stwierdzenie 3.1.3. *Identyczności (probabilistycznych) standardowych przestrzeni borelowskich są mnożnikami klasy Erg^\perp .*

Dowód. Rozważmy układ ergodyczny $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R)$ oraz układ $(Y, \mathcal{C}, \nu, \text{Id})$ i niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T) \in \text{Erg}^\perp$. Niech $\eta \in J(T, \text{Id}, R)$ i ustalmy funkcje rzeczywiste $f \in L^2(X, \mu)$, $g \in L^2(Y, \nu)$ oraz $h \in L_0^2(Z, \kappa)$. Chcemy pokazać, że

$$\int_{X \times Y \times Z} f \otimes g \otimes h \, d\eta = 0,$$

gdyż wówczas $\eta = \eta|_{X \times Y} \otimes \kappa$. Niech $f = f_1 + f_2$, gdzie $f_1 \circ T = f_1$ oraz $f_2 \perp L^2(\mathcal{I}_T)$. Wówczas oczywiście $\eta|_{Y \times Z} = \nu \otimes \kappa$ oraz (na mocy założenia $T \perp R$)

$$\eta|_{X \times Z} = \mu \otimes \kappa. \quad (3.4)$$

Mamy ponadto

$$\int f \otimes g \otimes h \, d\eta = \int f_1 \otimes g \otimes h \, d\eta + \int f_2 \otimes g \otimes h \, d\eta. \quad (3.5)$$

Zauważmy, że miara spektralna (w $L^2(X \times Y \times Z, \eta)$) funkcji $f_1 \otimes g$ jest równoważna mierze Diraca δ_1 (bo ta funkcja jest niezmiennicza), natomiast miara σ_h nie może mieć atomu w 1, gdyż automorfizm R jest ergodyczny. Zatem $\sigma_{f_1 \otimes g} \perp \sigma_h$, co implikuje $f_1 \otimes g \perp h$ w $L^2(\eta)$, a więc pierwszy składnik po prawej stronie równości (3.5) znika. Z drugiej strony, ze względu na (3.4), $\int f_2 \otimes h \, d\eta = 0$, a co więcej mamy

$$\sigma_{f_2 \otimes h} = \sigma_{f_2} * \sigma_h.$$

Przypuśćmy, że $\sigma_{f_2 \otimes h}$ ma atom w 1. Jest to możliwe jedynie, gdy miary σ_{f_2} i σ_h , odpowiednio, mają atomy w c i \bar{c} (dla pewnej liczby $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$), przy czym $c \neq 1$, gdyż automorfizm R jest ergodyczny. Ale również c musi być wartością własną automorfizmu R . To jednak oznacza, że automorfizmy T i R nie mogą być rozłączne (bo mają nietrywialny wspólny faktor), sprzeczność. Zatem miara $\sigma_{f_2 \otimes h}$ nie ma atomu w 1 i wobec tego $f_2 \otimes h \perp g$, a zatem lewa strona równości w (3.5) równa się zero, co kończy dowód. \square

3.2 Twierdzenie charakterystyczne

W całym podrozdziale zakładamy, że $T : (\bar{x}, u) \mapsto (\bar{x}, T_{\bar{x}}(u))$ jest automorfizmem działającym na przestrzeni

$$X = \bigsqcup_{n \geq 1} \bar{X}_n \times \{1, \dots, n\} \sqcup \bar{X}_\infty \times Y,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mu|_{\bar{X}_n \times \{1, \dots, n\}} &= (\bar{\mu}|_{\bar{X}_n}) \otimes \nu_n, \\ \mu|_{\bar{X}_\infty \times Y} &= (\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty}) \otimes \nu, \end{aligned}$$

a automorfizmy $T_{\bar{x}}$ są ergodyczne, porównaj z podrozdziałem 2.3.4.

Naszym celem jest udowodnienie następującego rezultatu:

Twierdzenie 3.2.1. *Następujące warunki są równoważne:*

1. $T \in \text{Erg}^\perp$.
2. Rozszerzenie $T \rightarrow \text{Id}_{\bar{X}}$ jest domknięte.
3. Dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -prawie wszystkich $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$, mamy $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}$.

Wniosek 3.2.2. *Jeśli $T \in \text{Erg}^\perp$, to $h(T) = 0$.*

Dowód. Automorfizmy ergodyczne o dodatniej entropii nie są rozłączne na mocy twierdzenia Sinai'a (np. [12], Chapter 4.5) - uwagę tę stosujemy do automorfizmów włóknowych. \square

Wniosek 3.2.3. *Jeśli istnieje automorfizm $S \in \text{Erg}$ taki, że $\{T_{\bar{x}}; \bar{x} \in \bar{X}\} \subset S^\perp$, to $T \not\perp \text{Erg}$.*

Dowód. Jeśli miara $\bar{\mu}$ ma atom, tzn. istnieje $\bar{x}_0 \in \bar{X}$ takie, że $\bar{\mu}(\bar{x}_0) > 0$, to również $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}(\{(\bar{x}_0, \bar{x}_0)\}) > 0$. Zatem z warunku 3. w twierdzeniu 3.2.1 wynika, że $T \not\perp \text{Erg}$. Jeśli zaś miara $\bar{\mu}$ nie ma atomów i $T \perp \text{Erg}$, to żadna podrodzina przeliczalna $\{T_{\bar{x}_j}; j \geq 1\}$ parami rozłącznych automorfizmów nie jest maksymalna (z wniosku 3.2.6 wynika, że zbiór $\{(\bar{x}, \bar{x}'); T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}\}$ jest mierzalny, skąd na mocy twierdzenia Fubinięgo, dla p.k. \bar{x} , zbiór tych \bar{x}' , dla których $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}$, ma również pełną miarę). Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika stąd, że istnieje podrodzina nieprzeliczalna zawarta w $\{T_{\bar{x}}; \bar{x} \in \bar{X}\}$ automorfizmów parami rozłącznych i wystarczy użyć lematu 2.3.54. \square

3.2.1 Dowód 2. \Rightarrow 1.

Dowód wynika z twierdzenia 2.3.87, ponieważ klasycznie $\text{Id} \in \text{Erg}^\perp$.

3.2.2 Dowód 3. \Rightarrow 2.

Założmy, że $\rho \in J_2(T)$, $\rho|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. Wówczas dezintegracja miary ρ nad $\bar{X} \times \bar{X}$ ma postać

$$\rho = \int_{\bar{X} \times \bar{X}} \rho_{\bar{x}, \bar{x}'} d\bar{\mu}(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}'),$$

gdzie dla $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X}_m \times \bar{X}_n$, miara $\rho_{\bar{x}, \bar{x}'}$ jest $T_{\bar{x}} \times T_{\bar{x}'}$ -niezmiennicza i określona na:

- $\{(\bar{x}, \bar{x}')\} \times \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, jeśli $m, n \in \mathbb{N}$;
- $\{(\bar{x}, \bar{x}')\} \times \{1, \dots, m\} \times Y$, gdy $m \in \mathbb{N}$, $n = \infty$;
- $\{(\bar{x}, \bar{x}')\} \times Y \times Y$, jeśli $m = n = \infty$.

Ponadto $\rho = \sum_{m,n \in \mathbb{N} \cup \infty} \rho|_{X_m \times X_n}$, gdzie

$$\rho|_{X_m \times X_n} = \int_{\bar{X}_m \times \bar{X}_n} \rho_{\bar{x}, \bar{x}'} d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_m})(\bar{x}) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_n})(\bar{x}').$$

Rozważmy przypadek $m = n = \infty$ (w pozostałych przypadkach dowód przebiega analogicznie). Dla $A \in \mathcal{B}_{\bar{X}_\infty}$ i $B \in \mathcal{B}_Y$ mamy

$$\begin{aligned} \left((\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty}) \otimes \nu \right) (A \times B) &= (\rho|_{X_\infty \times X_\infty})(A \times B \times \bar{X}_\infty \times Y) = \\ &= \int_{A \times \bar{X}_\infty} \rho_{\bar{x}, \bar{x}'}(B \times Y) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podstawiając $A = \bar{X}_\infty$, najpierw otrzymujemy, że miara

$$B \mapsto \int \rho_{\bar{x}, \bar{x}'}(B \times Y) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}')$$

jest równa ν , przy czym miary podcałkowe są $T_{\bar{x}}$ -niezmiennicze. Ponieważ układ $(T_{\bar{x}}, \nu)$ jest ergodyczny, więc otrzymujemy, że $\rho_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'})$. Ale $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$, więc $\rho_{\bar{x}, \bar{x}'} = \nu \otimes \nu$ i stąd $\rho|_{X_\infty \times X_\infty}$ jest miarą produktową. \square

Uwaga 3.2.4. Zauważmy, że przy założeniu 3., musimy mieć $\bar{\mu}(\bar{X}_n) = 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Istotnie, dla $2 \leq n < \infty$, mamy $T_{\bar{x}} = R_n$ dla wszystkich $\bar{x} \in \bar{X}_n$.

Uwaga 3.2.5. Rozumowanie w powyższym dowodzie można odwrócić. Istotnie, wracając do (3.6), otrzymujemy, że jeśli

$$\bar{X}_\infty \times \bar{X}_\infty \ni (\bar{x}, \bar{x}') \mapsto \rho_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'}) \text{ jest mierzalne,}$$

to $\rho \in J_2(T|_{X_\infty})$, gdyż

$$\begin{aligned} & \int_{A \times \bar{X}_\infty} \rho_{\bar{x}, \bar{x}'}(B \times Y) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}') = \\ &= \int_{A \times \bar{X}_\infty} \nu(B) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}) d(\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty})(\bar{x}') = \left((\bar{\mu}|_{\bar{X}_\infty}) \otimes \nu \right) (A \times B). \end{aligned}$$

Podobny argument działa dla pozostałych elementów $J(T|_{X_m}, T|_{X_n})$.

3.2.3 Twierdzenie Kallmana i połączenia

Z (2.10), stwierdzenia 2.3.72, uwagi 2.3.74 i uwagi 2.3.73 natychmiast otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 3.2.6. (i) Zbiór $\{(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}; T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}\}$ jest borelowski.

(ii) Jeśli $S_0 \in \text{Aut}(Y, \nu)$ (lub $S_0 \in \text{Aut}(\{1, \dots, m\}, \nu_m)$, $m \geq 1$), to zbiór

$$\{\bar{x} \in \bar{X}; T_{\bar{x}} \perp S_0\}$$

jest borelowski.

Z twierdzenia Kallmana otrzymujemy poniższy lemat.

Lemat 3.2.7. *Ustalmy $S_0 \in \text{Aut}(Y, \nu)$ (lub $S_0 \in \text{Aut}(\{1, \dots, m\}, \nu_m)$, $m \geq 1$) i załóżmy, że $\bar{\mu}(\{\bar{x} \in \bar{X}; T_{\bar{x}} \perp S_0\}) > 0$. Wtedy $T \perp S_0$.*

Dowód. Połóżmy

$$C_2(Y, \nu) := \{J : L^2(Y, \nu) \mapsto L^2(Y, \nu); J \text{ jest operatorem Markowa}\},$$

tzn. niech $C_2(\nu)$ będzie przestrzenią operatorów Markowa odpowiadających samo-połączeniom miary ν . Przypomnijmy, że wtedy $C_2(Y, \nu)$ jest zwartą przestrzenią metryczną (ze słabą topologią operatorową).

Niech Π oznacza operator Markowa odpowiadający mierze produktowej $\nu \otimes \nu$ i rozważmy zbiór

$$\{(\bar{x}, T_{\bar{x}}, J); \bar{x} \in \bar{X}, \Pi \neq J \in C_2(Y, \nu), JT_{\bar{x}} = S_0J\}, \quad (3.7)$$

który jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $(\bar{X} \times \text{Aut}(Y, \nu)) \times C_2(Y, \nu)$ jako część wspólna zbiorów

$$\{(\bar{x}, T_{\bar{x}}); \bar{x} \in \bar{X}\} \times (C_2(Y, \nu) \setminus \{\Pi\})$$

i

$$\bar{X} \times \{(R, J) \in \text{Aut}(Y, \nu) \times C_2(Y, \nu); JR = S_0J\}.$$

Niech f oznacza rzut zbioru (3.7) na pierwsze dwie współrzędne. Zauważmy, że obraz ten to dokładnie zbiór $\{(\bar{x}, T_{\bar{x}}); T_{\bar{x}} \perp S_0\}$. Dla każdego takiego $(\bar{x}, T_{\bar{x}})$, włókno składa się ze wszystkich operatorów Markowa $J \in C_2(Y, \nu) \setminus \{\Pi\}$ takich, że $JT_{\bar{x}} = S_0J$, więc jest to zbiór zwarty z dokładnością do jednoelementowego zbioru $\{\Pi\}$, a zatem jest on σ -zwarty. Możemy teraz użyć twierdzenia 2.1.9, aby otrzymać borelowskie odwzorowanie

$$\{\bar{x} \in \bar{X}; T_{\bar{x}} \perp S_0\} \ni \bar{x} \rightarrow J_{\bar{x}} \in C_2(Y, \nu) \setminus \{\Pi\}$$

spełniające $J_{\bar{x}}T_{\bar{x}} = S_0J_{\bar{x}}$, co dokładnie oznacza, że operator $J_{\bar{x}}$ wyznacza połączenie automorfizmów $T_{\bar{x}}$ i S_0 . Zakładamy jednak, że $\bar{\mu}(\{\bar{x} \in \bar{X}; T_{\bar{x}} \perp S_0\}) > 0$, więc otrzymujemy nietrywialne połączenie między automorfizmami T i S_0 jak w podrozdziale 2.3.7, patrz: (2.20). \square

3.2.4 Dowód 1. \Rightarrow 3.

(Przez kontrapozycję.) Zakładamy, że $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}(\{(\bar{x}, \bar{x}'); T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}\}) > 0$.¹ Na mocy twierdzenia Fubniego, istnieje $\bar{x}_0 \in \bar{X}$ taki, że zbiór D tych punktów \bar{x}' spełniających $T_{\bar{x}_0} \perp T_{\bar{x}'}$, jest dodatniej $\bar{\mu}$ -miary. Z lematu 3.2.7 wynika, że $T \perp T_{\bar{x}_0}$, a zatem $T \notin \text{Erg}^\perp$.

¹Zbiór, który rozważamy, jest mierzalny na mocy (i) we wniosku 3.2.6.

3.2.5 Przykłady

Wiele naturalnych przykładów automorfizmów należących do klasy Erg^\perp można otrzymać rozpatrując potoki (tzn. zachowujące miarę działania grupy \mathbb{R}). Mianowicie rozpatrzmy potok $\mathcal{T} = (T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ określony na probabilistycznej przestrzeni standardowej (Y, \mathcal{B}_Y, ν) . Zakładamy zatem, że $T_t \in \text{Aut}(Y, \nu)$, $T_{t+t'} = T_t \circ T_{t'}$ dla $t, t' \in \mathbb{R}$ oraz odwzorowanie $(t, y) \mapsto T_t y$ jest mierzalne. Połóżmy

$$T(t, y) := (t, T_t y) \text{ na przestrzeni } ([0, 1) \times Y, \text{Leb}_{[0,1)} \otimes \nu). \quad (3.8)$$

Na mocy twierdzenia 3.2.1, używając Theorem 8.4 [18] oraz Theorem 1.1 z [34], otrzymujemy następujący:

Wniosek 3.2.8. *Automorfizm (3.8) należy do klasy Erg^\perp , o ile:*

(i) *potok \mathcal{T} ma widmo singularne;*

(ii) *potok \mathcal{T} jest nietrywialną, gładką zamianą czasu potoku horocykli (wszystkie takie automorfizmy mają przeliczalnie krotne widmo Lebesgue'a).*

Zauważmy, że nasz klasyczny przykład na \mathbb{T}^2 , $(x, y) \mapsto (x, x+y)$, jest szczególnym przypadkiem sytuacji rozpatrywanej w (i) w powyższym wniosku.

3.3 Mnożniki klasy Erg^\perp

Przykład 3.3.1. Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią metryczną. Niech $T : X \times \mathbb{T} \rightarrow X \times \mathbb{T}$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $T(x, y) = (x, y + \beta(x))$, gdzie $\beta : X \rightarrow \mathbb{T}$ jest odwzorowaniem mierzalnym. Załóżmy, że $\mu \in \mathcal{M}(X)$ jest miarą na przestrzeni X taką, że dla dowolnego $z \in \mathbb{T}$ mamy

$$\mu(\{x \in X; \beta(x) = z\}) = 0. \quad (3.9)$$

W szczególności miara μ jest ciągła. Mamy $T \in \text{Aut}(X \times \mathbb{T}, \mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}})$. Zauważmy, że skoro dla każdego $\alpha \in \mathbb{T}$ istnieje tylko przeliczalnie wiele nierozłącznych z nim obrotów (niewymiernych), więc zachodzi 3. z twierdzenia 3.2.1, a zatem $T \in \text{Erg}^\perp$.

Pokażemy że układ $(X \times \mathbb{T}, \mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}, T)$ nie jest mnożnikiem klasy Erg^\perp .

Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i na przestrzeni $X \times \mathbb{T}$ rozważmy automorfizm

$$R(x, z) = (x, z + \beta(x) + \alpha),$$

k który również zachowuje miarę $\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}$. Wówczas automorfizm R także spełnia warunki 3. z twierdzenia 3.2.1 i stąd $R \in \text{Erg}^\perp$. Rozważmy odwzorowanie P działające na $X \times \mathbb{T}^2$ określone wzorem

$$P(x, y, z) = (x, y + \beta(x), z + \beta(x) + \alpha).$$

Łatwo zauważyć, że P jest automorfizmem przestrzeni $(X \times \mathbb{T}^2, \mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}})$. Co więcej, możemy traktować miarę $\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}$ jako miarę na przestrzeni $(X \times \mathbb{T})^2$ (z dokładnością do permutacji współrzędnych), a mianowicie

$$\left(\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}\right)(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) = \mu(A_1 \cap A_3) \text{Leb}_{\mathbb{T}}(A_2) \text{Leb}_{\mathbb{T}}(A_4),$$

gdzie $A_1, A_3 \in \mathcal{B}_X$ oraz $A_2, A_4 \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$. Innymi słowy, rozważamy relatywnie niezależne rozszerzenie nad wspólnym faktorem (automorfizmów T i R) na pierwszej współrzędnej, który jest identycznością na przestrzeni X . Zauważmy, że wówczas mamy

$$\left(\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}\right)(\{(x, y, x, z); x \in X, y, z \in \mathbb{T}\}) = 1,$$

a rozważana przez nas miara jest $T \times R$ -niezmiennicza, więc łatwo zauważyć, że jest to połączenie automorfizmów T i R , tzn., automorfizm P jest połączeniem automorfizmów T i R . Ponadto zauważmy, że układ $(X \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}, P)$ ma obrót α jako faktor. Rzeczywiście, rozważmy odwzorowanie $\pi : (X \times \mathbb{T}^2, \mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}) \rightarrow (\mathbb{T}, \text{Leb}_{\mathbb{T}})$ dane wzorem $\pi(x, y, z) = z - y$. Wtedy mamy

$$\pi(P(x, y, z)) = \pi(x, y + \beta(x), z + \beta(x) + \alpha) = z - y + \alpha$$

i

$$R_{\alpha}(\pi(x, y, z)) = R_{\alpha}(z - y) = z - y + \alpha,$$

gdzie R_{α} oznacza obrót ergodyczny o α na \mathbb{T} . W szczególności, biorąc pod uwagę (3.3), automorfizm $T \times R$ z miarą $\mu \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}$ nie jest elementem Erg^{\perp} .

Przechodzimy teraz do kolejnego, jednego z głównych rezultatów rozprawy.

Twierdzenie 3.3.2. *Mamy $\text{ID} = \mathcal{M}(\text{Erg}^{\perp})$.*

Zatem chcemy pokazać, że jeśli składowe ergodyczne automorfizmu są nietrywialne (nie są jednopunktowe), to automorfizm ten nie może być mnożnikiem klasy Erg^{\perp} . Jednym z kluczowych kroków w dowodzie tego ogólnego faktu będzie udowodnienie ważnego przypadku szczególnego, a mianowicie sytuacji, w której wszystkie składowe ergodyczne rozpatrywanego układu są słabo mieszające.

Dla każdej probabilistycznej przestrzeni standardowej (X, \mathcal{B}_X, μ) rozważamy *flip* $R = R_X : X \times X \rightarrow X \times X$ dany przez

$$R(x, y) := (y, x).$$

Należy zauważyć, że R zachowuje miarę $\mu \otimes \mu$ i dla każdego $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ mamy

$$R \in C(T \times T, \mu \otimes \mu). \quad (3.10)$$

Automorfizm R posłuży jako narzędzie do tworzenia faktorów ergodycznych odpowiednio skonstruowanych samopołączeń rozpatrywanych układów. Dlatego najpierw udowodnimy kilka pomocniczych lematów dotyczących rozpatrywanego flipu R_X .

Lemat 3.3.3. *Niech $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ będzie układem słabo mieszającym. Wówczas układ $(X \times X, (T \times T) \circ R_X, \mu \otimes \mu)$ również jest słabo mieszający.*

Dowód. Ponieważ T jest automorfizmem słabo mieszającym, więc również automorfizm T^2 (z miarą μ) jest słabo mieszający. Stąd układ $(X \times X, T^2 \times T^2, \mu \otimes \mu)$ jest słabo mieszający. Teza wynika teraz z (3.10), gdyż mamy

$$((T \times T) \circ R)^2 = T^2 \times T^2.$$

□

Lemat 3.3.4. *Niech $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$ i $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu, S)$ będą dwoma układami słabo mieszającymi takimi, że*

$$(T \times T, \mu \otimes \mu) \perp (S \times S, \nu \otimes \nu).$$

Wtedy

$$((T \times T) \circ R_X, \mu \otimes \mu) \perp ((S \times S) \circ R_Y, \nu \otimes \nu).$$

Dowód. Niech $\rho \in J((T \times T) \circ R_X, (S \times S) \circ R_Y)$. Pokażemy, że $\rho = (\mu \otimes \mu) \otimes (\nu \otimes \nu)$. Rzeczywiście, ponieważ

$$\rho \in J(((T \times T) \circ R_X)^2, ((S \times S) \circ R_Y)^2) = J((T \times T)^2, (S \times S)^2),$$

więc

$$\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}((T \times T) \times (S \times S))_*\rho \in J(T \times T, S \times S),$$

a zatem rozłączność $T \times T \perp S \times S$ (z odpowiednimi miarami produktowymi) implikuje, że

$$\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}((T \times T) \times (S \times S))_*\rho = (\mu \otimes \mu) \otimes (\nu \otimes \nu).$$

Zauważmy jednak, że występujące po obu stronach powyższej równości miary ρ , $((T \times T) \times (S \times S))_*\rho$ oraz $(\mu \otimes \mu) \otimes (\nu \otimes \nu)$ są $(T \times T)^2 \times (S \times S)^2$ -niezmiennicze, a dodatkowo automorfizm $((T \times T)^2 \times (S \times S)^2, (\mu \otimes \mu) \otimes (\nu \otimes \nu))$ jest ergodyczny. Zatem

$$\rho = ((T \times T) \times (S \times S))_*\rho = (\mu \otimes \mu) \otimes (\nu \otimes \nu),$$

co kończy dowód. □

Teraz możemy przejść do dowodu przypadku, gdy włókna są słabo mieszające.

Lemat 3.3.5. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ będzie elementem klasy Erg^\perp takim, że prawie każda składowa ergodyczna jest słabo mieszająca i nie jest układem jednopunktowym. Wtedy $T \notin \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$.*

Dowód. Rozważmy automorfizm $T \in \text{Erg}^\perp$ taki, że prawie każda jego składowa ergodyczna jest słabo mieszająca i nie jest układem jednopunktowym. Przypuśćmy, że $T \in \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$. Niech

$$\mu = \int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne automorfizmu T . Niech miara $\tilde{\mu} \in J_2(T, \mu)$ będzie dana przez

$$\tilde{\mu} = \int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}). \quad (3.11)$$

Ponieważ dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \overline{X}$ automorfizmy $(T_{\bar{x}}, \mu_{\bar{x}})$ są słabo mieszające, więc (3.11) jest rozkładem na składowe ergodyczne automorfizmu $(T \times T, \tilde{\mu})$.

Zauważmy, iż założenia nałożone na składowe ergodyczne implikują, że

$$\tilde{\mu}(\{(x, x); x \in X\}) = 0. \quad (3.12)$$

Rozważmy flip $R = R_X$. Ponieważ automorfizm R zachowuje miarę $\mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}}$ dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \overline{X}$, więc mamy, że miara $\tilde{\mu}$ jest również $(T \times T) \circ R$ -niezmiennicza. Ponadto z lematu 3.3.3 wynika, że $\bar{\mu}$ -p.w. układy $((T \times T) \circ R, \mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}})$ są ergodyczne, a zatem (3.11) zadaje rozkład na składowe ergodyczne automorfizmu $((T \times T) \circ R, \tilde{\mu})$. Jako konsekwencję lematu 2.3.91 otrzymujemy, że

$$(T \times T, \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp) \subset \text{Erg}^\perp. \quad (3.13)$$

W szczególności, z twierdzenia 3.2.1, mamy

$$(T \times T, \mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}}) \perp (T \times T, \mu_{\bar{y}} \otimes \mu_{\bar{y}})$$

dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{X}^2$. Stąd, na mocy lematu 3.3.4 (zastosowanego do $T = S$ oraz $\mu = \mu_{\bar{x}}, \nu = \mu_{\bar{y}}$), otrzymujemy

$$((T \times T) \circ R, \mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}}) \perp ((T \times T) \circ R, \mu_{\bar{y}} \otimes \mu_{\bar{y}})$$

dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{X} \times \overline{X}$. Ponownie na mocy twierdzenia 3.2.1 mamy, że automorfizm $((T \times T) \circ R, \tilde{\mu}) \in \text{Erg}^\perp$.

Zauważmy, że pod- σ -algebra \mathcal{I}_R (zbiorów R -niezmiennicznych) jest faktorem zarówno automorfizmu $T \times T$, jak i automorfizmu $(T \times T) \circ R$. Stąd możemy rozważyć odpowiadające mu relatywnie niezależne rozszerzenie

$$\rho_{\mathcal{I}(R)} \in J((T \times T, \tilde{\mu}), ((T \times T) \circ R, \tilde{\mu})).$$

Należy zauważyć, że dla $\rho_{\mathcal{I}(R)}$ -p.w. $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in X^4$, mamy $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ lub $(x_1, x_2) = R(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$. Ponadto z (3.12), wynika, że $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$.

Rozważmy, określone $\rho_{\mathcal{I}(R)}$ -p.w. odwzorowanie $\varphi : (X \times X)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ zadane wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \\ 1, & \text{gdy } (x_1, x_2) = (y_2, y_1). \end{cases}$$

Niech odwzorowanie A będzie dodawaniem 1 modulo 2 na \mathbb{Z}_2 . Wówczas φ jest odwzorowaniem faktoryzującym pomiędzy automorfizmami $((T \times T) \times (T \times T) \circ R, \rho_{\mathcal{I}(R)})$ i obrotem ergodycznym $(\mathbb{Z}_2, \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1), A)$. Rzeczywiście, dla $\rho_{\mathcal{I}(R)}$ -p.w. (x_1, x_2, y_1, y_2) zachodzi

$$\begin{aligned} \varphi \circ ((T \times T) \times (T \times T) \circ R)(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \varphi(Tx_1, Tx_2, Ty_2, Ty_1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{gdy } (Tx_1, Tx_2) = (Ty_2, Ty_1), \\ 1, & \text{gdy } (Tx_1, Tx_2) = (Ty_1, Ty_2), \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x_1, x_2) = (y_2, y_1), \\ 1, & \text{gdy } (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \end{cases} \\ &= A \circ \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2). \end{aligned}$$

W związku z tym znaleźliśmy nietrywialne połączenie automorfizmów $(T \times T, \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$ (patrz: (3.13)) i $((T \times T) \circ R, \tilde{\mu}) \in \text{Erg}^\perp$, które ma (nietrywialny) obrót ergodyczny jako faktor. Jest to sprzeczne z faktem, iż połączenie to jest elementem klasy Erg^\perp .

□

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia 3.3.2, potrzebujemy jeszcze kilka faktów. W dowodach będziemy tylko wykorzystywali przestrzeń \bar{X}_∞ . Spowodowane jest to tym, że interesują nas automorfizmy $T \in \text{Erg}^\perp$, dla których nie mamy podprzestrzeni \bar{X}_n dla $2 \leq n < +\infty$. Ponadto, na mocy lematu 3.2.7 zastosowanego do automorfizmu S_0 równemu obrotowi ergodycznemu R_{z_0} na \mathbb{S}^1 (lub na odpowiedniej skończonej jego podgrupie), dla dowolnej ustalonej liczby $z_0 \in \mathbb{S}^1$, mamy

$$\bar{\mu}(\{\bar{x} \in \bar{X}_\infty; T_{\bar{x}} \text{ ma } z_0 \text{ jako swoją wartość własną}\}) = 0. \quad (3.14)$$

Najpierw pokażemy, iż używając twierdzenia 2.1.12, możemy w sposób mierzalny składowym ergodycznym przypisać wartość własną.

Lemat 3.3.6. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ i niech*

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie jego rozkładem na składowe ergodyczne. Załóżmy, że $\bar{\mu}$ -p.w. automorfizmy włóknowe nie są słabo mieszające (tj. posiadają nietrywialną wartość własną). Wówczas istnieje mierzalne odwzorowanie $F : \bar{X}_\infty \rightarrow L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$ (patrz: podrozdział 2.3.4) takie, że $F(\bar{x}) \in L^2_0(Y, \nu)$ jest funkcją własną o module 1 automorfizmu $T_{\bar{x}}$ dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}$.

Dowód. Niech $W \subset L^2_0(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie podzbiorem funkcji o module 1 (zauważmy, że wówczas W jest przestrzenią polską z topologią indukowaną z L^2). Niech H będzie multifunkcją, która każdemu automorfizmowi $T_{\bar{x}} := (T, \mu_{\bar{x}})$ (patrz: podrozdział 2.3.4) przypisuje zbiór $H(T_{\bar{x}}) \subset W$ jego funkcji własnych. Zauważmy, że jest

to zbiór domknięty. Rzeczywiście, założmy, że $f_n \rightarrow f \in L_0^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$, gdzie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji w $H(T_{\bar{x}})$. Wtedy funkcja f również ma moduł równy 1. Co więcej, wykorzystując zwartość zbioru \mathbb{S}^1 i ewentualnie przechodząc do podciągu, mamy również, że ciąg $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ odpowiadających wartości własnych zbiega do pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Łatwo sprawdzić, że f jest funkcją własną odpowiadającą wartości własnej λ .

Teraz udowodnimy, że odwzorowanie H jest słabo mierzalne (i wtedy możemy zastosować twierdzenie 2.1.12). Niech podzbiór $A \subset W$ będzie otwarty. Bez straty ogólności możemy założyć, że \bar{X}_∞ jest zwartą przestrzenią metryczną. Rozważmy odwzorowanie $\varphi_A : \bar{X}_\infty \times \mathbb{S}^1 \times A \rightarrow L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$, dane wzorem

$$\varphi_A(\bar{x}, \lambda, f) := f \circ T_{\bar{x}} - \lambda f.$$

Przypomnijmy, że dla $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$ mamy $T_{\bar{x}} \in \text{Aut}(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Stąd prawa strona powyższego wzoru jest elementem przestrzeni $L^2(Y, \mathcal{C}, \nu)$. Niech

$$\pi_1 : \bar{X}_\infty \times \mathbb{S}^1 \times A \rightarrow \bar{X}, \quad \pi_1(\bar{x}, \lambda, f) := \bar{x}$$

będzie rzutem na pierwszą współrzędną. Aby udowodnić słabą mierzalność odwzorowania H , musimy pokazać, że zbiór

$$\{\bar{x} \in \bar{X}_\infty; H(T_{\bar{x}}) \cap A \neq \emptyset\} = \pi_1(\varphi_A^{-1}(0))$$

jest mierzalny. Ponieważ odwzorowanie $\bar{x} \mapsto T_{\bar{x}}$ jest borelowskie, więc odwzorowanie φ_A również jest mierzalne. Zatem zbiór $\pi_1(\varphi_A^{-1}(0))$ jest analityczny,² a zatem mierzalny względem σ -algebry \mathcal{D} zbiorów $\bar{\mu}$ -mierzalnych. Pozostaje użyć twierdzenia 2.1.12 dla $\Omega = \bar{X}_\infty$ i $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. \square

Uwaga 3.3.7. Poniższy wynik jest bezpośrednio konsekwencją faktu, że klasa automorfizmów, których $\bar{\mu}$ -p.w. składowe ergodyczne mają dyskretne widmo, jest klasą charakterystyczną (patrz: [33]). Stąd dla automorfizmu T istnieje największy faktor należący do tej charakterystycznej klasy. Ponadto faktor ten rozważany na każdym włóknie \bar{x} jest faktorem Kroneckera automorfizmu $T_{\bar{x}}$ (patrz: [33], rozdział 2.3.1). Potrzebujemy jednak specjalnej postaci tego faktora, dlatego poniżej podajemy pełny dowód.

Lemat 3.3.8. *Niech automorfizm T spełnia założenia lematu 3.3.6. Wówczas istnieje nietrywialny faktor automorfizmu T , którego rozkład na składowe ergodyczne złożony jest z ergodycznych obrotów na okręgu.*

Dowód. Rozważmy odwzorowanie F z lematu 3.3.6. Zauważmy, że dla każdego $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$ odpowiadająca mu wartość własna $\varphi(\bar{x})$ jest równa $\frac{F(\bar{x}) \circ T_{\bar{x}}}{F(\bar{x})}$ (możemy zakładać, że $\varphi(\bar{x})$ jest niewymierne, patrz: (3.14)), stąd zależy w sposób mierzalny od \bar{x} .

²Podzbiór A przestrzeni polskiej X nazywamy *zbiorem analitycznym*, gdy istnieje przestrzeń polska Y oraz podzbiór borelowski $B \subset X \times Y$ takie, że zbiór A jest rzutem zbioru B na przestrzeń X ([44]). Równoważnie, A jest obrazem poprzez odwzorowanie ciągle pewnego podzbioru borelowskiego przestrzeni polskiej. Zbiór analityczny A jest *uniwersalnie mierzalny*, tzn. należy on do uzupełnienia σ -algebry \mathcal{B}_X względem dowolnej miary $\zeta \in \mathcal{M}(X)$.

Zatem, biorąc pod uwagę fakt, że odwzorowanie $\mathbb{S}^1 \ni \alpha \mapsto R_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{S}^1, \text{Leb}_{\mathbb{S}^1})$ jest ciągłe, otrzymujemy, że automorfizm $S \in \text{Aut}(\overline{X} \times \mathbb{S}^1, \overline{\mu} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{S}^1})$ dany wzorem

$$S(\bar{x}, r) := (\bar{x}, \varphi(\bar{x})r) \quad (3.15)$$

jest szukanym faktorem, a odwzorowanie faktoryzujące $\pi : \overline{X} \times Y \rightarrow \overline{X} \times \mathbb{S}^1$ jest dane przez

$$\pi(\bar{x}, y) = (\bar{x}, F(\bar{x})(y)).$$

□

Przed przejściem do dowodu twierdzenia 3.3.2 potrzebujemy jeszcze lematu mówiącego o mierzalności zbioru słabo mieszających składowych ergodycznych.

Lemat 3.3.9. *Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym oraz ustalmy miarę $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Niech*

$$\mu = \int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} d\overline{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne automorfizmu (T, μ) (patrz: podrozdział 2.3.4). Wówczas zbiór

$$\mathcal{WM} := \{\bar{x} \in \overline{X}; \text{automorfizm } (T_{\bar{x}}, \mu_{\bar{x}}) \text{ jest słabo mieszający}\}$$

jest mierzalny.

Dowód. Niech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie liniowo gęstą rodziną funkcji (o module 1) w $C(X)$ i ustalmy $f = f_n$. Przypomnijmy, że automorfizm ergodyczny jest słabo mieszający, jeśli nie ma on nietrywialnych wartości własnych (patrz: twierdzenie 2.3.14) lub, innymi słowy, wszystkie miary spektralne funkcji z L_0^2 są ciągłe. Przypomnijmy ponadto, że zgodnie z lematem 2.2.1, dla dowolnej miary $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, mamy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\hat{\sigma}(i)|^2 = \sum_{\alpha \text{ jest atomem } \sigma} \sigma^2(\{\alpha\}).$$

Wystarczy zatem pokazać, że powyższa granica równa się zero dla $\sigma = \sigma_{f-\int f d\mu, \mu}$. Zauważmy, że funkcja $H_N : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dana wzorem

$$H_N(\sigma) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\hat{\sigma}(i)|^2$$

jest ciągła zgodnie z definicją *-słabej zbieżności. Zatem funkcja $H : \mathcal{M}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dana wzorem

$$H(\sigma) := \lim_{N \rightarrow \infty} H_N(\sigma)$$

jest mierzalna jako punktowa granica funkcji ciągłych.

Zgodnie z uwagą 2.4.6 odwzorowanie $F : \mathcal{M}(X, T) \mapsto \mathcal{M}(\mathbb{T})$ jest ciągle (zauważmy, że $F = F(f)$). Ponadto zgodnie z własnościami dezintegracji miar, przypisanie $E : \bar{X} \rightarrow \mathcal{M}(X, T)$ dane przez $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}}$ jest również mierzalne. Zatem odwzorowanie $H \circ F \circ E$ jest mierzalne. Pozostaje zauważyć, że

$$\mathcal{WM} = \bigcap_{n \geq 1} (H \circ F(f_n) \circ E)^{-1}(\{0\}).$$

□

Dowód twierdzenia 3.3.2. Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T) \in \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$ i niech

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie jego rozkładem na składowe ergodyczne. Na mocy wniosku 2.4.8 mamy $\bar{\mu}(\bar{X}_1 \cup \bar{X}_\infty) = 1$. Pokażemy, że $\bar{\mu}(\bar{X}_1) = 1$. Założmy przez sprzeczność, że $\bar{\mu}(\bar{X}_\infty) > 0$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\bar{\mu}(\mathcal{WM}) > 0$, gdzie

$$\mathcal{WM} = \{\bar{x} \in \bar{X}_\infty; T_{\bar{x}} \text{ jest słabo mieszające}\}$$

(jest to zbiór mierzalny z lematu 3.3.9). Wtedy T można rozłożyć na rozłączne działanie dwóch automorfizmów \tilde{T} i \tilde{T}^* . Tutaj \tilde{T} oznacza ograniczenie automorfizmu T do sumy włókien odpowiadających \mathcal{WM} , tj. automorfizm \tilde{T} zachowuje miarę $\tilde{\mu}$, przy czym rozkład na składowe ergodyczne automorfizmu $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ ma postać

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\bar{\mu}(\mathcal{WM})} \int_{\mathcal{WM}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}),$$

zaś automorfizm \tilde{T}^* jest ograniczeniem automorfizmu T do sumy włókien odpowiadających $\bar{X} \setminus \mathcal{WM}$. Wówczas $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ spełnia założenia lematu 3.3.5 i w związku z tym nie jest mnożnikiem klasy Erg^\perp , tj. istnieje $S \in \text{Erg}^\perp$ i połączenie $\tilde{\eta} \in J(\tilde{T}, S)$ takie, że automorfizm $(\tilde{T} \times S, \tilde{\eta}) \notin \text{Erg}^\perp$. Teraz wystarczy połączyć \tilde{T}^* i S w sposób niezależny, aby uzyskać nietrywialne połączenie $\eta \in J(T, S)$ (patrz: (2.20)) takie, że $(T \times S, \eta) \notin \text{Erg}^\perp$, co jest sprzecznością z faktem, że $T \in \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$.

Możemy zatem założyć, że dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$ automorfizm $T_{\bar{x}}$ ma nietrywialną wartość własną. Niech

$$\mu_\infty := \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{X}_\infty)} \int_{\bar{X}_\infty} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}).$$

Wówczas, zgodnie z lematem 3.3.8, istnieje faktor \hat{T} automorfizmu (T, μ_∞) taki, że wszystkie składowe ergodyczne $\hat{T}_{\bar{x}}$ automorfizmu \hat{T} są obrotami na okręgu. Zauważmy, że dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{X}_\infty \times \bar{X}_\infty$ odpowiadające obroty są rozłączne w świetle twierdzenia 3.2.1. Wówczas automorfizm \hat{T} ma dokładnie postać z przykładu 3.3.1 (warunek (3.9) jest spełniony na mocy rozłączności $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{y}}$, a faktor \hat{T} ma postać (3.15) w dowodzie lematu 3.3.8), który nie jest w $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$.

Ponieważ $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$ jest klasą charakterystyczną (patrz: przykład 2.3.97 (7)), więc otrzymujemy, że automorfizm $(T, \mu_\infty) \notin \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$. Tak więc, ponownie łącząc obcięcie automorfizmu T do włókien w \overline{X}_1 w sposób niezależny, otrzymujemy, że $(T, \mu) \notin \mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$. Stąd $\overline{\mu}(\overline{X}_1) = 1$, co oznacza, że automorfizm T jest identycznością. To dowodzi, że $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp) \subset \text{ID}$. Przeciwna inkluzja wynika bezpośrednio ze stwierdzenia 3.1.3, co kończy dowód.

□

3.4 Produkty kartezjańskie w Erg^\perp

Jak pokazuje twierdzenie 3.3.2, klasa Erg^\perp nie jest zamknięta ze względu na branie dowolnych połączeń. Wynika to z wzajemnego oddziaływania automorfizmów włóknowych nad „wspólną” częścią składowych ergodycznych. Okazuje się, że zjawisko to nie może wystąpić, jeśli przestrzenie składowych ergodycznych są niezależne. W tym podrozdziale pokażemy, że klasa Erg^\perp jest jednak zamknięta ze względu na branie produktów kartezjańskich.

Twierdzenie 3.4.1. *Załóżmy, że $(X, \mathcal{B}, \mu, T), (Y, \mathcal{C}, \nu, S) \in \text{Erg}^\perp$. Wówczas*

$$(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu, T \times S) \in \text{Erg}^\perp.$$

Dowód. Niech $(Z, \mathcal{D}, \kappa, R)$ będzie dowolnym układem ergodycznym. Przypomnijmy najpierw, że wszystkie rozważane układy można traktować jako zachowujące miarę homeomorfizmy zwartych przestrzeni metrycznych. Powyższa obserwacja pozwala później wykorzystać lemat 2.4.5 w dowodzie (patrz (3.21): zbiór

$$\{\bar{x}; \alpha \text{ jest wartością własną automorfizmu } (T, \mu_{\bar{x}})\}$$

jest mierzalny na mocy lematu 2.4.5).

Na przestrzeni $X \times Y \times Z$ dla każdego $A \in \{X, Y, Z, X \times Y, X \times Z, Y \times Z\}$ przez $\pi^A : X \times Y \times Z \rightarrow A$ oznaczamy standardowy rzut na odpowiadające mu współrzędne. Rozważmy dowolne połączenie $\lambda \in J((T \times S, \mu \otimes \nu), (R, \kappa))$. Chcemy pokazać, że $\lambda = \mu \otimes \nu \otimes \kappa$.

Najpierw zauważmy, że $(\pi^{X,Z})_* \lambda = \mu \otimes \kappa$ i $(\pi^{Y,Z})_* \lambda = \nu \otimes \kappa$, gdyż $T, S \in \text{Erg}^\perp$. Niech

$$\mu = \int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} d\overline{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne miary μ dla automorfizmu T . Ponieważ σ -algebra $\mathcal{I}(T)$ jest również faktorem automorfizmu $(T \times S \times R, \lambda)$ i $(\pi^X)_* \lambda = \mu$, więc

$$\lambda = \int_{\overline{X}} \lambda_{\bar{x}} d\overline{\mu}(\bar{x}) \tag{3.16}$$

i $(\pi^X)_* \lambda_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}}$, $\overline{\mu}$ -p.w., z uwagi na jednoznaczność dezintegracji. Ponadto zauważmy, że

$$\mu \otimes \kappa = \left(\int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} d\overline{\mu}(\bar{x}) \right) \otimes \kappa = \int_{\overline{X}} \mu_{\bar{x}} \otimes \kappa d\overline{\mu}(\bar{x}).$$

Ponieważ $(\pi^{X,Z})_*\lambda = \mu \otimes \kappa$, więc ponownie wykorzystując jednoznaczność dezintegracji, otrzymujemy

$$(\pi^{X,Z})_*\lambda_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} \otimes \kappa \quad \bar{\mu}\text{-p.w.} \quad (3.17)$$

Analogicznie, ponieważ $(\pi^{X,Y})_*\lambda = \mu \otimes \nu$, więc mamy również

$$(\pi^{X,Y})_*\lambda_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} \otimes \nu \quad \bar{\mu}\text{-p.w.} \quad (3.18)$$

W szczególności, $(\pi^Y)_*\lambda_{\bar{x}} = \nu$. Zatem, na podstawie (3.17), mamy

$$\lambda_{\bar{x}} \in J((S, \nu), (T \times R, \mu_{\bar{x}} \otimes \kappa)) \quad \bar{\mu}\text{-p.w.}$$

Pozostaje pokazać, że

$$\bar{\mu}(\{\bar{x}; \text{automorfizm } (T \times R, \mu_{\bar{x}} \otimes \kappa) \text{ nie jest ergodyczny}\}) = 0. \quad (3.19)$$

Rzeczywiście, jeśli (3.19) zachodzi, to ponieważ $S \in \text{Erg}^\perp$, więc otrzymujemy, że

$$\lambda_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} \otimes \nu \otimes \kappa \quad \bar{\mu}\text{-p.w.,}$$

co razem z (3.16) daje $\lambda = \mu \otimes \nu \otimes \kappa$.

Aby pokazać (3.19), przypomnijmy najpierw, że automorfizm R może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele wartości własnych. Ponadto iloczyn kartezjański dwóch układów ergodycznych nie jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają one nietrywialną wspólną wartość własną. Wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnego ustalonego $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ mamy

$$\bar{\mu}(\{\bar{x}; \alpha \text{ jest wartością własną automorfizmu } (T, \mu_{\bar{x}})\}) = 0. \quad (3.20)$$

Załóżmy, że (3.20) nie zachodzi, to znaczy, że

$$\bar{\mu}(\{\bar{x}; \alpha \text{ jest wartością własną automorfizmu } (T, \mu_{\bar{x}})\}) > 0. \quad (3.21)$$

Następnie, zgodnie z lematem 2.4.7, α jest wartością własną automorfizmu T . Jest to sprzeczność z (3.3). W związku z tym udowodniliśmy (3.20),³ co z kolei kończy dowód twierdzenia. \square

Z powyższego wyniku (przez indukcję) otrzymujemy następujący:

Wniosek 3.4.2. *Jeśli $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów klasy Erg^\perp , to*

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i, \prod_{i=1}^{\infty} T_i \right) \in \text{Erg}^\perp.$$

³Można też było użyć lematu 3.2.7.

3.5 Automorfizm, którego samopołączenia są rozłączne z automorfizmami ergodycznymi. Mnożniki, a klasy charakterystyczne

Naszym celem w tym podrozdziale będzie konstrukcja automorfizmu, którego wszystkie samopołączenia dają elementy należące do Erg^\perp . Jednym z kluczowych elementów konstrukcji będzie wykorzystanie własności PID. Potrzebujemy następującego wyniku:

Twierdzenie 3.5.1 (Ryzhikov, 1994). *Założmy, że układ (X, \mathcal{B}, μ, T) ma własność PID oraz rozważmy automorfizmy $(Y_i, \mathcal{B}_i, \nu_i, S_i)$, $i = 1, 2$. Jeśli połączenie $\lambda \in J(T, S_1, S_2)$ rzutuje się jako miary produktowe na każdej parze współrzędnych, to*

$$\lambda = \mu \otimes \nu_1 \otimes \nu_2.$$

W dowodzie twierdzenia 3.5.3, użyjemy kilkakrotnie następującego wniosku z powyższego wyniku.

Wniosek 3.5.2. *Niech $n \geq 2$ i niech $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)$, $i = 1, \dots, n$, będą automorfizmami spełniającymi własność PID oraz rozważmy automorfizm (Y, \mathcal{C}, ν, S) . Jeśli połączenie $\lambda \in J(S, T_1, \dots, T_n)$ rzutuje się jako miary produktowe na każdej parze współrzędnych, to*

$$\lambda = \nu \otimes \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

Dowód. Do dowodu użyjemy indukcji. Dla $n = 2$ rezultat wynika bezpośrednio z twierdzenia 3.5.1. Załóżmy, że jest on prawdziwy dla pewnego $n \geq 2$. Udowodnimy, że wówczas wynik zachodzi również dla $n+1$. Niech połączenie $\lambda \in J(S, T_1, \dots, T_{n+1})$ będzie parami niezależne. Niech $\tilde{\lambda}$ będzie rzutem miary λ na $Y \times X_1 \times \dots \times X_n$ i niech $\bar{\lambda}$ będzie rzutem miary λ na przestrzeń $X_1 \times \dots \times X_{n+1}$. Na podstawie założenia indukcyjnego otrzymujemy, że

$$\tilde{\lambda} = \nu \otimes \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n \quad \text{i} \quad \bar{\lambda} = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{n+1}.$$

Teza wynika teraz z twierdzenia 3.5.1, biorąc $T := T_{n+1}$, $S_1 := S$ i $S_2 := T_1 \times \dots \times T_n$.

□

Głównym wynikiem tego podrozdziału jest następujące:

Twierdzenie 3.5.3. *Niech $T : X \rightarrow X$ będzie homeomorfizmem zwartej przestrzeni metrycznej X , zachowującym miarę μ . Niech*

$$\mu = \int_{\bar{X}} \mu_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$$

będzie rozkładem na składowe ergodyczne dla (T, μ) , gdzie $T_{\bar{x}}$ oznacza ergodyczne działanie automorfizmu T na włóknie odpowiadającym punktowi $\bar{x} \in \bar{X}$. Załóżmy, że $\bar{\mu}$ jest ciągłą miarą probabilistyczną oraz, że spełnione są następujące warunki:

- dla dowolnego punktu $\bar{x} \in \bar{X}$ istnieje zbiór $\bar{X}' \subset \bar{X}$, którego dopełnienie jest przeliczalne oraz dla dowolnego $\bar{y} \in \bar{X}'$ mamy $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{y}}$;
- dla dowolnych $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}$ jeśli $T_{\bar{x}} \not\perp T_{\bar{y}}$, to automorfizmy $T_{\bar{x}}$ i $T_{\bar{y}}$ są izomorficzne;
- dla każdego $\bar{x} \in \bar{X}$ automorfizm $(T_{\bar{x}}, \mu_{\bar{x}})$ ma własność MSJ (w szczególności ma własność PID).

Wtedy $(T^{\times\infty}, \eta) \in \text{Erg}^\perp$ dla każdego $\eta \in J_\infty(T, \mu)$.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $n \geq 1$ i dowolnego połączenia $\eta \in J_n(T, \mu)$ mamy $(T^{\times n}, \eta) \in \text{Erg}^\perp$. W przypadku $n = 1$ zauważmy, że ponieważ miara $\bar{\mu}$ jest ciągła, więc (dzięki naszemu założeniu rozłączności) dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{y}}$. Stąd, na mocy twierdzenia 3.2.1, otrzymujemy, że $T \in \text{Erg}^\perp$.

Niech $2 \leq n < \infty$, ustalmy $\eta \in J_n(T, \mu)$ i niech $(R, \kappa) \in \text{Erg}$ będzie dowolnym automorfizmem ergodycznym. Niech $\psi \in J((T^{\times n}, \eta), (R, \kappa))$. Chcemy pokazać, że $\psi = \eta \otimes \kappa$. Aby odróżnić n kopii przestrzeni X i przestrzeni składowych ergodycznych \bar{X} , oznaczamy odpowiednio przez X_k dziedzinę, zaś przez \bar{X}_k przestrzeń składowych ergodycznych automorfizmu T na k -tej współrzędnej dla każdego $k = 1, \dots, n$. Przypisujemy współrzędną $n+1$ do automorfizmu R , przy czym odpowiadający rzut na pierwsze n współrzędnych oznaczamy przez $\pi^{\mathbf{X}}$. Ponadto położmy $\mathbf{X} := X_1 \times \dots \times X_n$ i przez $\pi^{k_1, \dots, k_m} : \mathbf{X} \rightarrow X_{k_1} \times \dots \times X_{k_m}$ oznaczamy projekcję na współrzędne k_1, \dots, k_m . Rozważmy rozkład na składowe ergodyczne automorfizmu $(T^{\times n}, \eta)$, a więc

$$\eta = \int_{\bar{\mathbf{X}}} \eta_{\bar{\mathbf{x}}} d\bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Mamy zatem również następujący rozkład miary ψ :

$$\psi = \int_{\bar{\mathbf{X}}} \psi_{\bar{\mathbf{x}}} d\bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Z jednoznaczności rozkładu ergodycznego wynika, że $(\pi^{\mathbf{X}})_* \psi_{\bar{\mathbf{x}}} = \eta_{\bar{\mathbf{x}}}$, natomiast z ergodyczności automorfizmu R otrzymujemy $(\pi^{n+1})_* \psi_{\bar{\mathbf{x}}} = \kappa$. Zatem $\psi_{\bar{\mathbf{x}}} \in J((T^{\times n}, \eta_{\bar{\mathbf{x}}}), (R, \kappa))$ dla $\bar{\eta}$ -p.w. $\bar{\mathbf{x}}$. Aby pokazać, że $\psi = \eta \otimes \kappa$, musimy po prostu udowodnić, że

$$\psi_{\bar{\mathbf{x}}} = \eta_{\bar{\mathbf{x}}} \otimes \kappa \quad \text{dla } \bar{\eta}\text{-p.w. } \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathbf{X}}. \quad (3.22)$$

Zauważmy, że $\mathcal{I}(T^{\times n}, \eta) \supset \mathcal{I}(T) \otimes \dots \otimes \mathcal{I}(T)$ i niech $q : \bar{\mathbf{X}} \rightarrow \bar{X}_1 \times \dots \times \bar{X}_n$ będzie odpowiadającym odwzorowaniem faktoryzującym. Dla każdego $k = 1, \dots, n$ mamy $\mu = (\pi^k)_* \eta = \int_{\bar{\mathbf{X}}} (\pi^k)_* \eta_{\bar{\mathbf{x}}} d\bar{\eta}(\bar{\mathbf{x}})$. Tutaj miary $(\pi^k)_* \eta_{\bar{\mathbf{x}}}$ są T -niezmiennicze oraz ergodyczne. Stąd, z jednoznaczności rozkładu ergodycznego, dla $\bar{\eta}$ -a.e. $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathbf{X}}$ i dla każdego $k = 1, \dots, n$ mamy

$$(\pi^k)_* \psi_{\bar{\mathbf{x}}} = (\pi^k)_* \eta_{\bar{\mathbf{x}}} = \mu_{\bar{x}_k} \quad \text{dla pewnego } \bar{x}_k(\bar{\mathbf{x}}) = \pi^k(q(\bar{\mathbf{x}})) =: \bar{x}_k \in \bar{X}_k,$$

przy czym obrazem miary $\bar{\eta}$ poprzez odwzorowanie $\pi^k \circ q$ jest miara $\bar{\mu}$. Dlatego, ponieważ $\bar{\mu}$ jest ciągła, więc otrzymujemy, że dla każdego $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy

$$\bar{\eta} \left(\left\{ \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathbf{X}}; \mu_{\bar{x}_k} = \mu_{\bar{x}_k(\bar{\mathbf{x}})} = \mu_{\bar{x}} \text{ dla pewnego } k = 1, \dots, n \right\} \right) = 0. \quad (3.23)$$

W szczególności, ponieważ istnieje tylko przeliczalnie wiele składowych ergodycznych automorfizmu T izomorficznych z $\mu_{\bar{x}}$, to z (3.23) otrzymujemy, że dla każdego $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy

$$\bar{\eta}\left(\left\{\bar{x} \in \bar{X}; (T, \mu_{\bar{x}_k}) \text{ jest izomorficzny z } (T, \mu_{\bar{x}}) \text{ dla pewnego } k = 1, \dots, n\right\}\right) = 0. \quad (3.24)$$

Teraz, aby pokazać (3.22), rozważmy przypadki, które zależą od postaci $\eta_{\bar{x}}$. A dokładniej, rozważamy liczbę współrzędnych, na których rzut daje odwzorowania izomorficzne (przypomnijmy, że z założenia składowe ergodyczne są albo izomorficzne, albo rozłączne).

Przypadek 1: Brak składowych izomorficznych. Niech $\mathcal{D}_0 \subset \bar{X}$ będzie zbiorem elementów spełniających następujący warunek (przypomnijmy, że $\bar{x}_j = \pi^j(q(\bar{x}))$)

$$(T, \mu_{\bar{x}_1}), \dots, (T, \mu_{\bar{x}_n}) \text{ są parami rozłączne.} \quad (3.25)$$

Następnie, na mocy wniosku 3.5.2 i założenia o wzajemnej rozłączności, dla dowolnego $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$ otrzymujemy

$$\eta_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\bar{x}_n}. \quad (3.26)$$

Należy również zauważyć, że dla $\bar{\eta}$ -p.w. $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$ automorfizm (R, κ) jest rozłączny z automorfizmem $(T, \mu_{\bar{x}_k})$ dla każdego $k = 1, \dots, n$. Rzeczywiście, w przeciwnym razie dla pewnego $1 \leq k_0 \leq n$ mielibyśmy, że ⁴

$$\begin{aligned} \bar{\eta}\left(\left\{\bar{x} \in \bar{X}; (T, \mu_{\bar{x}_{k_0}}) \text{ i } (R, \kappa) \text{ nie są rozłączne}\right\}\right) &= \\ &= \bar{\mu}\left(\left\{\bar{x} \in \bar{X}; (T, \mu_{\bar{x}}) \text{ i } (R, \kappa) \text{ nie są rozłączne}\right\}\right) > 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z lematem 2.3.54 i założeniami twierdzenia, zbiór rozpatrywany powyżej może być co najwyżej przeliczalny. Jest to jednak sprzeczność z faktem, że miara $\bar{\mu}$ jest ciągła. Zatem dla $\bar{\eta}$ -p.w. $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$, automorfizm (R, κ) jest rozłączny z automorfizmem $(T, \mu_{\bar{x}_k})$ dla dowolnego $k = 1, \dots, n$. W szczególności, z (3.26), dla każdego takiego \bar{x} miara $\psi_{\bar{x}}$ rzutuje się na dowolną parę współrzędnych jako miara produktowa. Z wniosku 3.5.2 otrzymujemy, że

$$\psi_{\bar{x}} = \eta_{\bar{x}} \otimes \kappa,$$

dla $\bar{\eta}$ -p.w. $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$. To kończy dowód przypadku 1.

Przypadek 2: Istnieją składowe izomorficzne. Rozważmy teraz elementy $\bar{x} \in \bar{X}$ takie, że z dokładnością do permutacji współrzędnych istnieje $m < n$ i indeksy $0 = \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_{m-1} < \ell_m = n$ takie, że automorfizmy $(T, \mu_{\bar{x}_{\ell_{k-1}+1}}), \dots, (T, \mu_{\bar{x}_{\ell_k}})$ są izomorficzne dla dowolnego $k = 1, \dots, m$, a m jest najmniejszą liczbą o tej własności. Dla dowolnego $m = 1, \dots, n - 1$ oznaczmy przez $\mathcal{D}_m \subset \bar{X}$ zbiór elementów,

⁴Mierzalność zbiorów rozpatrywanych poniżej - patrz: podrozdział 2.3.10.

dla których istnieje dokładnie m grup indeksów w powyższym rozkładzie. Pokażemy, że ten przypadek redukuje się do przypadku 1.

Ustalmy $m = 1, \dots, n - 1$ i niech $\bar{x} \in \mathcal{D}_m$. Niech ℓ_0, \dots, ℓ_m będą liczbami określonymi jak wyżej. Ponieważ miara $\eta_{\bar{x}}$ jest ergodyczna, więc dla dowolnego $k = 1, \dots, m$, rzut $(\pi^{\ell_{k-1}+1, \dots, \ell_k})_* \eta_{\bar{x}}$ jest miarą ergodyczną dla odwzorowania $T^{\times(\ell_k - \ell_{k-1})}$ (z dokładnością do izomorfizmu jest to samopołączenie automorfizmu $(T, \mu_{\bar{x}_{\ell_k}})$). Ponadto przypominając, że automorfizm $(T, \mu_{\bar{x}})$ ma własność MSJ dla dowolnego $\bar{x} \in \bar{X}$, otrzymujemy, że miara

$(\pi^{\ell_{k-1}+1, \dots, \ell_k})_* \eta_{\bar{x}}$ jest produktem $r_k \leq \ell_k - \ell_{k-1}$ samopołączeń poza-diagonalnych.

Tak więc miara $\eta_{\bar{x}}$ jest w rzeczywistości połączeniem $r_1 + \dots + r_m$ automorfizmów, takich, że dowolne dwa z nich są albo rozłączne, albo izomorficzne. W tym ostatnim przypadku miara $\eta_{\bar{x}}$ rzutuje się na odpowiadające im współrzędne jako miara produktowa. Stąd, używając wniosku 3.5.2, otrzymujemy, że miara $\eta_{\bar{x}}$ jest połączeniem produktowym $r_1 + \dots + r_m$ składowych ergodycznych automorfizmu T . Innymi słowy, zredukowaliśmy problem do sytuacji, gdy (3.26) jest spełnione dla mniejszej liczby indeksów. Pozostała część dowodu przypadku 2. jest analogiczna do dowodu przypadku 1., biorąc $n := r_1 + \dots + r_m$. \square

Teraz skonstruujemy przykład, aby pokazać, że zbiór automorfizmów spełniających założenia twierdzenia 3.5.3 jest niepusty. W tym celu użyjemy klasycznej konstrukcji cięcia i układania⁵ (ang. *cutting and stacking*), która definiuje tzw. klasę układów rangi 1. Mamy następujący fakt, który jest szczególnym przypadkiem wyników Gao i Hilla [20] oraz Danilenki [8].

Stwierdzenie 3.5.4. *Niech $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ będzie rozwinięciem dwójkowym liczby $a \in [0, 1]$. Niech $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie automorfizmem rangi 1 zdefiniowanym poprzez procedurę cięcia i układania w następujący sposób:*

- na każdym kroku parametr cięcia (na kolumny) wieży z tego kroku jest równy 3;
- w kroku n dodajemy piętro nad pierwszą kolumną, jeśli $a_n = 0$ albo nad drugą, jeśli $a_n = 1$.

Załóżmy, że $|a - b| \neq \frac{k}{2^l}$ dla dowolnego $k, l \in \mathbb{N}$. Wtedy automorfizmy T_a i T_b są rozłączne. W przeciwnym wypadku są one izomorficzne.

Zgodnie z pracą [30] (w której rozważano klasyczny przypadek automorfizmu Chacona, tzn. $a_n = 1$ dla wszystkich $n \geq 1$) i jej uogólnieniami (np. [8]) automorfizmy rozważane w powyższym stwierdzeniu są słabo mieszające i spełniają własność MSJ. Zauważmy, że ciąg wysokości wież w konstrukcji tnącej i układającej opisanej w powyższym twierdzeniu jest uniwersalny dla wszystkich $a \in [0, 1]$.

⁵Do szczegółowego opisu tej ogólnej metody konstruowania automorfizmów ergodycznych odwołamy się do artykułu [13].

Lemat 3.5.5. *Odwzorowanie $[0, 1] \ni a \mapsto T_a \in \text{Aut}(X, \nu)$ jest dobrze zdefiniowane i ciągłe w $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.*

Dowód. Niech dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ liczby $a^{(k)} \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ oraz

$$a^{(k)} \rightarrow a \notin \mathbb{Q}. \quad (3.27)$$

Oznaczmy przez $\bar{a}^{(k)} = (a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ odpowiednie rozwinięcia dwójkowe liczb $a^{(k)}$ oraz a . Musimy pokazać, że $T_{a^{(k)}} \rightarrow T_a$ w słabej topologii, tzn., że dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset X$ zachodzi zbieżność

$$\nu(T_{a^{(k)}} A \Delta T_a A) \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech F_k oznacza wieżę otrzymaną w kroku k konstrukcji automorfizmu rangi 1 ze stwierdzenia 3.5.4. Wówczas z określenia tej konstrukcji wynika, że dla dostatecznie dużego $K_1 \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $A_\varepsilon = A_\varepsilon(K_1)$ mierzalny względem F_{K_1} , tzn. będący sumą mnogościową pięter wieży F_{K_1} taki, że $\nu(A_\varepsilon \Delta A) < \varepsilon/3$. Zauważmy, że A_ε jest mierzalny względem F_k dla wszystkich $k \geq K_1$. Ponieważ T_a i $T_{a^{(k)}}$ zachowują miarę ν , więc otrzymujemy

$$\nu(T_a A_\varepsilon \Delta T_a A) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ oraz } \nu(T_{a^{(k)}} A_\varepsilon \Delta T_{a^{(k)}} A) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.29)$$

Przypomnijmy, iż zbieżność (3.27) oznacza, że wraz z rosnącą liczbą $k \in \mathbb{N}$, rośnie długość początkowych bloków ciągów rozwinięć dwójkowych $\bar{a}^{(k)} = (a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ i $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, które się pokrywają (a zatem początkowe wieże F_s są dla T_a i $T_{a^{(k)}}$ takie same). Zatem istnieje taka liczba $K_2 \geq K_1$, że dla $k \geq K_2$ mamy

$$\nu(T_{a^{(k)}} A_\varepsilon \Delta T_a A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.30)$$

Zatem z (3.29), (3.30) i nierówności trójkąta wynika, że dla $k \geq K_2$ mamy

$$\nu(T_{a^{(k)}} A \Delta T_a A) < \varepsilon,$$

co kończy dowód (3.28). \square

Rozważmy odwzorowanie $S \in \text{Aut}([0, 1] \times X, \text{Leb}_{[0,1]} \otimes \nu)$ zdefiniowane w następujący sposób

$$S(a, x) := (a, T_a x).$$

Wtedy, biorąc pod uwagę stwierdzenie 3.5.4 i lemat 3.5.5, na podstawie poprzednich uwag, automorfizm S spełnia założenia twierdzenia 3.5.3. W szczególności mamy $S \in \text{Erg}^\perp$.

Podsumowując wyniki tego podrozdziału, skoncentrujemy się na dwóch nieoczywistych konkluzjach. Po pierwsze pomimo tego, że klasa (charakterystyczna) $\mathcal{M}(\text{Erg}^\perp)$ jest trywialna, klasa Erg^\perp zawiera również nietrywialne klasy charakterystyczne.⁶ A mianowicie, przywołując definicję klasy charakterystycznej i w szczególności klasy $\mathcal{F}(T)$ z podrozdziału 2.3.15, otrzymujemy następujący:

⁶Ciekawym problemem byłoby wskazanie innych niż we wniosku 3.5.6 podklas charakterystycznych zawartych w Erg^\perp .

Wniosek 3.5.6. *Jeśli T spełnia założenia twierdzenia 3.5.3, to $\mathcal{F}(T)$ jest klasą charakterystyczną zawartą w Erg^\perp .*

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z lematu 2.3.55, twierdzenia 3.5.3 i faktu, że dowolny faktor elementu Erg^\perp należy również do tej klasy. \square

Po drugie istnienie automorfizmów spełniających tezę twierdzenia 3.5.3 pokazuje drastyczną różnicę pomiędzy klasami Erg^\perp oraz WM^\perp . Rzeczywiście, jak pokazano w [38], automorfizmy, których wszystkie samopołączenia ergodyczne należą do WM^\perp , należą również do $\mathcal{M}(\text{WM}^\perp)$ (dlatego ta klasa mnożników jest ogromna), a dokładna charakteryzacja klasy mnożników klasy WM^\perp pozostaje otwartym problemem.

Rozdział 4

Ortogonalność do ergodycznych obrazów Markowa

4.1 Obserwacje przygotowawcze i pewne motywacje

Zanim sformułujemy główny wynik tego rozdziału, potrzebujemy pewnych obserwacji przygotowawczych. Przypomnijmy, że rozważamy automorfizm $T : (\bar{x}, u) \mapsto (\bar{x}, T_{\bar{x}}u)$ działający na (X, μ) , gdzie automorfizmy włóknowe $T_{\bar{x}}$ są ergodyczne. Wynika z tego, że rozszerzenie

$$T \rightarrow T|_{\bar{X}} = \text{Id}_{\bar{X}} \text{ jest relatywnie ergodyczne,} \quad (4.1)$$

tj. σ -algebra generowana przez rzut na \bar{X} pokrywa się z σ -algebrą \mathcal{I}_T mod μ . Rozważmy teraz samopołączenie $\lambda \in J_2(T)$ takie, że $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. Jeśli $f \in L^2(X, \mu)$ i $g \in L^2(\bar{X}, \bar{\mu})$, to dla dowolnego $N \geq 1$ mamy

$$\int f(x)g(\bar{x}') d\lambda|_{X \times \bar{X}}(x, \bar{x}') = \frac{1}{N} \int \sum_{n \leq N} f \circ T^n(x)g(\bar{x}') d\lambda|_{X \times \bar{X}}(x, \bar{x}').$$

Przechodząc do granicy z $N \rightarrow \infty$ i używając twierdzenia von Neumanna wraz z faktem, że \bar{X} odpowiada \mathcal{I}_T , otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \int f(x)g(\bar{x}') d\lambda|_{X \times \bar{X}}(x, \bar{x}') &= \int \mathbb{E}(f | \bar{X})(\bar{x})g(\bar{x}') d\bar{\mu}(\bar{x})d\bar{\mu}(\bar{x}') = \\ &= \int f d\mu \int g d\bar{\mu}. \end{aligned}$$

Stąd mamy

$$\lambda|_{X \times \bar{X}} = \mu \otimes \bar{\mu}. \quad (4.2)$$

Jeśli teraz $f \in L_0^2(X, \mu)$ i $\tilde{f} := \mathbb{E}_\mu[f | \bar{X}]$, to z (4.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda[(f - \tilde{f}) \otimes (f - \tilde{f}) | \bar{X} \times \bar{X}] &= \mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}] - \\ &= \mathbb{E}_\mu[f | \bar{X}] \otimes \mathbb{E}_\mu[f | \bar{X}], \quad (4.3) \end{aligned}$$

gdyż zachodzi

$$\mathbb{E}_\lambda[f \otimes \tilde{f} | \bar{X} \times \bar{X}] = (1 \otimes \tilde{f}) \mathbb{E}_\lambda[(f \otimes 1) | \bar{X} \times \bar{X}] = \tilde{f} \otimes \tilde{f}, \quad (4.4)$$

gdzie ostatnia równość wynika z (4.2). Ponadto zauważając, że $\tilde{f} \perp F_{\text{we}}(T)$, otrzymujemy

$$f \perp F_{\text{we}}(T) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f - \tilde{f} \perp F_{\text{we}}(T). \quad (4.5)$$

Dlatego w dalszej części będziemy stale zakładać, że f spełnia

$$\mathbb{E}[f | \bar{X}] = 0. \quad (4.6)$$

Aby zrozumieć, jak naturalne jest to założenie, przypomnijmy sobie najpierw pojęcie norm Gowersa-Hosta-Kry (w skrócie norm GHK) funkcji f :

$$\|f\|_{u^1}^2 := \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \int f \circ T^h \cdot \bar{f} d\mu, \quad (4.7)$$

i

$$\|f\|_{u^{s+1}}^{2^{s+1}} := \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \|f \circ T^h \cdot \bar{f}\|_{u^s}^{2^s} \text{ dla } s \geq 1.$$

Z (4.7) wynika, że

$$\|f\|_{u^1}^2 = \left| \int f d\mu \right|^2, \text{ jeśli } T \text{ jest automorfizmem ergodycznym.} \quad (4.8)$$

Uwaga 4.1.1. Jeśli $T = \text{Id}$, to $\|f\|_{u^1} = \|f\|_{L^2}$.

Zauważmy, że na mocy twierdzenia von Neumanna, $\|f\|_{u^1} = \int |\mathbb{E}[f | \bar{X}]|^2 d\bar{\mu}$.

Naszym celem jest badanie (ograniczonych) funkcji arytmetycznych \mathbf{u} poprzez stowarzyszone układy Furstenberga $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$, $\kappa \in V(\mathbf{u})$, dla których rozważamy $f = \pi_0$. Innymi słowy, biorąc pod uwagę ciąg (N_k) , który zadaje układ Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$, możemy zdefiniować $\|\mathbf{u}\|_{u^s}$ jako $\|\pi_0\|_{u^s}$ dla układu $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$. W szczególności mówimy, że $\|\mathbf{u}\|_{u^s} = 0$, jeśli $\|\pi_0\|_{u^s} = 0$ dla wszystkich $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Stąd w problemie klasyfikacji funkcji arytmetycznych \mathbf{u} , które są ortogonalne do układów monoergodycznych, założenie (4.6) jest teraz wyjaśnione przez następujący klasyczny wynik (patrz także: Section 3.4.1 w [14]):

Stwierdzenie 4.1.2. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$.

(b) *Dla każdego ciągu (N_k) definiującego układ Furstenberga funkcji \mathbf{u} mamy*

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N} \left| \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \mathbf{u}(n+h) \right|^2 = 0$$

(tj. własność „zerowej średniej na typowym krótkim przedziale”).

(c) $\mathbb{E}_\kappa[\pi_0|\mathcal{I}_S] = 0$, dla dowolnego $\kappa \in V(\mathbf{u})$.

(d) $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \pi_0 \circ S^h = 0$ w $L^2(X_{\mathbf{u}}, \kappa)$ dla każdego $\kappa \in V(\mathbf{u})$.

Przypomnijmy, że podstawowe informacje na temat funkcji moltiplikatywnych, ograniczonych przez 1 i ich odległości moltiplikatywnej D można znaleźć w rozdziale 2.5.

Uwaga 4.1.3. Przełomowe twierdzenie autorstwa Matomäki i Radziwiłła [39] implikuje wartość zerową pierwszej normy GHK dla wielu klasycznych funkcji (aperiodycznych) moltiplikatywnych, takich jak funkcje Liouville’a lub Möbiusa. Ale istnieją również pretensjonalne funkcje moltiplikatywne \mathbf{u} , dla których $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$.¹ W rzeczywistości, wszystkie funkcje moltiplikatywne udające, że są niegłównym charakterem Dirichleta χ posiadają tę własność. Istotnie, jak pokazano w [17], układy Furstenberga wszystkich takich funkcji arytmetycznych są ergodyczne, więc (biorąc pod uwagę (4.8)) nasze twierdzenie zachodzi, gdy wiemy, że mają one średnią $M(\mathbf{u})$ równą zero. Aby zobaczyć to ostatnie stwierdzenie, zauważmy, że dla niegłównego charakteru Dirichleta χ mamy $D(\chi, n^{it}) = \infty$, dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i $D(\mathbf{u}, \chi) < \infty$. Z tego wynika, że $D(\mathbf{u}, n^{it}) = \infty$, gdyż moltiplikatywna „odległość” D spełnia nierówność trójkąta. Teza wynika teraz z twierdzenia Halásza (patrz: uwaga 2.5.6).

Uwaga 4.1.4. Zauważmy, że jeśli wszystkie układy Furstenberga funkcji \mathbf{u} są identycznościami, to $\|\mathbf{u}\|_{u^1} > 0$ chyba, że (pseudo)norma Besicovitcha $\|\mathbf{u}\|_B$ jest równa 0 (patrz: rozdział 2.5). Rzeczywiście, jeśli w definicji normy u^1 funkcji f automorfizm T jest identycznością, to $\|f\|_{u^1} = \|f\|_{L^2}$ (patrz: uwaga 4.1.1). Stąd, zgodnie z obserwacją w [25], wszystkie nietrywialne, wolno zmieniające się funkcje mają dodatnią pierwszą normę GHK. W szczególności dla wszystkich charakterów Archimedesów mamy $\|n^{it}\|_{u^1} > 0$.

Ponadto, jak zauważono w [25], wszystkie tzw. MRT-funkcje są nietrywialne i aperiodyczne oraz identyczność jest jednym z ich układów Furstenberga. Zatem dla wszystkich takich funkcji ich u^1 -norma jest również dodatnia.

Rozważmy kilka przykładów funkcji ortogonalnych do ergodycznych obrazów Markowa.

- A. Jeśli automorfizm T jest ergodyczny, to wszystkie funkcje $f \in L^2(X, \mu)$ znajdują się w obrazie operatora Markowa Φ_{Δ_μ} , gdzie Δ_μ oznacza połączenie diagonalne na (X, μ) . Zatem funkcja zerowa jest jedyną funkcją ortogonalną do wszystkich ergodycznych obrazów Markowa.
- B. Jeśli dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $T_{\bar{x}} \perp T_{\bar{x}'}$, to na mocy twierdzenia 3.2.1 wszystkie funkcje o zerowej średniej są ortogonalne do wszystkich ergodycznych obrazów Markowa.

¹Oczywiście każda okresowa funkcja moltiplikatywna o średniej zero ma zerową pierwszą normę GHK (np. funkcja $n \mapsto (-1)^{n+1}$ ma tę własność).

Stwierdzenie 4.1.5. *Założmy, że dla dowolnego $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy $T_{\bar{x}} = S$ (innymi słowy, $T = \text{Id}_{\bar{X}} \times S$, gdzie S jest automorfizmem ergodycznym). Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\bar{\mu} \otimes \nu)$, $f \perp F_{\text{we},0}(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją mierzalną względem \bar{X} .*

Dowód. Założmy, że $f \perp F_{\text{we},0}(T)$. Następnie, rozważmy połączenie $\rho \in J(T, S)$, w którym łączymy diagonalnie S z samym sobą, a część \bar{X} w sposób niezależny od Y . Korzystając z lematu 2.3.62 (zastosowanego do właśnie zdefiniowanego ρ), dla każdego $g \in L_0^2(Y, \nu)$ i $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy

$$\int_Y f(\bar{x}, y)g(y) d\nu(y) = 0. \quad (4.9)$$

Ten zachodzący $\bar{\mu}$ -p.w. warunek ma miejsce, jeśli rozważymy przeliczalny liniowo gęsty zbiór funkcji $g \in L_0^2(Y)$. Wynika z tego, że dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}$, funkcja $y \mapsto f(\bar{x}, y)$ jest ν -p.w. równa $\int_Y f(\bar{x}, y) d\nu(y)$, tj. f jest $\bar{\mu} \otimes \nu$ -p.w. równa funkcji zależnej jedynie od \bar{x} .

Odwrotnie, jeśli f jest \bar{X} -mierzalna, to fakt, że $f \perp F_{\text{we},0}(T)$ jest konsekwencją rozłączności między identycznościami a układami ergodycznymi. \square

4.2 Charakteryzacja elementów przestrzeni $F_{\text{we}}(T)^\perp$

Naszym celem jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.2.1. *Założmy, że $f \in L_0^2(X, \mu)$ spełnia (4.6). Wówczas $f \perp F_{\text{we}}(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich miar $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$ mamy*

$$\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = 0$$

dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$.

- Zauważmy, że $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ i $\mathcal{I}_{T \times T}$ jest σ -algebrą generowaną przez rzut na $\bar{X} \times \bar{X}$ modulo λ .
- Przy założeniu $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$, $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = 0$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} (f \otimes f) \circ (T \times T)^n = 0$ w $L^2(\lambda)$ (z twierdzenia von Neumanna).
- Zauważmy również, że (zakładając prawdziwość twierdzenia 4.2.1) ze względu na wniosek 2.3.66 otrzymujemy: $f \perp F_{\text{we}}(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\lambda \in J_2(T)$ mamy $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = 0$ dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -a.a. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$.
- Aby zapoznać się z innym równoważnym warunkiem (ważnym dla zastosowań), zobacz wniosek 4.6.2.

Uwaga 4.2.2. Z twierdzenia 4.2.1 wynika bezpośrednio, że jeśli $f \in L_0^2(X, \mu)$ spełnia (4.6) i $f \perp F_{\text{we}}(T)$, to dla każdego $g \in L^\infty(\bar{X}, \bar{\mu})$ mamy $gf \perp F_{\text{we}}(T)$.

Uwaga 4.2.3. Jeśli nie chcemy zakładać (4.6), to tezę $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = 0$, biorąc pod uwagę (4.3), należy zastąpić przez

$$(*) \quad \mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = \mathbb{E}_\mu(f | \bar{X})(\bar{x}) \mathbb{E}_\mu(f | \bar{X})(\bar{x}')$$

dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$. Na przykład, jeśli rozważamy funkcję \mathbf{u} taką, że wszystkie stowarzyszone z nią układy Furstenberga są identycznościami, to jedynym samopołączeniem, które musimy wziąć pod uwagę (gdyż $\bar{X} = X$), jest miara produktowa, a założenie (*) jest spełnione. Zobaczymy później (patrz: stwierdzenie 4.5.1), że w tym przypadku funkcja \mathbf{u} będzie ortogonalna do wszystkich układów monoergodycznych, nawet jeśli funkcja π_0 nie spełnia (4.6).

Aby udowodnić twierdzenie 4.2.1 będziemy jeszcze potrzebowali poniższych obserwacji:

Lemat 4.2.4. *Niech $\rho \in J(T, R)$, gdzie R jest automorfizmem ergodycznym. Pólżmy $\lambda := \rho^* \circ \rho \in J_2(T)$ (tj. λ jest jedynym samopołączeniem automorfizmu T , dla którego $\Phi_\lambda = \Phi_\rho^* \circ \Phi_\rho$). Wtedy $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$.*

Dowód. Ponieważ R jest ergodyczny oraz $\text{Id} \in \text{Erg}^\perp$, więc $\rho|_{\bar{X} \times Z} = \bar{\mu} \otimes \kappa$. Oznacza to, iż $\Phi_\rho|_{L_0^2(\bar{X}, \bar{\mu})} = 0$. Zgodnie z definicją miary λ mamy

$$\Phi_\lambda|_{L_0^2(\bar{X}, \bar{\mu})} = \Phi_\rho^* \circ \Phi_\rho|_{L_0^2(\bar{X}, \bar{\mu})} = 0,$$

skąd $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. \square

Przy założeniach lematu mamy

$$\rho = \int_{\bar{X}} \rho_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}),$$

gdzie $\rho_{\bar{x}} \in J(T_{\bar{x}}, R)$ dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}$. Co więcej, dezintegrując λ nad $\bar{X} \times \bar{X}$,

$$\lambda = \int_{\bar{X} \times \bar{X}} \lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} d\bar{\mu}(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}'),$$

uzyskujemy

$$\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} = \rho_{\bar{x}'}^* \circ \rho_{\bar{x}}, \tag{4.10}$$

przy czym $\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} \in J(T_{\bar{x}}, T_{\bar{x}'})$. Rzeczywiście,

$$\Phi_\lambda = \Phi_\rho^* \circ \Phi_\rho = \int_{\bar{X}} \Phi_{\rho_{\bar{x}}}^* d\bar{\mu}(\bar{x}) \circ \int_{\bar{X}} \Phi_{\rho_{\bar{x}'}} d\bar{\mu}(\bar{x}') = \int_{\bar{X} \times \bar{X}} \Phi_{\rho_{\bar{x}}}^* \circ \Phi_{\rho_{\bar{x}'}} d\bar{\mu}(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}').$$

4.3 Dowód twierdzenia 4.2.1. Dostateczność

Weźmy dowolny automorfizm ergodyczny R przestrzeni (Z, \mathcal{D}, κ) i niech $\rho \in J(T, R)$. Niech $\lambda = \rho^* \circ \rho \in J_2(T)$. Z lematu 4.2.4, $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ i stąd, na mocy wniosku 2.3.66,

$$\lambda = \int_0^1 \lambda_t dt,$$

gdzie $\lambda_t \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$. Rozważamy zatem funkcję $f \in L^2(X, \mu)$ taką, że

$$\mathbb{E}_{\lambda_t}[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}] = 0 \quad \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\text{-p.w.},$$

skąd $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}] = 0 \quad \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\text{-p.w.}$ Stąd, biorąc pod uwagę (4.10), dla $\bar{x} \in \bar{X}_\infty$ (jeśli $\bar{x} \in \bar{X}_n$, to w poniższym rachunkach zamieniamy ν na ν_n)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = \int f \otimes f d\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} = \\ &= \int \Phi_{\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'}}(f) f|_{\{\bar{x}\} \times Y} d\nu = \int_Z \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(f) \cdot \Phi_{\rho_{\bar{x}'}}(f) d\kappa \end{aligned}$$

dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\text{-p.w.}$ $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$. Z (2.25) wynika, iż musimy jedynie pokazać, że $\Phi_\rho(f) = 0$, gdzie $\Phi_\rho : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(Z, \kappa)$. Punkt $\bar{x} \in \bar{X}$ nazywamy „dobrym”, jeśli

$$\bar{\mu}(\{\bar{x}' \in \bar{X}; \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(f) \perp \Phi_{\rho_{\bar{x}'}}(f)\}) = 1.$$

Ponieważ zbiór punktów (\bar{x}, \bar{x}') takich, że $\Phi_{\rho_{\bar{x}}}(f) \perp \Phi_{\rho_{\bar{x}'}}(f)$ jest borelowski, więc na mocy twierdzenia Fubniego zbiór G „dobrych” punktów ma pełną miarę. Połóżmy

$$C := \{\bar{x} \in \bar{X}; \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(f) \neq 0\}.$$

Przypuśćmy, że $\bar{\mu}(C) > 0$. Wtedy $\bar{\mu}(G \cap C) = \bar{\mu}(C) > 0$. W zbiorze $C \cap G$ wybierzmy maksymalny podzbiór $\{\bar{x}_n; n \geq 1\}$, tak aby $\Phi_{\rho_{\bar{x}_n}}(f) \perp \Phi_{\rho_{\bar{x}_m}}(f)$ dla $n \neq m$ (ten zbiór jest przeliczalny, ponieważ $L^2(Z, \kappa)$ jest przestrzenią ośrodkową, a istnienie tego maksymalnego zbioru wynika z lematu Zorna). Niech

$$B_n := \{\bar{x} \in \bar{X}; \Phi_{\rho_{\bar{x}}}(f) \perp \Phi_{\rho_{\bar{x}_n}}(f)\}.$$

Wtedy $\bar{\mu}(B_n) = 1$ i dlatego

$$\bar{\mu} \left(\bigcap_{n \geq 1} B_n \cap G \cap C \right) > 0.$$

Jednak dodanie dowolnego punktu $\bar{x} \in \bigcap_{n \geq 1} B_n \cap G \cap C$ tworzy większą rodzinę niż zbiór $\{\bar{x}_n; n \geq 1\}$, co jest sprzeczne z maksymalnością tego zbioru.

Wynika z tego, że zbiór C ma miarę zero, co implikuje równość $\Phi_\rho(f) = 0$.

4.4 Dowód twierdzenia 4.2.1. Konieczność

(Przez kontrapozycję.) Załóżmy, że istnieje połączenie $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(T)$, dla którego twierdzenie nie zachodzi. Bez utraty ogólności zakładamy, że f jest funkcją o wartościach rzeczywistych i, że dla (\bar{x}, \bar{x}') należących do pewnego zbioru o dodatniej mierze $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ mamy

$$\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \bar{X} \times \bar{X}](\bar{x}, \bar{x}') = \int f \otimes f d\lambda_{\bar{x}, \bar{x}'} > 0.$$

Zatem z twierdzenia Fubiniego wynika, że istnieje punkt \bar{x}_0 taki, że dla \bar{x} z pewnego zbioru $A \subset \bar{X}$ o mierze dodatniej,

$$\int f \otimes f d\lambda_{\bar{x}, \bar{x}_0} > 0.$$

Niech $R = T_{\bar{x}_0}$ (jest to automorfizm ergodyczny, zakładamy również, że $\bar{x}_0 \in \bar{X}_\infty$), a $\rho \in J(T, R)$ definiujemy przez położenie (por. podrozdział 2.3.7) $\rho := \int \rho_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x})$, gdzie $\rho_{\bar{x}} = \lambda_{\bar{x}, \bar{x}_0}$ dla $\bar{x} \in A$ oraz $\rho_{\bar{x}}$ jest miarą produktową w przeciwnym przypadku. Łatwo otrzymujemy, używając (4.6) dla otrzymania trzeciej równości w poniższym ciągu, że

$$\begin{aligned} \int \Phi_\rho(f) \cdot f d\mu &= \int f \otimes f d\rho = \\ &= \int_{\bar{X}} \left(\int f \otimes f d\rho_{\bar{x}} \right) d\bar{\mu}(\bar{x}) = \int_A \left(\int f \otimes f d\rho_{\bar{x}} \right) d\bar{\mu}(\bar{x}) > 0. \end{aligned}$$

4.5 Ortogonalność i ergodyczne obrazy Markowa

Stwierdzenie 4.5.1. *Niech $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$. Wtedy $\mathbf{u} \perp \text{UE}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$, $\pi_0 \perp F_{\text{we},0}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$.*

Dowód. \Rightarrow (przez sprzeczność) Przypuśćmy, że dla pewnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$ istnieje układ ergodyczny (Z', ν', R') i połączenie $\rho' \in J((R', \nu'), (S, \kappa))$, dla których $\pi_0 \not\perp \text{Im}(\Phi_{\rho'}|_{L_0^2(Z', \nu')})$. Stosując twierdzenie Jewetta-Kriegera, uzyskujemy, że istnieje układ monoergodyczny (Z, ν, R) i połączenie $\rho \in J((R, \nu), (S, \kappa))$ takie, że $\pi_0 \not\perp \text{Im}(\Phi_\rho|_{L_0^2(Z, \nu)})$ (w $L^2(\kappa)$). Z tego wynika, że istnieje funkcja $f \in C(Z)$ o zerowej średniej taka, że $\int_{X_{\mathbf{u}}} \Phi_\rho(f) \pi_0 d\kappa \neq 0$, innymi słowy $\int_{Z \times X_{\mathbf{u}}} f \otimes \pi_0 d\rho \neq 0$. Niech (N_m) spełnia $\frac{1}{N_m} \sum_{n \leq N_m} \delta_{S^n \mathbf{u}} \rightarrow \kappa$. W świetle twierdzenia 2.4.14 istnieje ciąg $(z_n) \subset Z$ i podciąg (N_{m_ℓ}) , dla których

$$\frac{1}{N_{m_\ell}} \sum_{n \leq N_{m_\ell}} \delta_{(z_n, S^n \mathbf{u})} \rightarrow \rho$$

a zbiór $\{n \geq 1; z_n \neq Rz_{n-1}\}$ jest zawarty w podzbiorze \mathbb{N} postaci $\{b_1 < b_2 < \dots\}$, gdzie $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$. Dokładając, w razie potrzeby, więcej elementów b_k do tego

zbioru, możemy również założyć, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$. W ten sposób, definiując $K_\ell := \max\{k; b_k \leq N_{m_\ell}\}$, otrzymujemy $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{b_{K_\ell}}{N_{m_\ell}} = 1$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} 0 \neq \int f \otimes \pi_0 d\rho &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{m_\ell}} \sum_{n \leq N_{m_\ell}} f(z_n) \mathbf{u}(n) = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{K_\ell}} \sum_{k < K_\ell} \left(\sum_{b_k \leq n < b_{k+1}} f(R^{n-b_k} z_{b_k}) \mathbf{u}(n) \right). \end{aligned}$$

Jednakże, ta ostatnia granica wynosi 0, na mocy twierdzenia 2.4.15 i naszego założenia ortogonalności dla \mathbf{u} , a więc otrzymaliśmy sprzeczność.

\Leftarrow (przez sprzeczność) Niech (X, T) będzie układem monoergodycznym. Przyjmijmy, że dla pewnego podciągu (N_k) mamy $\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(T^n x) \mathbf{u}(n) := c \neq 0$ (dla pewnej funkcji $f \in C(X)$ o zerowej średniej i $x \in X$) oraz

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(T^n x, S^n \mathbf{u})} \rightarrow \rho.$$

Wówczas miara ρ jest połączeniem, $\rho \in J((T, \nu), (S, \kappa))$, gdzie ν jest jedyną (ergodyczną) miarą niezmienniczą dla T , a $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Z drugiej strony,

$$c = \int f \otimes \pi_0 d\rho = \int \mathbb{E}_\rho[f | X_{\mathbf{u}}] \pi_0 d\kappa,$$

co jest sprzecznością, ponieważ układ (T, ν) jest ergodyczny. \square

Uwaga 4.5.2. Jeśli założymy, że $M(\mathbf{u}) = 0$ (co jest równoważne $\mathbb{E}_\kappa[\pi_0] = 0$ dla każdego układu Furstenberga κ funkcji \mathbf{u}), to w powyższym twierdzeniu możemy zastąpić $F_{\text{we},0}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ przez $F_{\text{we}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$.

Uwaga 4.5.3. Zauważmy, że w dowodzie dwukrotnie użyliśmy monoergodyczności: każdy układ ergodyczny ma model monoergodyczny, a następnie użyliśmy twierdzenia 2.4.15 dla monoergodycznych modeli orbitalnych. Ponieważ te ostatnie modele nie są (ogólnie rzecz biorąc) minimalne, pojawia się pytanie, czy ortogonalność względem wszystkich układów monoergodycznych jest tym samym co ortogonalność względem wszystkich układów ściśle ergodycznych.

Uwaga 4.5.4. Jeśli wszystkie układy Furstenberga \mathbf{u} są identycznościami, to funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich układów monoergodycznych. Stąd (patrz: [25]) wszystkie funkcje wolno zmieniające się w średniej (patrz: (2.43)) są ortogonalne do wszystkich układów monoergodycznych. W następnym podrozdziale rozważymy problem Boshernitzana w klasie funkcji moltiplicatywnych.

4.6 Warunek ortogonalności do ergodycznych obrazów Markowa

Potrzebujemy następującego lematu (relatywizującego przypadek rozkładu na składowe ergodyczne).

Lemat 4.6.1. Niech R będzie automorfizmem przestrzeni (Z, \mathcal{D}, ρ) i niech pod- σ -algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}_R$ będzie jego faktorem. Załóżmy, że $\rho = \int_0^1 \rho_t dQ(t)$, gdzie ρ_t są miarami R -niezmienniczymi i $\mathcal{A} = \mathcal{I}_R \bmod \rho_t$ dla Q -p.w. $t \in [0, 1]$. Niech $f \in L^\infty(Z, \rho)$ i $\mathbb{E}_{\rho_t}[f | \mathcal{A}] = 0$ dla Q -p.w. $t \in [0, 1]$. Wtedy $\mathbb{E}_\rho[f | \mathcal{I}_R] = 0$.

Dowód. Oznaczmy $F_{N,t} := \int_Z \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f \circ R^n \right|^2 d\rho_t$. Wówczas dla Q -p.w. $t \in [0, 1]$ mamy $\lim_{N \rightarrow \infty} F_{N,t} = 0$ (w $L^2(Z, \rho_t)$), na mocy twierdzenia von Neumanna i naszych założeń. Z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej Lebesgue'a otrzymujemy, że $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 F_{N,t} dQ(t) = 0$. To znaczy,

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\int_Z \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f \circ R^n \right|^2 d\rho_t \right) dQ(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_Z \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f \circ R^n \right|^2 d\rho.$$

Ponownie, z twierdzenia von Neumanna wynika, że $\mathbb{E}_\rho[f | \mathcal{I}_R] = 0$. \square

Powracając do naszego kontekstu, z wniosku 2.3.66, twierdzenia 4.2.1 i lematu 4.6.1, uzyskujemy następujący wniosek:

Wniosek 4.6.2. Załóżmy, że $f \in L_0^2(X, \mu)$ spełnia (4.6). Wtedy $f \perp F_{\text{we}}(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich samopołączeń $\lambda \in J_2(T)$ spełniających $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$, mamy $\mathbb{E}_\lambda[f \otimes f | \mathcal{I}_{T \times T}] = 0$.

Uwaga 4.6.3. Powyższy wniosek daje pełne rozwiązanie problemu Boshernitzana. Aby sprawdzić, czy $f \perp F_{\text{we}}(T)$ i zakładając, że $\mathbb{E}(f | \bar{X}) = 0$, wystarczy (i jest to jednocześnie warunek konieczny) wykazać, że

$$(*) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{X \times X} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} (f \otimes f) \circ (T \times T)^n \right|^2 d\lambda = 0$$

dla wszystkich samopołączeń $\lambda \in J_2(T)$, dla których $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$. Gdy rozważymy układy Furstenberga funkcji arytmetycznej \mathbf{u} (spełniające warunek: „zerowej średniej na typowym krótkim przedziale”), to $f = \pi_0$, a warunek (*) jest wyrażony kombinatorycznie (tj. wyrażony w kategoriach własności funkcji \mathbf{u}), zobacz stwierdzenie 4.1.2 i następne podrozdziały.

Uwaga 4.6.4. Jeśli $T \perp \text{Erg}$, to oczywiście każda funkcja f spełniająca warunek $\mathbb{E}(f | \bar{X}) = 0$, jest ortogonalna do wszystkich obrazów ergodycznych, ale możemy również zauważyć, że warunek (*) jest trywialnie spełniony, ponieważ każde samopołączenie λ jak powyżej, będzie po prostu miarą produktową (ponieważ rozszerzenie $T \rightarrow \text{Id}|_{\bar{X}}$ jest domknięte).

Uwaga 4.6.5. Zauważmy, że jeśli $\lambda|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$, to (chyba, że automorfizm T jest ergodyczny) miara λ nie może być połączeniem wykresowym Δ_S dla elementu S z centralizatora $C(T)$ automorfizmu T . Rzeczywiście, jeśli $S \in C(T)$, to S musi zachowywać sigma-algebrę zbiorów niezmienniczych. Otrzymujemy

$$\Delta_S|_{\bar{X} \times \bar{X}} = \Delta_{\bar{S}},$$

gdzie $\bar{S} := S|_{\bar{X}}$. Ale $\Delta_{\bar{S}} \neq \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ chyba, że przestrzeń \bar{X} redukuje się do jednego punktu.

4.7 Przykłady ciągów ortogonalnych do wszystkich układów monoergodycznych

Przykłady takich ciągów zawarte są w pracy [7] i są to ciągi zarówno generujące dla miar z Erg^\perp jak i spoza tej klasy. W tym podrozdziale przedstawimy inne podejście (wykorzystujące twierdzenie 2.4.14) do konstruowania ciągów ortogonalnych do wszystkich układów monoergodycznych.

Lemat 4.7.1. *Niech (X, T) będzie układem topologicznym i niech ciąg $(x_n) \subset X$ spełnia następujące warunki:*

- (i) *gęstość zbioru $\{n \in \mathbb{N}; x_{n+1} \neq Tx_n\}$ wynosi zero,*
- (ii) *ciąg (x_n) jest quasi-generujący wzdłuż podciągu (N_k) dla miary $\nu \in \mathcal{M}(X)$ (por. twierdzenie 2.4.14).*

Wtedy ν jest miarą T -niezmienniczą.

Dowód. Żądany fakt jest oczywisty, biorąc pod uwagę całki funkcji $f, f \circ T \in C(X)$.
□

Uwaga 4.7.2. Przypomnijmy, że (ii) oznacza, iż

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(x_n) = \int f d\nu,$$

dla wszystkich funkcji $f \in C(X)$. Powstaje ogólny problem istnienia ciągów spełniających (i). Lemat o podnoszeniu (Lifting Lemma), patrz: twierdzenie 2.4.14, daje istnienie takiego ciągu (x_n) , który spełnia zarówno (i), jak i (ii) wzdłuż podciągu ciągu (N_k) ; jednak nie kontrolujemy innych podciągów.

Lemat 4.7.3. *Załóżmy, że (Z, R) jest innym układem topologicznym, w którym z jest punktem generującym dla miary κ (która musi być elementem przestrzeni $\mathcal{M}(Z, R)$). Załóżmy, że*

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(x_n, R^n z)} \rightarrow \rho \in \mathcal{M}(X \times Z).$$

Wtedy miara ρ jest $T \times R$ -niezmiennicza.

Dowód. Ciąg $(x_n, R^n z)$ jest quasi-generujący dla miary ρ wzdłuż podciągu i również spełnia warunek (i) z lematu 4.7.1 zastosowanego do $T \times R$. □

Lemat 4.7.4. *Załóżmy, że w lemacie 4.7.1 dodatkowo mamy $(X, \nu, T) \in \text{Erg}^\perp$ dla dowolnego podciągu (N_k) , wzdłuż którego mamy zbieżność, tj. dla każdej miary $\nu \in V((x_n))$. Wówczas dla każdej funkcji $f \in C(X)$ mamy*

$$(\mathbf{u}(n) := f(x_n)) \perp \text{UE}.$$

Dowód. Weźmy dowolny układ monoergodyczny (Z, R) (z jedyną miarą R -niezmienniczą κ). Załóżmy, że dla pewnego podciągu (N_k) i $z \in Z$ mamy

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(x_n, R^n z)} \rightarrow \rho.$$

Z lematu 4.7.3 wynika, że $\rho \in \mathcal{M}(X \times Z, T \times R)$, a ponadto, miara ρ rzutuje się odpowiednio na miary ν i κ . Stąd, dla każdej funkcji $g \in C(Z)$ o zerowej (względem miary κ) średniej, mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \mathbf{u}(n)g(R^n z) = \int f \otimes g d\rho = \int f d\nu \cdot \int g d\kappa = 0$$

ze względu na rozłączność układów (X, ν, T) i (Z, κ, R) . \square

Uwaga 4.7.5. Załóżmy dla uproszczenia, że funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ma moduł równy 1. Zauważmy, że w powyższym lemacie, jeśli dla ciągu \mathbf{u} mamy

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{S^n \mathbf{u}} \rightarrow \kappa$$

i

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{x_n} \rightarrow \nu,$$

to dla wszystkich $m_i, \ell_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, r$), jeśli położymy $g := \prod_{i \leq r} \pi_{m_i}^{\ell_i}$, to używając (i) z lematu 4.7.1 do uzasadnienia piątej równości oraz (ii) dla ostatniej, mamy

$$\begin{aligned} \int_{X_{\mathbf{u}}} g d\kappa &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} g(S^n \mathbf{u}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \prod_{i \leq r} \pi_{m_i}^{\ell_i}(S^n \mathbf{u}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \prod_{i \leq r} \mathbf{u}_{n+m_i}^{\ell_i} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \prod_{i \leq r} (f(x_{n+m_i}))^{\ell_i} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \prod_{i \leq r} (f(T^{m_i} x_n))^{\ell_i} = \int_X \prod_{i \leq r} (f \circ T^{m_i})^{\ell_i} d\nu. \end{aligned}$$

Wynika z tego, że dla dowolnego $H \geq 1$,

$$\int_{X_{\mathbf{u}}} \left| \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \pi_0 \circ S^h \right|^2 d\kappa = \int_X \left| \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} f \circ T^h \right|^2 d\nu.$$

Stąd, korzystając z twierdzenia von Neumanna, otrzymujemy, że

$$\mathbb{E}_{\nu}[f | \mathcal{I}_T] = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 | \mathcal{I}_S] = 0. \quad (4.11)$$

W świetle stwierdzenia 4.1.2, przy dodatkowym założeniu $\mathbb{E}_\nu[f | \mathcal{I}_T] = 0$, dla każdej miary ν , dla której ciąg (x_n) jest quasi-generujący, ciąg \mathbf{u} , który otrzymujemy, spełnia $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$.

Uwaga 4.7.6. Jeśli dodatkowo założymy, że układ topologiczny (X, T) ma zerową entropię topologiczną i, że zbiór $\{n \in \mathbb{N}; x_{n+1} \neq Tx_n\}$ ma postać $\{b_1 < b_2 < \dots\}$ z $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$, to ciąg $\mathbf{u} = (f(x_n))$ ma również zerową entropię topologiczną (patrz [2], dowód Corollary 9).

Podamy teraz przykłady ciągów, które są ortogonalne do wszystkich układów monoergodycznych. Ustalmy liczbę niewymierną $\alpha \in [0, 1)$. Zdefiniujemy ciąg $(w_n) \subset \mathbb{T}^2$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &(\alpha, 0), (2\alpha, 0), (2\alpha, 2\alpha), (2\alpha, 4\alpha), (2\alpha, 6\alpha), \dots \\ &\dots, (k\alpha, 0), (k\alpha, k\alpha), \dots, (k\alpha, (k^2 - 1)k\alpha), \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ten ciąg składa się z fragmentów indeksowanych przez $k \geq 1$: na etapie k bierzemy $(k\alpha, 0)$ i początkowy fragment jego orbity o długości k^2 poprzez automorfizm $T : (x, y) \mapsto (x, x + y)$ na \mathbb{T}^2 . Twierdzimy, że zdefiniowany przez nas ciąg jest generujący dla miary $\nu = \text{Leb}_{\mathbb{T}} \otimes \text{Leb}_{\mathbb{T}}$. Rzeczywiście, aby to zobaczyć, najpierw zauważmy, że musimy sprawdzić tylko przypadek $N = 1^2 + 2^2 + \dots + L^2$, ponieważ prawa strona jest rzędu L^3 , podczas gdy następny fragment z definicji (w_n) ma długość $(L + 1)^2$, który jest równy $o(1)$ względem N . Dla ustalonych $r, s \in \mathbb{Z}$, rozważmy $F(x, y) = e^{2\pi i(rx + sy)}$ (sprawdzamy słabą zbieżność naszego ciągu na charakterach grupy \mathbb{T}^2). Załóżmy najpierw, że $s \neq 0$, wtedy mamy

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} F(w_n) = \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} e^{2\pi i r k \alpha} \sum_{j=0}^{k^2-1} e^{2\pi i s j k \alpha} = \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} e^{2\pi i r k \alpha} \frac{e^{2\pi i k^2 s k \alpha} - 1}{e^{2\pi i s k \alpha} - 1}.$$

Ustalmy $\varepsilon_0 > 0$. Następnie zauważmy, że jeśli L jest wystarczająco duże, to

$$\left| \{k \leq L; |e^{2\pi i k(s\alpha)} - 1| \geq \varepsilon_0\} \right| \geq (1 - 3\varepsilon_0)L$$

i dla każdego k w tym dużym zbiorze mamy

$$\sum_{j=0}^{k^2-1} e^{2\pi i s j k \alpha} = O(1/\varepsilon_0).$$

Dla pozostałych $k \leq L$ takie sumy są ograniczone przez k^2 . Tak więc, pamiętając, że $\sum_{m \leq M} m^2 = \frac{1}{3}M^3 + O(M^2)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} F(w_n) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} O(1/\varepsilon_0) + \frac{1}{N} \sum_{k=L(1-3\varepsilon_0)}^L k^2 \leq \\ &\leq O(1/\varepsilon_0) \frac{L}{N} + \frac{1}{N} \left(\frac{1}{3}L^3 - \frac{1}{3}(L(1-3\varepsilon_0))^3 + O(L^2) \right) = \\ &= o(1) + O(\varepsilon_0) + \frac{O(L^2)}{N} = o(1) + O(\varepsilon_0), \end{aligned}$$

gdy $L \rightarrow \infty$.

Teraz zajmiemy się przypadkiem ($s = 0, r \neq 0$). Używając formuły Abela, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} F(w_n) &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq L} k^2 e^{2\pi i k r \alpha} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq L} (j^2 - (j-1)^2) \sum_{j \leq k \leq L} e^{2\pi i k r \alpha}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dla ustalonego $\varepsilon_0 > 0$, rozważamy te j , które są mniejsze niż $(1 - \varepsilon_0)L$. Otóż dla takich j mamy

$$\left| \frac{1}{L - j + 1} \sum_{j \leq k \leq L} e^{2\pi i k r \alpha} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_0 L} \left| \frac{2}{1 - e^{2\pi i r \alpha}} \right| = \frac{1}{L} O(1/\varepsilon_0),$$

a ponieważ

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq L} (j^2 - (j-1)^2)(L - j + 1) = 1$$

(odpowiada to (4.13), gdy $r = 0$), więc otrzymujemy

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq (1-\varepsilon_0)L} (j^2 - (j-1)^2) \sum_{j \leq k \leq L} e^{2\pi i k r \alpha} \right| = \frac{1}{L} O(1/\varepsilon_0).$$

W pozostałych przypadkach, odpowiadających sytuacji $j > (1 - \varepsilon_0)L$, używamy po prostu

$$\left| \sum_{j \leq k \leq L} e^{2\pi i k r \alpha} \right| = O(\varepsilon_0 L),$$

aby uzyskać

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{(1-\varepsilon_0)L < j \leq L} (j^2 - (j-1)^2) \sum_{j \leq k \leq L} e^{2\pi i k r \alpha} \right| = \frac{1}{N} O(L^3 \varepsilon_0) = O(\varepsilon_0).$$

Ostatecznie mamy (dla $s = 0, r \neq 0$)

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} F(w_n) \right| = \frac{1}{L} O(1/\varepsilon_0) + O(\varepsilon_0),$$

co pokazuje, że ciąg (w_n) jest generujący dla miary $\text{Leb} \otimes \text{Leb}$.

Zastosujmy teraz lemat 4.7.4 do automorfizmu $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $T(x, y) = (x, x + y)$ (rozpatrywanego z miarą $\text{Leb}_{\mathbb{T}^2}$) i funkcji $f(x, y) = e^{2\pi i y}$ oraz do ciągu (4.12), aby uzyskać, że ciąg

$$\begin{aligned} &1, 1, e^{2\pi i 2\alpha}, e^{2\pi i 4\alpha}, e^{2\pi i 6\alpha}, \dots \\ &\dots, 1, e^{2\pi i k\alpha}, \dots, e^{2\pi i (k^2-1)k\alpha}, \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

jest ortogonalny do wszystkich układów monoergodycznych.

Uwaga 4.7.7. Zauważmy, że w powyższym przykładzie moglibyśmy oczywiście „rzutować” ciąg (w_n) na pierwszą współrzędną, otrzymując ciąg generujący dla miary $\text{Leb}_{\mathbb{T}}$ (przypadek $s = 0$). Jednakże nietrudno spostrzec, że tak otrzymany ciąg będzie funkcją arytmetyczną wolno zmieniającą się w średniej (a więc w sposób oczywisty ortogonalną do wszystkich układów monoergodycznych) w przeciwieństwie do ciągu (4.14).

Uwaga 4.7.8. Zauważmy, że $L := \{\mathbf{u} \in l^\infty(\mathbb{N}); \mathbf{u} \perp \text{UE}\}$ jest podprzestrzenią² przestrzeni $l^\infty(\mathbb{N})$ i ponadto L jest domknięta w pseudonormie Besicovitcha $\|\cdot\|_B$.

Rozważmy automorfizm $T(x, y, z) = (x, y + x, z + x + \alpha)$ przestrzeni $(\mathbb{T}^3, \text{Leb}_{\mathbb{T}^3})$, gdzie α jest liczbą niewymierną. Przypomnijmy, że ten automorfizm jest samopojądaniem rzędu 2 odwzorowania $(x, y) \mapsto (x, y + x)$ (na przestrzeni $(\mathbb{T}^2, \text{Leb}_{\mathbb{T}^2})$) oraz, że automorfizm T nie należy do klasy Erg^\perp (patrz: przykład 3.3.1).

Niech

$$F_1(x, y, z) = e^{2\pi iy}, F_2(x, y, z) = e^{2\pi iz}.$$

Zauważmy, że funkcje te są ortogonalne do wszystkich ergodycznych obrazów Markowa, gdyż są elementami przestrzeni L^2 odpowiadających faktorom, które należą do klasy Erg^\perp . Połóżmy

$$F(x, y, z) := F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z).$$

Wówczas tak określona funkcja F jest ortogonalna do wszystkich ergodycznych obrazów Markowa. Pokażemy jednak, że najmniejszym faktorem automorfizmu T , względem którego funkcja F jest mierzalna, jest cała σ -algebra i stąd otrzymamy, iż funkcja F nie jest mierzalna względem jakiegokolwiek faktora, który należy do klasy Erg^\perp .

Pokażemy, że proces stacjonarny $(F \circ T^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ rozdziela punkty przestrzeni \mathbb{T}^3 . Rzeczywiście, przypuśćmy, że

$$e^{2\pi inx}(e^{2\pi iy} + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi iz}) = e^{2\pi inx'}(e^{2\pi iy'} + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi iz'})$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$e^{2\pi in(x-x')}(e^{2\pi iy} + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi iz}) = e^{2\pi iy'} + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi iz'} \quad (4.15)$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$. Biorąc moduł po obu stronach, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| 1 + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi i(z-y)} \right| &= \left| e^{2\pi iy} + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi iz} \right| = \\ &= \left| 1 + e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi i(z'-y')} \right| \end{aligned}$$

²Zauważmy, że jeżeli ciągi \mathbf{u} i \mathbf{v} są wyznaczone przez układy dynamiczne z Erg^\perp , to $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$, ale ciąg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ niekoniecznie jest wyznaczony przez układ z Erg^\perp .

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$. Załóżmy, że $e^{2\pi i(z-y)} \neq e^{2\pi i(z'-y')}$. Wybierzmy liczby q_k w taki sposób, aby $q_k \alpha \rightarrow -(z-y) \pmod{1}$, gdy $k \rightarrow \infty$. Wówczas

$$2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| 1 + e^{2\pi i q_k \alpha} e^{2\pi i(z'-y')} \right| = \left| 1 + e^{2\pi i(z'-y')} e^{-2\pi i(z-y)} \right|,$$

co nie jest możliwe. Zatem mamy

$$e^{2\pi i(z-y)} = e^{2\pi i(z'-y')}. \quad (4.16)$$

Z (4.15) otrzymujemy, że

$$e^{2\pi i n(x-x')} e^{2\pi i y} \left(1 + e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i(z-y)} \right) = e^{2\pi i y'} \left(1 + e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i(z'-y')} \right),$$

więc z (4.16) mamy³

$$e^{2\pi i n(x-x')} = e^{2\pi i(y'-y)} \quad (4.17)$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$ (być może z wyjątkiem jednej wartości n). Stąd wynika, że $x = x' \pmod{1}$ i wówczas $y = y' \pmod{1}$. Z (4.16) natomiast wynika, że $z = z' \pmod{1}$. Zatem pokazaliśmy, iż algebra funkcji ciągłych generowana przez proces $F \circ T^n$, $n \in \mathbb{Z}$ rozdziela punkty, więc z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa jest ona gęsta w $C(\mathbb{T}^3)$, a stąd gęsta również w $L^2(\mathbb{T}^3, \text{Leb}_{\mathbb{T}^3}^{\otimes 3})$, co z kolei jest równoważne temu, że σ -algebra generowana przez rozważany proces jest równa $\mathcal{B}(\mathbb{T}^3)$.

Twierdzimy, że ciąg

$$\begin{aligned} (w_n) &:= ((\beta, 0, 0), (2\beta, 0, 0), T(2\beta, 0, 0), T^2(2\beta, 0, 0), T^3(2\beta, 0, 0), \\ &\quad \dots, (k\beta, 0, 0), T(k\beta, 0, 0), \dots, T^{k^2-1}(k\beta, 0, 0), \dots) = \quad (4.18) \\ &= ((\beta, 0, 0), (2\beta, 0, 0), (2\beta, 2\beta, 2\beta + \alpha), (2\beta, 4\beta, 4\beta + 2\alpha), (2\beta, 6\beta, 6\beta + 3\alpha), \\ &\quad \dots, (k\beta, 0, 0), (k\beta, k\beta, k\beta + \alpha), \dots, (k\beta, (k^2 - 1)k\beta, (k^2 - 1)k\beta + (k^2 - 1)\alpha)), \end{aligned}$$

gdzie liczby $1, \alpha, \beta$ są wymiennie niezależne, jest generujący dla miary $\text{Leb}_{\mathbb{T}^3}$. Istotnie, musimy pokazać, że dla dowolnych liczb $r, s, t \in \mathbb{Z}$ ($r^2 + s^2 + t^2 > 0$) i dowolnej funkcji $G(x, y, z) = G_{r,s,t}(x, y, z) := e^{2\pi i(rx+sy+tz)}$ mamy

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} G(w_n) \rightarrow 0, \text{ gdy } N \rightarrow \infty.$$

Tak jak w poprzednim przykładzie (patrz: akapit pod (4.12)), wystarczy rozważać $N = 1^2 + 2^2 + \dots + L^2$. Załóżmy najpierw, że $s^2 + t^2 \neq 0$. Wówczas, powtarzając rozumowanie z ostatniego przykładu, otrzymujemy

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} G(w_n) = \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} \sum_{j=0}^{k^2-1} G(T^j(k\beta, 0, 0)) =$$

³Zauważmy, że $1 + e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i(z-y)} = 0$ dla co najwyżej jednej wartości n .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} e^{2\pi i r k \beta} \sum_{j=0}^{k^2-1} e^{2\pi i (j s k \beta + t(j k \beta + j \alpha))} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k \leq L} e^{2\pi i r k \beta} \frac{e^{2\pi i k^2 (s k \beta + t(k \beta + \alpha))} - 1}{e^{2\pi i (s k \beta + t(k \beta + \alpha))} - 1}.
\end{aligned}$$

Ponieważ liczby $1, \alpha, \beta$ są wymiernie niezależne, więc dla $\varepsilon_0 > 0$ oraz wystarczająco dużej liczby L mamy

$$\left| \{k \leq L; |e^{2\pi i k^2 (s k \beta + t(k \beta + \alpha))} - 1| \geq \varepsilon_0\} \right| \geq (1 - 3\varepsilon_0)L$$

i dalej postępujemy jak w poprzednim przykładzie. Jeżeli $s = t = 0$, to otrzymujemy dokładnie sytuację z przykładu (4.12). Zatem (4.18) zachodzi. Kładąc $\mathbf{u}_j(n) := F_j(w_n)$ otrzymujemy, że

$$\mathbf{u}_1 \perp \text{UE} \text{ oraz } \mathbf{u}_2 \perp \text{UE},$$

gdyż obie funkcje są mierzalne względem odpowiednich faktorów automorfizmu T , które należą do klasy Erg^\perp . Stąd

$$\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \perp \text{UE}.$$

Ale ciąg \mathbf{u} powstaje z funkcji, która generuje układ niebędący elementem klasy Erg^\perp .

4.8 Problem Boshernitzana a kombinatoryka punktów quasi-generujących

4.8.1 Jak rozpoznać, że samopołączenie układu Furstenberga ma miarę produktową jako rzut?

Mamy więc układ Furstenberga $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ dla ciągu \mathbf{u} , który to układ identyfikujemy z następującą rozłączną sumą mnogościową

$$(X_{\mathbf{u}}, \kappa) = \bigsqcup_n (\bar{X}_{\mathbf{u},n} \times \{1, \dots, n\}, \bar{\kappa}|_{\bar{X}_{\mathbf{u},n}} \otimes \nu_n) \sqcup (\bar{X}_{\mathbf{u},\infty} \times Y, \bar{\kappa}|_{\bar{X}_{\mathbf{u},\infty}} \otimes \nu).$$

Niech $\rho \in J_2(S, \kappa)$.

Z (4.2) wynika, że

$$\rho|_{\bar{X}_{\mathbf{u}} \times \bar{X}_{\mathbf{u}}} = \bar{\kappa} \otimes \bar{\kappa} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \rho|_{X_{\mathbf{u}} \times \bar{X}_{\mathbf{u}}} = \kappa \otimes \bar{\kappa}.$$

Ostatnia równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich „jednomianów” $P = \prod_{j=1}^k \pi_0^{p_j} \circ S^{r_j}$ i $Q = \prod_{j=1}^\ell \pi_0^{q_j} \circ S^{s_j}$, mamy

$$\begin{aligned}
\int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} P(x) \mathbb{E}_\kappa[Q | \bar{X}_{\mathbf{u}}](x') d\rho(x, x') &= \\
&= \int_{X_{\mathbf{u}}} P d\kappa \int_{\bar{X}_{\mathbf{u}}} \mathbb{E}_\kappa[Q | \bar{X}_{\mathbf{u}}](\bar{x}') d\bar{\kappa}(\bar{x}') = \int_{X_{\mathbf{u}}} P d\kappa \int_{X_{\mathbf{u}}} Q d\kappa.
\end{aligned}$$

W przestrzeni $L^2(X_{\mathbf{u}}, \kappa)$ zachodzi następująca zbieżność

$$\mathbb{E}_{\kappa}[Q | \bar{X}_{\mathbf{u}}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} Q \circ S^n.$$

W tej równości możemy zastąpić $L^2(\kappa)$ przez $L^2(\rho)$ i stąd

$$\int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} P(x) \mathbb{E}_{\kappa}[Q | \bar{X}_{\mathbf{u}}](x') d\rho(x, x') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} P \otimes Q \circ S^n d\rho.$$

Z powyższych uwag wynika, że udowodniliśmy następujący wynik:

Stwierdzenie 4.8.1. *Zgodnie z powyższym oznaczeniem, niech $\rho \in J_2(S, \kappa)$. Wówczas $\rho|_{\bar{X}_{\mathbf{u}} \times \bar{X}_{\mathbf{u}}} = \bar{\kappa} \otimes \bar{\kappa}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich jednomianów P, Q mamy*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} P \otimes Q \circ S^n d\rho = \int_{X_{\mathbf{u}}} P d\kappa \int_{X_{\mathbf{u}}} Q d\kappa. \quad (4.19)$$

Założmy dodatkowo, że zbiór A wartości funkcji arytmetycznej \mathbf{u} jest skończony. Wówczas można rozpatrywać alternatywną wersję warunku (4.19) poprzez użycie funkcji charakterystycznych $\mathbb{1}_{[B]_0}$, gdzie $B \in A^k$, gdzie $k \geq 1$ (tutaj $[B]_s = \{x \in X_{\mathbf{u}}; \mathbf{u}[s, s+k-1] = B\}$) zamiast “jednomianów”. Ponieważ przesunięcia takich funkcji dają liniowo gęsty podzbiór w $L^2(\kappa)$, więc powtarzając wszystkie argumenty uzasadniające stwierdzenie 4.8.1, otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 4.8.2. *Zgodnie z powyższym zapisem niech $\rho \in J_2(S, \kappa)$. Wtedy $\rho|_{\bar{X}_{\mathbf{u}} \times \bar{X}_{\mathbf{u}}} = \bar{\kappa} \otimes \bar{\kappa}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich bloków $B \in A^k, C \in A^{\ell}$, gdzie $k, \ell \geq 1$ mamy*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \rho([B]_0 \times [C]_{-n}) = \kappa([B]_0) \kappa([C]_0). \quad (4.20)$$

Uwaga 4.8.3. Wniosek ten możemy sformułować w sposób równoważny: jeśli Φ_{ρ} oznacza operator Markowa odpowiadający samopołączeniu ρ , to $\Phi_{\rho}|_{L^2(\mathcal{I}_S)} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_{\rho} \circ \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} S^n \rightarrow 0$ słabo w $L^2_0(\kappa)$. Istotnie, na mocy twierdzenia von Neumanna mamy $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} S^n \rightarrow \mathbb{E}_{\kappa}[\cdot | \mathcal{I}_S]$ (w $L^2(\kappa)$).

Zauważmy, że lewa i prawa strona równości w (4.19) oraz w (4.20) będą obliczalne odpowiednio przez ciąg generujący $(S^n \mathbf{u}, S^{\phi_k(n)} \mathbf{u})$ wzdłuż (N_k) (patrz: twierdzenie 4.8.5 w następnym podrozdziale) i punkt generujący \mathbf{u} wzdłuż (N_k) .

4.8.2 Podsumowanie

Naszym celem jest opisanie tych funkcji arytmetycznych \mathbf{u} , które są ortogonalne do wszystkich monoergodycznych układów topologicznych (zakładamy, że funkcja \mathbf{u} ma zerową średnią na typowym krótkim przedziale). W tym celu dla wszystkich układów Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$ musimy sprawdzić założenia wniosku 4.6.2. Zajmujemy

się pewnymi samopółaczeniami $\lambda \in J_2(\kappa)$. W rzeczywistości, jak za chwilę zobaczymy, wszystkie z nich są opisane kombinatorycznie, przy użyciu jedynie funkcji \mathbf{u} , patrz: twierdzenie 4.8.5. Musimy sprawdzić założenie wniosku 4.6.2, które zgodnie z uwagą 4.6.3 (patrz: (*)) jest postaci

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} \left| \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} (\pi_0 \otimes \pi_0)(S \times S)^\ell \right|^2 d\lambda = 0.$$

To znaczy, biorąc $\varepsilon > 0$, dla $L > L_0$ chcemy zobaczyć czy

$$\int_{X_{\mathbf{u}} \times X_{\mathbf{u}}} \left| \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} (\pi_0 \otimes \pi_0)(S \times S)^\ell \right|^2 d\lambda < \varepsilon,$$

gdzie całka jest obliczalna wzdłuż podciągu (N_k) , więc (używając twierdzenia 4.8.5), potrzebujemy

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \left| \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} (\pi_0 \otimes \pi_0) \circ (S \times S)^\ell (S^n \mathbf{u}, S^{\phi_k(n)} \mathbf{u}) \right|^2 = \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \left| \frac{1}{L} \sum_{\ell \leq L} \mathbf{u}(n + \ell) \mathbf{u}(\phi_k(n) + \ell) \right|^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

co jest, z punktu widzenia kombinatorycznego, pewnym warunkiem zachowania na krótkich przedziałach. Jednakże jest jasne, że jeśli weźmiemy pod uwagę wszystkie samopółaczenia, to powyższy warunek nie jest spełniony (weźmy samopółaczenie diagonalne). Kluczem tutaj jest to, że rozważamy tylko te samopółaczenia λ , które spełniają (4.20) (lub (4.19)).

4.8.3 Aproksymacje samopółaczeń układów Furstenberga miarami empirycznymi

Rozważając funkcję arytmetyczną $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$, wiemy konkretnie, jak wyliczyć jej układy Furstenberga, gdyż są one (z definicji) *-słabymi granicami miar empirycznych, tj. są one postaci

$$\kappa = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \delta_{S^n \mathbf{u}}, \quad (4.21)$$

gdzie S jest shiftem na $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$, a (N_k) jest dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych takim, że granica (4.21) istnieje.

Celem tego podrozdziału jest uzyskanie podobnego opisu **dowolnego samopółaczenia rzędu 2 układów Furstenberga** funkcji \mathbf{u} . Nasze rozważania przeprowadzać będziemy w ogólnym kontekście, tzn. zakładamy, że X jest zwartą przestrzenią metryczną, zaś S jest homeomorfizmem przestrzeni X , a \mathbf{u} jest elementem przestrzeni X . Nadal odnosimy się do dowolnej *-słabej granicy postaci (4.21) jako do układu Furstenberga punktu \mathbf{u} . Potrzebujemy następującej definicji:

Definicja 4.8.4 (Lokalnie orbitalny ciąg permutacji). Niech $(N_k)_{k \geq 1}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych, a dla dowolnego $k \geq 1$ niech ϕ_k będzie permutacją zbioru $\{1, \dots, N_k\}$. Ciąg $(\phi_k)_{k \geq 1}$ nazywamy *lokalnie orbitalnym*, jeśli

$$\frac{1}{N_k} \left| \left\{ n \in \{1, \dots, N_k - 1\}; \phi_k(n+1) = \phi_k(n) + 1 \right\} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Dla takiej sekwencji permutacji rozważamy na kwadracie kartezjańskim $X \times X$ ciąg „miar empirycznych” postaci

$$\frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \delta_{(S^n \mathbf{u}, S^{\phi_k(n)} \mathbf{u})}. \quad (4.22)$$

Gdy ciąg (ϕ_k) jest lokalnie orbitalny, to dla odpowiednio dużego k te miary empiryczne w większości mają nośnik zawarty w długich fragmentach orbit odwzorowania $S \times S$.

Zauważmy, że każda miara empiryczna postaci (4.22) ma **oba** rozkłady brzegowe równe $\frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \delta_{S^n \mathbf{u}}$. Dlatego też warunkiem koniecznym, aby taki ciąg był zbieżny jest to, aby elementy \mathbf{u} był quasi-generujący dla pewnej miary S -niezmienniczej κ wzdłuż ciągu (N_k) . Co więcej, jeśli miara λ jest *-słabą granicą takiego ciągu, to warunek lokalnej orbitalności implikuje $S \times S$ -niezmienniczość miary λ . Stąd miara λ jest samopowiązaniem rzędu 2 układu Furstenberga κ elementu \mathbf{u} . Naszym celem jest teraz udowodnienie odwrotnego stwierdzenia.

Twierdzenie 4.8.5. *Niech \mathbf{u} będzie punktem quasi-generującym wzdłuż ciągu (N_k) dla pewnego układu Furstenberga κ , a miara λ niech będzie samopowiązaniem rzędu 2 miary κ . Wówczas istnieje lokalnie orbitalny ciąg (ϕ_k) , gdzie każda funkcja ϕ_k jest permutacją zbioru $\{1, \dots, N_k\}$, taki, że*

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \delta_{(S^n \mathbf{u}, S^{\phi_k(n)} \mathbf{u})}. \quad (4.23)$$

Bez dynamiki

Najpierw opiszemy strategię konstruowania odpowiednich permutacji bez uwzględniania dynamiki. Używamy jedynie faktu, że κ jest miarą probabilistyczną na przestrzeni X oraz λ jest samopowiązaniem rzędu 2 miary κ , czyli miarą probabilistyczną na przestrzeni $X \times X$ z oboma rozkładami brzegowymi równymi mierze κ . Ustalmy skończone rozbitcie \mathcal{P} przestrzeni X takie, że każdy atom P tego rozbitcia spełnia warunek $\kappa(P) > 0$. Rozważmy skończoną liczbę punktów $x_1, \dots, x_N \in X$ i dla każdego atomu $P \in \mathcal{P}$ definiujemy liczbę ich wizyt w P jako

$$V(P) := \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_P(x_n). \quad (4.24)$$

Załóżmy, że miara empiryczna $(1/N) \sum_{1 \leq n \leq N} \delta_{x_n}$ jest dobrym przybliżeniem miary κ na \mathcal{P} w następującym sensie: dla pewnej (małej) liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ mamy

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \left| \frac{V(P)}{N} - \kappa(P) \right| \leq \varepsilon \kappa(P). \quad (4.25)$$

Lemat 4.8.6. *Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że dla wystarczająco dużej liczby N (zależnie od \mathcal{P} , ε , κ i λ) możemy zdefiniować rodzinę nieujemnych liczb całkowitych*

$$(V(P \times P'))_{P, P' \in \mathcal{P}}$$

takich, że

$$\forall P, P' \in \mathcal{P}, \quad \left| \frac{V(P \times P')}{N} - \lambda(P \times P') \right| \leq 2\varepsilon \lambda(P \times P'), \quad (\text{C1})$$

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \sum_{P' \in \mathcal{P}} V(P \times P') \leq V(P), \quad (\text{C2})$$

$$\forall P' \in \mathcal{P}, \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} V(P \times P') \leq V(P'). \quad (\text{C3})$$

Co więcej, liczby te są takie, że zachodzi następująca implikacja: dla wszystkich atomów P_1, P'_1, P_2, P'_2 rozbitcia \mathcal{P} ,

$$\left. \begin{array}{l} \kappa(P_1) = \kappa(P_2), \\ V(P_1) = V(P_2), \\ \kappa(P'_1) = \kappa(P'_2), \\ V(P'_1) = V(P'_2), \\ \lambda(P_1 \times P'_1) = \lambda(P_2 \times P'_2), \end{array} \right\} \implies V(P_1 \times P'_1) = V(P_2 \times P'_2) \quad (\text{C4})$$

Dowód. Dla atomów $P, P' \in \mathcal{P}$ najpierw zdefiniujemy

$$V_1(P \times P') := \left\lfloor \frac{V(P) \lambda(P \times P')}{\kappa(P)} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że jeśli $\lambda(P \times P') = 0$, to warunek (C1) automatycznie zachodzi dla $V_1(P \times P')$. Natomiast używając (4.25) dla atomów $P, P' \in \mathcal{P}$ takich, że $\lambda(P \times P') > 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_1(P \times P')}{N} - \lambda(P \times P') \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{N} \left| V_1(P \times P') - \frac{V(P) \lambda(P \times P')}{\kappa(P)} \right| + \frac{\lambda(P \times P')}{\kappa(P)} \left| \frac{V(P)}{N} - \kappa(P) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{N} + \varepsilon \lambda(P \times P'). \end{aligned}$$

Stąd też (C1) zachodzi dla $V_1(P \times P')$ pod warunkiem, że (wybór N)

$$N \geq \max_{P, P' \in \mathcal{P}; \lambda(P \times P') > 0} \frac{1}{\varepsilon \lambda(P \times P')}. \quad (4.26)$$

Ale $V_1(P \times P') \leq \frac{V(P) \lambda(P \times P')}{\kappa(P)}$, więc wykorzystując fakt, że rzut na pierwszą współrzędną miary λ jest równy κ , oraz sumując tę nierówność po $P' \in \mathcal{P}$, otrzymujemy warunek (C2) dla V_1 . Ale nie ma oczywistego powodu, dla którego warunek

(C3) miałyby obowiązywać dla V_1 . Dlatego też wprowadzamy dla atomów $P, P' \in \mathcal{P}$ liczbę

$$V_2(P \times P') := \left\lfloor \frac{V(P') \lambda(P \times P')}{\kappa(P')} \right\rfloor.$$

Stosując analogiczne argumenty jak poprzednio, otrzymujemy, że (C1) obowiązuje dla $V_2(P \times P')$, jeśli liczba N spełnia (4.26) i tym razem (C3) zachodzi dla V_2 . Na koniec kładziemy

$$\forall P, P' \in \mathcal{P}, \quad V(P \times P') := \min\{V_1(P \times P'), V_2(P \times P')\}.$$

Ponieważ teraz

$$\sum_{P' \in \mathcal{P}} V(P \times P') \leq \sum_{P' \in \mathcal{P}} V_1(P \times P')$$

(z podobną nierównością dla V_2), więc nietrudno sprawdzić, że V spełnia wszystkie wymagane warunki. \square

Wniosek 4.8.7. *Przy założeniach lematu 4.8.6 oraz zakładając, że liczba N jest wystarczająco duża, aby spełnić (4.26), możemy skonstruować permutację ϕ zbioru $\{1, \dots, N\}$ taką, że*

$$\forall P, P' \in \mathcal{P}, \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_{P \times P'}(x_n, x_{\phi(n)}) - \lambda(P \times P') \right| \leq 4\varepsilon. \quad (4.27)$$

Dowód. Użyjemy rodziny liczb $(V(P \times P'))_{P, P' \in \mathcal{P}}$ z lematu 4.8.6. Dla ustalonego atomu $P \in \mathcal{P}$ rozważamy

$$A(P) := \left\{ n \in \{1, \dots, N\}; x_n \in P \right\}. \quad (4.28)$$

Zauważmy, że $|A(P)| = V(P)$ (patrz: (4.24)). Używając (C2), możemy znaleźć rozłączne podzbiory

$$A(P \times P') \subset A(P), \quad P' \in \mathcal{P},$$

takie, że $|A(P \times P')| = V(P \times P')$ dla wszystkich atomów $P' \in \mathcal{P}$. Oznaczamy

$$A := \bigsqcup_{P, P' \in \mathcal{P}} A(P \times P').$$

Podobnie, dla dowolnego ustalonego $P' \in \mathcal{P}$, używając (C3) możemy znaleźć rozłączne podzbiory

$$A'(P \times P') \subset A(P'), \quad P \in \mathcal{P},$$

spełniające $|A'(P \times P')| = V(P \times P')$ dla wszystkich $P \in \mathcal{P}$.

Definiujemy teraz permutację ϕ zbioru $\{1, \dots, N\}$ w następujący sposób:

- Dla wszystkich $P, P' \in \mathcal{P}$ definiujemy $\phi|_{A(P \times P')}$ jako dowolną bijekcję z $A(P \times P')$ do $A'(P \times P')$ (gdyż $|A(P \times P')| = |A'(P \times P')|$).

- Następnie definiujemy $\phi|_{\{1, \dots, N\} \setminus A}$ jako dowolną bijekcję z dopełnienia zbioru A do dopełnienia zbioru $\bigsqcup_{P, P' \in \mathcal{P}} A'(P \times P')$.

Zauważamy, że przy tym wyborze ϕ dla wszystkich $n \in A$ i $P, P' \in \mathcal{P}$ mamy

$$(x_n, x_{\phi(n)}) \in P \times P' \iff n \in A(P \times P').$$

Dlatego dla wszystkich P, P' w \mathcal{P} mamy

$$\sum_{n \in A} \mathbb{1}_{P \times P'}(x_n, x_{\phi(n)}) = |A(P \times P')| = V(P \times P'). \quad (4.29)$$

Z warunku (C1), dla wszystkich $P, P' \in \mathcal{P}$ mamy nierówność

$$|A(P \times P')| = V(P \times P') \geq N\lambda(P \times P')(1 - 2\varepsilon).$$

Sumując po wszystkich atomach P, P' , otrzymujemy

$$|A| = \sum_{P, P' \in \mathcal{P}} V(P \times P') \geq N(1 - 2\varepsilon). \quad (4.30)$$

Używając (4.29), (C1) i (4.30), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_{P \times P'}(x_n, x_{\phi(n)}) - \lambda(P \times P') \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n \in A} \mathbb{1}_{P \times P'}(x_n, x_{\phi(n)}) - \lambda(P \times P') \right| + \frac{N - |A|}{N} = \\ & = \left| \frac{V(P \times P')}{N} - \lambda(P \times P') \right| + 1 - \frac{|A|}{N} \leq \\ & \leq 2\varepsilon\lambda(P \times P') + 2\varepsilon \leq 4\varepsilon, \end{aligned}$$

co jest żadaną nierównością. \square

Kontekst dynamiczny

Teraz chcemy ulepszyć wniosek 4.8.7, biorąc pod uwagę działanie odwzorowania S na przestrzeni (X, κ) . Zastosujemy tę samą strategię i tę samą notację, co w poprzednim podrozdziale, ale z kilkoma dodatkowymi elementami, które umożliwiają uzyskanie warunku „lokalnie orbitalnego” dla permutacji.

Rozważana miara λ jest samopołączeniem układu dynamicznego (X, κ, S) (w porównaniu do poprzednich założeń zakładamy dodatkowo, że miara λ jest $(S \times S)$ -niezmiennicza). Ustalamy skończone rozbitcie \mathcal{Q} przestrzeni X , które na końcu posłuży do oszacowania różnicy między miarą empiryczną a samopołączeniem λ .

Najpierw jednak powtórzmy argumenty z początku tego podrozdziału, stosując inne rozbitcie \mathcal{P} , które uzyskujemy w następujący sposób: założymy, że dla pewnej (dużej) liczby całkowitej h mamy więź Rokhlina $(B, SB, \dots, S^{h-1}B)$ w przestrzeni (X, κ, S) , co oznacza, że podzbiory $B, SB, \dots, S^{h-1}B$ są parami rozłączne.

Oznaczmy $F := \bigsqcup_{0 \leq j \leq h-1} S^j B$ i załóżmy, że dla pewnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ mamy $\kappa(F) > 1 - \varepsilon$. Rozważamy rozbitcie \mathcal{P} przestrzeni X , którego atomami są zbiór $X \setminus F$ i wszystkie podzbiory postaci

$$S^j B \cap \bigcap_{-j \leq r \leq h-1-j} S^{-r} Q_r,$$

dla $0 \leq j \leq h-1$ i Q_j, \dots, Q_{h-1-j} -dowolnych atomów rozbitcia \mathcal{Q} (pod warunkiem, że taki podzbiór jest dodatniej miary κ). Innymi słowy, informacja dostarczana przez rozbitcie \mathcal{P} jest dokładnie taka: na którym poziomie wieży Rokhlina znajduje się punkt (lub czy mieści się w $X \setminus F$) i, gdy punkt jest w zbiorze F , jaka jest \mathcal{Q} -nazwa odczytana na fragmencie orbity odpowiadającym poziomowi w wieży Rokhlina. Zauważmy, że dla każdego \mathcal{P} -atomu zawartego w zbiorze $S^j B$, dla pewnego $0 \leq j \leq h-2$ zbiór SP jest \mathcal{P} -atomem zawartym w zbiorze $S^{j+1} B$.

Dla pewnej wystarczająco dużej liczby N , spełniającej (4.26) załóżmy, że mamy N punktów $x_1, \dots, x_N \in X$, które są kolejnymi obrazami odwzorowania S : $x_n = S^{n-1} x_1$ dla dowolnego $2 \leq n \leq N$. Dla każdego atomu $P \in \mathcal{P}$ definiujemy $V(P)$ i $A(P)$ jak poprzednio (patrz (4.24) i (4.28)) oraz zakładamy, że dla tej samej liczby $\varepsilon > 0$, warunek (4.25) jest spełniony. Ze względów technicznych zakładamy również, że

$$x_1 \notin \bigsqcup_{j=1}^{h-1} S^j B, \text{ i } x_N \notin \bigsqcup_{j=0}^{h-2} S^j B, \quad (4.31)$$

tak, że dla każdego \mathcal{P} -atomu $P \subset \bigsqcup_{j=0}^{h-2} S^j B$,

$$V(SP) = V(P), \quad (4.32)$$

i

$$A(SP) = A(P) + 1. \quad (4.33)$$

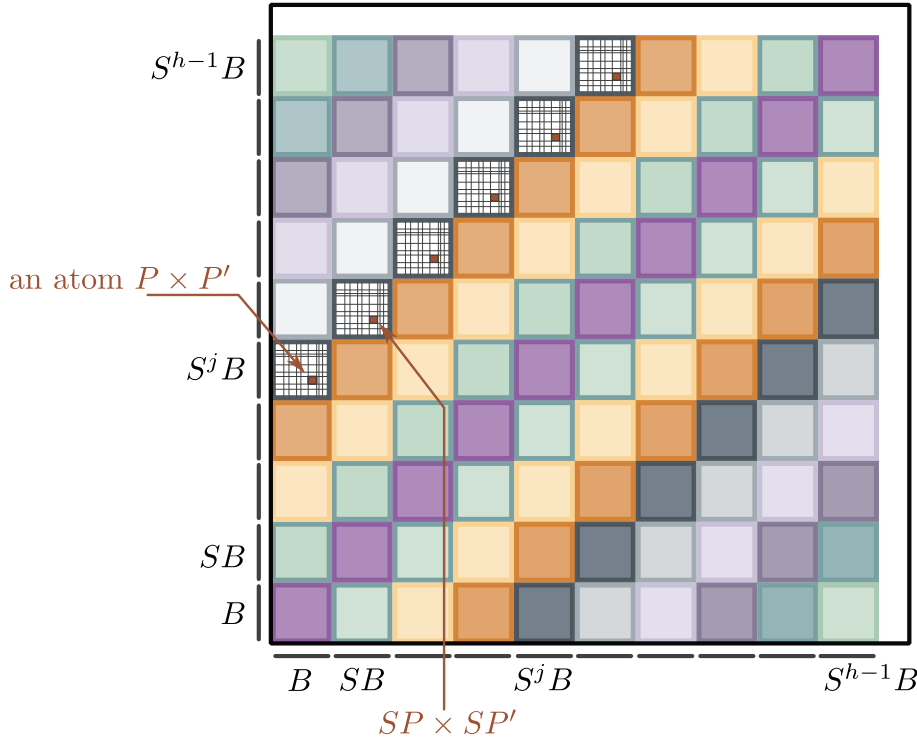
Lemat 4.8.8. *Przy powyższych założeniach możemy skonstruować permutację ϕ zbioru $\{1, \dots, N\}$ spełniającą*

$$\forall Q, Q' \in \mathcal{Q}, \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(x_n, x_{\phi(n)}) - \lambda(Q \times Q') \right| \leq 8\varepsilon, \quad (4.34)$$

oraz

$$\frac{1}{N} \left| \left\{ n \in \{1, \dots, N-1\}; \phi(n+1) \neq \phi(n) + 1 \right\} \right| \leq 4\varepsilon + \frac{2}{h} + \frac{2}{N}. \quad (4.35)$$

Dowód. Ponieważ wszystkie założenia lematu 4.8.6 są spełnione, więc dysponujemy liczbami $V(P \times P')$ z tego lematu. Zastosujemy tę samą strategię co w dowodzie wniosku 4.8.7, aby uzyskać permutację ϕ , tj. skonstruujemy podzbiory $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$ spełniające wszystkie wyżej wymienione własności, i zdefiniujemy permutację ϕ określając jej ograniczenie do każdego zbioru $A(P \times P')$ jako bijekcję do



Rysunek 4.1: Podział przestrzeni $X \times X$ na wieże Rokhlina. Przedstawiliśmy atomy $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ wewnątrz tylko jednej z tych wież Rokhlina.

zbioru $A'(P \times P')$. W niedynamicznym kontekście wniosku 4.8.7 mamy znaczną elastyczność w wyborze podzbiorów i bijekcji. Tutaj również wykorzystamy specyficzną strukturę rozbicia \mathcal{P} , aby narzucić dodatkowe warunki prowadzące do uzyskania własności „lokalnej orbitalności”. Aby to zrobić, zauważmy, że rozbicie przestrzeni X zdefiniowane przez wieżę Rokhlina $(B, SB, \dots, S^{h-1}B)$ indukuje rozbicie przestrzeni $X \times X$ jako rodzinę rozłącznych wież Rokhlina dla odwzorowania $S \times S$. Wieże te mają postać

$$\left(B \times S^j B, SB \times S^{j+1} B, \dots, S^{h-1-j} B \times S^{h-1} B \right) \quad (0 \leq j \leq h-1),$$

i

$$\left(S^j B \times B, S^{j+1} B \times SB, \dots, S^{h-1} B \times S^{h-1-j} B \right) \quad (1 \leq j \leq h-1).$$

(Zobacz rysunek 4.1.)

Używamy tej struktury do zdefiniowania podzbiorów $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$ (patrz: lemat 4.8.6) oraz obcięcia szukanej permutacji ϕ do zbioru $A(P \times P')$ w specjalnej kolejności, tak, aby spełniony był następujący warunek: dla wszystkich atomów $P, P' \in \mathcal{P}$, jeśli dla pewnych $j, j' \in \{0, \dots, h-2\}$ mamy $P \subset S^j B$ i $P' \subset S^{j'} B$ (czyli: $P \times P'$ jest zawarty na piętrze jednej z wież Rokhlina dla odwzorowania

$S \times S$, które to piętro nie jest najwyższe), wtedy

$$\begin{aligned} A(SP \times SP') &= A(P \times P') + 1, \\ A'(SP \times SP') &= A'(P \times P') + 1, \\ \text{i } \forall n \in A(P \times P'), \phi(n + 1) &= \phi(n) + 1. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Należy zauważyć, że przy powyższych warunkach, pierwsze dwie równości prawdopodobnie możemy spełnić, ponieważ ze względu na S -niezmienniczość miary κ , $S \times S$ -niezmienniczość miary λ oraz (4.32), warunek (C4) zapewnia równość $V(SP \times SP') = V(P \times P')$. Oto jak przebiega proces konstrukcji:

- Najpierw określamy podzbiory $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$ dla wszystkich atomów $P \times P'$ zawartych w podstawie $B \times B$ najwyższej wieży Rokhlina i definiujemy ograniczenie ϕ do dowolnego ze zbiorów $A(P \times P')$ jako dowolną bijekcję między $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$.
- Następnie dla tych samych atomów $P \times P'$ używamy warunku (4.36), aby indukcyjnie zdefiniować podzbiory $A(S^j P \times S^j P')$ i $A'(S^j P \times S^j P')$, ($1 \leq j \leq h - 1$) oraz ograniczenie odwzorowania ϕ do wszystkich tych zbiorów $A(S^j P \times S^j P')$. W tym momencie wykorzystaliśmy wszystkie atomy rozbicia $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ zawarte w wieży Rokhlina, której podstawą jest $B \times B$.
- Postępujemy w ten sam sposób dla drugiej wieży Rokhlina (tej, której podstawą jest $B \times SB$): dla wszystkich \mathcal{P} -atomów $P \subset B$, $P' \subset SB$, zaczynamy od wybrania podzbiorów $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$, upewniając się, że $A(P \times P')$ jest rozłączny ze wszystkimi zbiorami $A(P \times P'_1)$ i $P'_1 \subset B$, wybranymi wcześniej (jest to zawsze możliwe dzięki (C2)), i że $A'(P \times P')$ jest rozłączny ze wszystkimi zbiorami $A'(P_1 \times P')$, $P_1 \subset SB$, wybranymi wcześniej (ponownie, jest to zawsze możliwe dzięki (C3)). Następnie używamy warunku (4.36), aby indukcyjnie zdefiniować podzbiory $A(S^j P \times S^j P')$ i $A'(S^j P \times S^j P')$, ($1 \leq j \leq h - 2$), a także ograniczenia ϕ do wszystkich tych zbiorów $A(S^j P \times S^j P')$. Należy zauważyć, że rozłączność na poziomie podstawy implikuje rozłączność na wyższych poziomach.
- W ten sposób traktujemy wszystkie wieże Rokhlina po kolei. Dla każdej z nich kolejno wybieramy najpierw podzbiory $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$ z podstawy wieży, dbając o zapewnienie wszystkich niezbędnych rozłączności, które są możliwe dzięki (C2) i (C3), a następnie wybieramy dowolną bijekcję między tymi dwoma podzbiarami. Po rozpatrzeniu podstawy rozszerzamy naszą bijekcję na wszystkie wyższe poziomy w wieży dzięki (4.36).

Za pomocą tej procedury wybieramy wszystkie podzbiory $A(P \times P')$ i $A'(P \times P')$ oraz wszystkie bijekcje

$$\phi|_{A(P \times P')} : A(P \times P') \rightarrow A'(P \times P'),$$

dla wszystkich \mathcal{P} -atomów $P, P' \subset F$, zapewniając, że warunek (4.36) jest spełniony. Oznaczmy

$$A := \bigsqcup_{\substack{P, P' \in \mathcal{P} \\ P \subset F, P' \subset F}} A(P \times P').$$

Zauważmy, że na podstawie (C1) i założenia $\kappa(F) \geq 1 - \varepsilon$ (i faktu, że λ jest samo-
połączeniem miary κ) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{|A|}{N} &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{P, P' \in \mathcal{P} \\ P \subset F, P' \subset F}} V(P \times P') \geq (1 - 2\varepsilon) \sum_{\substack{P, P' \in \mathcal{P} \\ P \subset F, P' \subset F}} \lambda(P \times P') = \\ &= (1 - 2\varepsilon)\lambda(F \times F) \geq \\ &= (1 - 2\varepsilon)\lambda((X \times F) \cap (F \times X)) \geq \\ &\geq (1 - 2\varepsilon)^2 \geq 1 - 4\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Aby dopełnić obraz, zdefiniujemy odwzorowanie ϕ dowolnie na $\{1, \dots, N\} \setminus A$, aby uzyskać permutację całego zbioru $\{1, \dots, N\}$. Mając tak wybrane odwzorowanie ϕ , sprawdzimy zachodzenie (4.34). W tym celu musimy oszacować sumę

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(x_n, x_{\phi(n)}),$$

w której rozróżniamy dwa typy liczb n : te, które są w A i te, które są w jego dopełnieniu. Zgodnie z (4.37), wkład do sumy $\{1, \dots, N\} \setminus A$ jest ograniczony przez $4\varepsilon N$. Teraz dla n w A istnieją (jedyne) \mathcal{P} -atomy $P, P' \subset F$ takie, że $n \in A(P \times P')$, a następnie z konstrukcji ϕ wiemy, że $(x_n, x_{\phi(n)}) \in P \times P'$. Dlatego wkład tej liczby n wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $P \subset Q$ i $P' \subset Q'$. Wynika z tego, że całkowity wkład n należących do A do powyższej sumy wynosi

$$\sum_{\substack{P \subset Q \cap F \\ P' \subset Q' \cap F}} V(P \times P').$$

Zatem, używając (C1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(x_n, x_{\phi(n)}) - \lambda(Q \times Q') \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n \notin A} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(x_n, x_{\phi(n)}) + \left| \frac{1}{N} \sum_{\substack{P \subset Q \cap F \\ P' \subset Q' \cap F}} V(P \times P') - \lambda(Q \times Q') \right| \leq \\ &\leq 4\varepsilon + \left| \sum_{\substack{P \subset Q \cap F \\ P' \subset Q' \cap F}} \left(\frac{V(P \times P')}{N} - \lambda(P \times P') \right) \right| + \lambda((Q \times Q') \setminus (F \times F)). \end{aligned}$$

Zgodnie z (C1) drugi człon w powyższej sumie jest ograniczony przez 2ε i to samo dotyczy ostatniego członu, ponieważ $\kappa(F) \geq 1 - \varepsilon$. Zatem (4.34) zachodzi i teraz pozostaje udowodnić (4.35). Z (4.36) zbiór

$$\left\{ n \in \{1, \dots, N-1\}; \phi(n+1) \neq \phi(n) + 1 \right\}$$

jest zawarty w sumie mnogościowej następujących trzech podzbiorów zbioru $\{1, \dots, N\}$:

- $\{1, \dots, N\} \setminus A$, którego moc jest ograniczona przez $4\varepsilon N$ na mocy (4.37);
- $\{1 \leq n \leq N; x_n \in S^{h-1}B\}$, ale ponieważ x_n są kolejnymi punktami pewnej orbity odwzorowania S , więc luka między dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi w tym zbiorze wynosi zawsze co najmniej h . Dlatego też moc tego zbioru wynosi co najwyżej $\frac{N}{h} + 1$;
- $\{1 \leq n \leq N; x_{\phi(n)} \in S^{h-1}B\}$, który ma taką samą moc jak poprzedni, ponieważ ϕ jest bijekcją.

Suma mnogościowa tych trzech podzbiorów ma moc ograniczoną przez $4\varepsilon N + \frac{2N}{h} + 2$, co dowodzi (4.35). \square

Dowód twierdzenia 4.8.5

Zakładamy teraz, że (4.21) jest prawdziwe i przypomnijmy założenia: $\mathbf{u} \in X$ jest punktem quasi-generującym wzdłuż pewnego rosnącego ciągu (N_k) dla pewnego układu Furstenberga κ , λ jest samopółłączeniem rzędu 2 miary κ . Wyjaśnijmy strategię konstruowania lokalnie orbitalnego ciągu (ϕ_k) w dowodzonym stwierdzeniu. Po pierwsze, wskazujemy, że bez utraty ogólności możemy zawsze założyć, że nasz układ dynamiczny (X, κ, S) jest aperiodyczny. Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku, ustalamy pewną liczbę niewymierną α taką, że dla każdego $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $e^{2\pi i n \alpha}$ nie jest wartością własną operatora Koopmana $f \mapsto f \circ S$ na $L^2(X, \kappa)$. Rozważamy pomocniczy (teorio-miarowy) układ dynamiczny $(\mathbb{T}, \nu, T_\alpha)$, gdzie $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\nu = \text{Leb}_{\mathbb{T}}$, a $T_\alpha : y \mapsto y + \alpha \pmod{1}$. Ponieważ (\mathbb{T}, T_α) jest monoergodyczny, każdy punkt $y \in \mathbb{T}$ jest generujący dla ν (bierzemy na przykład $y = 0$). Ze względu na nasze założenie na α układ (X, κ, S) jest rozłączny z układem $(\mathbb{T}, \nu, T_\alpha)$. Stąd wynika, że w układzie produktowym $(X \times \mathbb{T}, S \times T_\alpha)$, punkt $(\mathbf{u}, 0)$ jest quasi-generujący wzdłuż tego samego ciągu (N_k) dla miary produktowej $\kappa \otimes \nu$. Możemy więc rozważyć $(\mathbf{u}, 0) \in X \times \mathbb{T}$ zamiast $\mathbf{u} \in X$, a wówczas układ teorio-miarowy $(X \times \mathbb{T}, \kappa \otimes \nu, S \times T_\alpha)$ jest aperiodyczny. W tym nowym układzie możemy rozszerzyć samopółłączenie λ do miary $\nu \otimes \lambda \otimes \nu$ na $(X \times \mathbb{T}) \times (X \times \mathbb{T})$ (rozpatrywanej jako samopółłączenie miary $\kappa \otimes \nu$). Teza twierdzenia 4.8.5 dla punktu $(\mathbf{u}, 0)$ i samopółłączenia $\nu \otimes \lambda \otimes \nu$ implikuje tezę tego twierdzenia dla ciągu \mathbf{u} i samopółłączenia λ .

Ustalmy teraz tzw. „dobry ciąg rozbić” $(\mathcal{Q}_\ell)_{\ell \geq 1}$ dla (X, κ) , który jest ciągiem skończonych rozbić spełniających następujące warunki:

- Dla dowolnego $\ell \geq 1$, $\mathcal{Q}_{\ell+1}$ rozdrabnia rozbiecie \mathcal{Q}_ℓ ,

- $\max_{Q \in \mathcal{Q}_\ell} \text{diam}(Q) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$,
- $\forall \ell \geq 1, \forall Q \in \mathcal{Q}_\ell, \kappa(\partial Q) = 0$.

W pracy [33] udowodniono, że taki ciąg zawsze istnieje i, co więcej, spełnia on dodatkową własność: $(\mathcal{Q}_\ell \times \mathcal{Q}_\ell)$ jest również dobrym ciągiem rozbić dla $(X \times X, \lambda)$. W szczególności słaba*-zbieżność ciągu (λ_n) miar probabilistycznych na $X \times X$ do λ jest równoważna warunkowi

$$\forall \ell \geq 1 \forall Q, Q' \in \mathcal{Q}_\ell, \quad \lambda_n(Q \times Q') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(Q \times Q'). \quad (4.38)$$

Ustalamy również ciąg (ε_ℓ) liczb dodatnich malejących do 0 i ciąg (h_ℓ) liczb całkowitych taki, że $\frac{1}{h_\ell} < \varepsilon_\ell$ dla wszystkich ℓ . W [33] wyjaśniono również, że dla dowolnego ℓ możemy znaleźć wieżę Rokhlina $(B_\ell, SB_\ell, \dots, S^{h_\ell-1}B_\ell)$ taką, że

- $\kappa\left(\bigsqcup_{0 \leq j \leq h_\ell-1} S^j B_\ell\right) > 1 - \varepsilon_\ell$,
- dla wszystkich j mamy $\kappa(\partial(S^j B_\ell)) = 0$.

Następnie dla każdego $\ell \geq 1$ konstruujemy rozbicie \mathcal{P}_ℓ z rozbięcia \mathcal{Q}_ℓ i powyższej wieży Rokhlina, w taki sam sposób w jaki konstruowaliśmy rozbicie \mathcal{P} z rozbięcia \mathcal{Q} i wieży Rokhlina $(B, \dots, S^{h-1}B)$ na początku części „Kontekst dynamiczny”. Ponieważ wszystkie atomy P rozbić \mathcal{P}_ℓ spełniają $\kappa(\partial P) = 0$, więc z (4.21) wynika, że

$$\forall \ell, \forall P \in \mathcal{P}_\ell, \quad \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \kappa(P).$$

Dzięki temu możemy zdefiniować

$$k_1 := \min \left\{ \begin{array}{l} K \geq 1; \forall k \geq K, \\ (4.26) \text{ zachodzi dla } N \geq N_k - 2h_1, \varepsilon = \varepsilon_1 \text{ i } \mathcal{P} = \mathcal{P}_1, \\ \text{i } \forall P \in \mathcal{P}_1, \frac{4h_1}{N_k} + \left| \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) - \kappa(P) \right| \leq \varepsilon_1 \end{array} \right\},$$

i indukcyjnie, dla wszystkich $\ell \geq 2$,

$$k_\ell := \min \left\{ \begin{array}{l} K \geq k_{\ell-1} + 1; \forall k \geq K, \\ (4.26) \text{ zachodzi dla } N \geq N_k - 2h_\ell, \varepsilon = \varepsilon_\ell \text{ i } \mathcal{P} = \mathcal{P}_\ell, \\ \text{i } \forall P \in \mathcal{P}_\ell, \frac{4h_\ell}{N_k} + \left| \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) - \kappa(P) \right| \leq \varepsilon_\ell \end{array} \right\}.$$

Rozważmy liczbę całkowitą k z $k_\ell \leq k < k_{\ell+1}$ dla pewnego $\ell \geq 1$. Chcemy użyć lematu 4.8.8, aby skonstruować permutację ϕ_k zbioru $\{1, \dots, N_k\}$, i w tym celu musimy sprecyzować, do których punktów x_n stosujemy lemat. Mając na celu spełnienie własności (4.31), kładziemy

$$x_1 := S^{i_1} \mathbf{u}, \text{ gdzie } i_1 := \min \left\{ i \geq 1 : S^i \mathbf{u} \notin \bigsqcup_{1 \leq j \leq h_\ell - 1} S^j B_\ell \right\}.$$

Mamy $i_1 \leq h_\ell$. Następnie bierzemy pod uwagę

$$i_2 := \max \left\{ i \leq N_k; S^i \mathbf{u} \notin \bigsqcup_{0 \leq j \leq h_\ell - 2} S^j B_\ell \right\},$$

(z określenia liczby k_ℓ wynika, że $h_\ell \leq \frac{\varepsilon_l N_k}{4}$). Mamy również $N_k - i_2 \leq h_\ell - 1$. Tak więc, kładąc $N := i_2 - i_1 + 1$, mamy $N_k - 2h_\ell \leq N \leq N_k$. I teraz punkty $x_n = S^{n+i_1-1} \mathbf{u}$, $1 \leq n \leq N$, spełniają dla każdego atomu $P \in \mathcal{P}_\ell$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_P(x_n) - \kappa(P) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbb{1}_P(x_n) - \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) \right| + \left| \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) - \kappa(P) \right| \leq \\ & \leq \frac{4h_\ell}{N_k} + \left| \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_P(S^n \mathbf{u}) - \kappa(P) \right| \leq \varepsilon_\ell. \end{aligned}$$

W ten sposób sprawdziliśmy warunek (4.25). Zatem wszystkie założenia lematu 4.8.8 są spełnione, a więc otrzymujemy permutację ϕ zbioru $\{i_1, \dots, i_2\}$ taką, że

$$\forall Q, Q' \in \mathcal{Q}_\ell, \quad \left| \frac{1}{i_2 - i_1 + 1} \sum_{i_1 \leq n \leq i_2} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(S^n \mathbf{u}, S^{\phi(n)} \mathbf{u}) - \lambda(Q \times Q') \right| \leq 8\varepsilon_\ell,$$

i

$$\frac{1}{N} \left| \left\{ n \in \{i_1, \dots, i_2\}; \phi(n+1) \neq \phi(n) + 1 \right\} \right| \leq 4\varepsilon_\ell + \frac{2}{h_\ell} + \frac{2}{N_k}. \quad (4.39)$$

Następnie możemy rozszerzyć ϕ do permutacji ϕ_k zbioru $\{1, \dots, N_k\}$, na przykład kładąc $\phi_k|_{\{1, \dots, i_1-1\} \cup \{i_2+1, \dots, N_k\}} := \text{Id}$. Jasne jest, że ciąg (ϕ_k) skonstruowany w ten sposób spełnia dla wszystkich $\ell \geq 1$,

$$\forall Q, Q' \in \mathcal{Q}_\ell, \quad \left| \frac{1}{N_k} \sum_{1 \leq n \leq N_k} \mathbb{1}_{Q \times Q'}(S^n \mathbf{u}, S^{\phi(n)} \mathbf{u}) - \lambda(Q \times Q') \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dzięki (4.38) daje to (4.23). Ponadto (4.39) zapewnia, że ciąg permutacji (ϕ_k) jest lokalnie orbitalny. To kończy dowód twierdzenia 4.8.5.

Rozdział 5

Klasy charakterystyczne i ortogonalność do układów monoergodycznych

5.0.1 Klasy charakterystyczne i rozłączność

W tej części rozważamy klasę charakterystyczną \mathcal{F} . Przypomnijmy, że każda nietrywialna klasa charakterystyczna zawiera klasę ID wszystkich identyczności [33].

Stwierdzenie 5.0.1. *Niech $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ i niech \mathcal{F} będzie klasą charakterystyczną. Niech $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ będzie największym \mathcal{F} -faktorem automorfizmu T . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

$$(i) \quad T \perp \mathcal{F} \cap \text{Erg},$$

$$(ii) \quad T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \perp \mathcal{F} \cap \text{Erg},$$

$$(iii) \quad T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \perp \text{Erg}.$$

Dowód. (ii) \Rightarrow (i) Weźmy dowolny automorfizm ergodyczny R z klasy charakterystycznej \mathcal{F} . Wówczas automorfizm $T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ jest rozłączny z automorfizmem R zgodnie z (ii). Jako, że $R \in \mathcal{F}$, to zgodnie z wnioskiem 2.3.99 rozłączność ta podnosi się do automorfizmu T . (ii) \Rightarrow (iii) Weźmy dowolny automorfizm R ergodyczny. Wtedy automorfizm $T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ jest rozłączny z największym \mathcal{F} -faktorem automorfizmu R (z (ii)). Ponieważ $T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \in \mathcal{F}$, to z wniosku 2.3.99 ta rozłączność podnosi się do automorfizmu R . Pozostałe implikacje wynikają w sposób bezpośredni. \square

Pamiętając, że $\mathcal{I}_T \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \pmod{\mu}$ i używając stwierdzenia 5.0.1 razem z twierdzeniem 3.2.1, otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 5.0.2. *$T \perp \mathcal{F} \cap \text{Erg}$ wtedy i tylko wtedy, gdy automorfizm $T|_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ jest domkniętym rozszerzeniem σ -algebry zbiorów niezmienniczych.*

Przykład 5.0.3. Niech $\mathcal{F}=\text{DISP}$ będzie (charakterystyczną) klasą wszystkich automorfizmów o dyskretnym widmie. Niech $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $T(x, y) = (x, y + x)$ (rozważane z $\text{Leb}_{\mathbb{T}^2}$). Łatwo zauważyć, że σ -algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ jest równa dokładnie σ -algebrze \mathcal{I}_T (czyli sigma-algebrze na pierwszej współrzędnej). Rzeczywiście, zauważmy, że na podprzestrzeni $L^2(\mathbb{T}^2) \ominus L^2(\mathbb{T} \otimes \{\emptyset, \mathbb{T}\})$ widmo jest czysto Lebesgue'a. Mamy również $T \in \text{Erg}^\perp$. Co więcej, dla dowolnego automorfizmu z klasy Erg^\perp jego jedyną wartością własną jest 1, więc jego faktor Kroneckera jest **zawsze** sigma-algebrą zbiorów niezmienniczych, podczas gdy dla automorfizmów włóknowych możemy mieć widmo dyskretne. Z drugiej strony, dla rozważanego automorfizmu T , na p.w. włóknach (składowych ergodycznych) widmo jest dyskretne, więc na p.w. włóknach największym \mathcal{F} -faktorem jest cała przestrzeń. Innymi słowy, ograniczenie faktora $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ do włókien **nie daje** (największych) \mathcal{F} -faktorów na włóknach.

Uwaga 5.0.4. W przeciwieństwie do faktora Kroneckera, faktor Pinsker'a $\Pi(T)$ automorfizmu T (największy faktor o zerowej entropii) zachowuje się „dobrze” na włóknach, tzn. dla $\bar{\mu}$ -p.w. $\bar{x} \in \bar{X}$ mamy $\Pi(T_{\bar{x}}) = \Pi(T)_{\bar{x}}$. W pracy [26] autorzy pokazali, że dla klasy $\mathcal{F} = \text{ZE}$ i faktora Pinsker'a zachodzi wniosek przypominający twierdzenie 3.2.1. W szczególności dla automorfizmu T otrzymujemy, że $T \perp \text{Erg} \cap \text{ZE}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $\Pi(T_{\bar{x}}) \perp \Pi(T_{\bar{x}'})$.

Uwaga 5.0.5. Dwie kolejne klasy: ID i NIL_1 (jak udowodniono w [33], ta druga klasa składa się z automorfizmów, których p.w. składowe ergodyczne mają widmo dyskretne) zachowują się podobnie do klasy ZE. Dla klasy ID ślad σ -algebry zbiorów niezmienniczych jest trywialną σ -algebrą na każdym włóknie. Dla klasy NIL_1 największy \mathcal{F} -faktor jest tzw. faktorem relatywnie Kroneckera nad σ -algebrą zbiorów niezmienniczych. W [33] udowodniono, że ten faktor pochodzi dokładnie od faktorów Kroneckera na włóknach, a w przypadku ergodycznym, ten relatywny faktor Kroneckera nad σ -algebrą zbiorów niezmienniczych (która jest trywialna w tym przypadku) jest dokładnie faktorem Kroneckera.

Uwaga 5.0.6. Mimo wątpliwości związanych ze zjawiskiem opisanym w przykładzie 5.0.3 wydaje się, że stwierdzenia:

(A) dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T_{\bar{x}}) \perp \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T_{\bar{x}'})$

oraz

(B) dla $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ -p.w. $(\bar{x}, \bar{x}') \in \bar{X} \times \bar{X}$ mamy $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)_{\bar{x}} \perp \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(T)_{\bar{x}'}$,

mogą być równoważne dla każdej klasy charakterystycznej \mathcal{F} .

5.0.2 Ortogonalność do monoergodycznych układów o zerowej entropii. Ogólny przypadek klasy charakterystycznej

Łączymy teraz problem Boshernitzana z podejściem [33] charakteryzującym funkcje arytmetyczne u ortogonalne do układów, których miary niezmiennicze determinują układy należące do ustalonej klasy charakterystycznej.

Jak zauważono w stwierdzeniu 2.3.101, nie musimy uciekać się do tak zwanych ec-klas w kontekście problemu Boshernitzana.

Stwierdzenie 5.0.7. Niech $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$. Niech \mathcal{F} będzie dowolną nietrywialną klasą charakterystyczną. Wówczas $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \mathcal{F}$ (tzn. $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$ mamy

$$\mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 \mid \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)] \perp F_{\text{we}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S). \quad (5.1)$$

Dowód. \Rightarrow Załóżmy, że $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \mathcal{F}$ oraz, że dla pewnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$ istnieje układ ergodyczny (Z', ν', R') , połączenie $\rho' \in J((R', \nu'), (S, \kappa))$ i funkcja $g \in L_0^2(\nu')$, dla której

$$\mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 \mid \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)] \not\perp \Phi_{\rho'}(g).$$

Ponieważ funkcja po lewej stronie jest mierzalna względem faktora z klasy charakterystycznej \mathcal{F} , możemy zastąpić powyższą funkcję g przez funkcję $\mathbb{E}_{\nu'}[g \mid \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(Z', \nu', R')]$. Zatem, zastępując w razie potrzeby układ (Z', ν', R') przez jego największy \mathcal{F} -faktor, możemy założyć bez utraty ogólności, że $R' \in \mathcal{F}$. Ale wówczas mamy

$$0 \neq \mathbb{E}_{\kappa}[\mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 \mid \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)] \Phi_{\rho'}(g)] = \mathbb{E}_{\kappa}[\pi_0 \Phi_{\rho'}(g)].$$

Następnie postępujemy tak jak w dowodzie twierdzenia 4.5.1: korzystając z twierdzenia Jewetta-Kriegera uzyskujemy, że istnieje układ monoergodyczny (należący do $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$) (Z, ν, R) i połączenie $\rho \in J((R, \nu), (S, \kappa))$ takie, że $\pi_0 \not\perp \text{Im}(\Phi_{\rho})$ (w $L^2(\kappa)$). Z tego wynika, że istnieje funkcja $f \in C(Z)$ taka, że $\int \Phi_{\rho}(f) \pi_0 d\kappa \neq 0$. Innymi słowy

$$\int_{Z \times X_{\mathbf{u}}} f \otimes \pi_0 d\rho \neq 0.$$

Niech ciąg (N_m) spełnia $\frac{1}{N_m} \sum_{n \leq N_m} \delta_{S^n \mathbf{u}} \rightarrow \kappa$. W świetle twierdzenia 2.4.14 istnieje ciąg $(z_n) \subset Z$ i podciąg (N_{m_ℓ}) takie, że

$$\frac{1}{N_{m_\ell}} \sum_{n \leq N_{m_\ell}} \delta_{(z_n, S^n \mathbf{u})} \rightarrow \rho$$

a zbiór $\{n \geq 1; z_n \neq Rz_{n-1}\}$ jest zawarty w podzbiorze \mathbb{N} postaci $\{b_1 < b_2 < \dots\}$, gdzie $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$. Dodając w razie potrzeby więcej elementów b_k do tego zbioru, możemy również założyć, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$. W ten sposób, definiując $K_\ell := \max\{k; b_k \leq N_{m_\ell}\}$, otrzymujemy $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{b_{K_\ell}}{N_{m_\ell}} = 1$, z czego wynika, że

$$\begin{aligned} 0 \neq \int f \otimes \pi_0 d\rho &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{m_\ell}} \sum_{n \leq N_{m_\ell}} f(z_n) \mathbf{u}(n) = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{K_\ell}} \sum_{k < K_\ell} \left(\sum_{b_k \leq n < b_{k+1}} f(R^{n-b_k} z_{b_k}) \mathbf{u}(n) \right). \end{aligned}$$

Jednakże, z naszego założenia ortogonalności na \mathbf{u} , ta ostatnia granica wynosi 0, ponieważ ciąg $(f(z_n))$ można zaobserwować w układzie orbitalnym opisanym w

twierdzeniu 2.4.15, który jest monoergodycznym elementem klasy charakterystycznej \mathcal{F} .

\Leftarrow Niech układ topologiczny (X, T) będzie monoergodyczny, a odpowiadający mu automorfizm miarowy niech będzie elementem klasy \mathcal{F} . Załóżmy, że dla pewnej funkcji $f \in C(X)$, pewnego elementu $x \in X$ i pewnego rosnącego ciągu (N_k) mamy istnienie granicy

$$c := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} f(T^n x) \mathbf{u}(n).$$

Ewentualnie przechodząc do jeszcze jednego podciągu, możemy również założyć, że

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(T^n x, S^n \mathbf{u})} \rightarrow \rho.$$

Wtedy ρ jest połączeniem, $\rho \in J((T, \nu), (S, \kappa))$, gdzie ν jest jedyną miarą niezmienniczą dla T , a $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Teraz, ponieważ $(X, \nu, T) \in \mathcal{F}$, więc na podstawie twierdzenia 2.3.98 otrzymujemy

$$c = \int f \otimes \pi_0 d\rho = \int f \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)] d\rho.$$

Więc z założenia, że

$$\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)] \perp F_{\text{we}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S),$$

otrzymujemy, że $c = 0$. \square

Zauważmy, że jeśli jako \mathcal{F} weźmiemy klasę wszystkich układów zachowujących miarę, to otrzymamy oryginalny problem Boshernitzana i uzyskamy wynik podany w stwierdzeniu 4.5.1.

Stwierdzenie 5.0.7 pozwala nam na bezpośrednie użycie twierdzenie 4.2.1 i wniosku 4.6.2 (gdzie T zastąpiono dowolnym układem Furstenberga funkcji arytmetycznej \mathbf{u}).

Wniosek 5.0.8. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\mathbf{u} \perp \mathcal{F} \cap \text{UE}$.

(b) Dla dowolnego układu Furstenberga κ funkcji \mathbf{u} zachodzi następująca zależność: dla dowolnego samopółłączenia $\lambda \in J_2^{\text{RelErg}}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ (w szczególności $\lambda|_{\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S} = \kappa|_{\mathcal{I}_S} \otimes \kappa|_{\mathcal{I}_S}$), mamy

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}] \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}] | \mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S \right] = \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S] \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S]. \quad (5.2)$$

(c) Dla dowolnego układu Furstenberga κ funkcji \mathbf{u} zachodzi następująca zależność: dla dowolnego samopółłączenia $\lambda \in J_2(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ gdzie $\lambda|_{\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S} = \kappa|_{\mathcal{I}_S} \otimes \kappa|_{\mathcal{I}_S}$ mamy

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}] \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}] | \mathcal{I}_{S \times S} \right] = \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S] \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S]. \quad (5.3)$$

5.0.3 Przykłady

Klasa ID

Przykład 5.0.9. Rozważmy klasę ID wszystkich identyczności. Wtedy funkcja $\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}]$ jest $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ -mierzalna, gdzie $\mathcal{A}_\mathcal{F} = \mathcal{I}_S$, a funkcja $\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}] \otimes \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{A}_\mathcal{F}]$ jest $\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{I}_S$ -mierzalna, więc warunek (5.2) zachodzi. Wynika z tego, że teza (a) wniosku 5.0.8 zachodzi. Ale funkcja $\mathbb{E}_\kappa(\pi_0 | \mathcal{I}_S)$ jest niezmiennicza, więc jest ona ortogonalna do ergodycznych obrazów markowowskich (patrz: (5.1)) dokładnie wtedy, gdy ma całkę zero. Stąd jedynym ograniczeniem na π_0 (i κ) jest warunek (2.24), tj. średnia funkcji \mathbf{u} jest równa 0. Zauważmy, że ponieważ jedyną ergodyczną identycznością jest układ jednopunktowy, więc pasuje to do oczywistego warunku zerowej średniej funkcji \mathbf{u} , ponieważ te funkcje arytmetyczne są ortogonalne do wszystkich monoergodycznych identyczności.

Przypadek widma dyskretnego

Będziemy potrzebować następującej obserwacji ($R_\alpha(z) = ze^{2\pi i\alpha}$ oznacza obrót niewymierny o α na \mathbb{S}^1):

Lemat 5.0.10. *Założmy, że $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Założmy również, że $0 \neq F \in L^2(X, \mu)$ spełnia $F \circ T = e^{2\pi i\alpha} F$ (p.w.), gdzie $\alpha \in [0, 1)$ jest liczbą niewymierną. Wówczas istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbb{S}^1, \text{Leb})$ taka, że $g \circ R_\alpha = e^{2\pi i\alpha} g$ i połączenie $\rho \in J(T, R_\alpha)$ spełniające warunek $\int_{X \times \mathbb{S}^1} F(x)g(z) d\rho(x, z) \neq 0$.*

Dowód. Ponieważ liczba α jest niewymierna, więc $F|_{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n} = 0$. Możemy zatem założyć bez straty ogólności, że automorfizm T jest aperiodyczny, tj. T jest automorfizmem przestrzeni $(\bar{X} \times Y, \bar{\mu} \otimes \nu)$, gdzie $T(\bar{x}, y) = (\bar{x}, T_{\bar{x}}y)$, przy czym $\bar{x} \mapsto T_{\bar{x}} \in \text{Aut}(Y, \nu)$ jest rozkładem na składowe ergodyczne automorfizmu T .

Niech $A := \{\bar{x} \in \bar{X}; F(\bar{x}, \cdot) \neq 0 \text{ } \nu - \text{p.w.}\}$. Wtedy $\bar{\mu}(A) > 0$. Zauważmy, że dla $\bar{x} \in A$, funkcja $F(\bar{x}, \cdot)$ jest funkcją własną dla automorfizmu $T_{\bar{x}}$ odpowiadającą wartości własnej $e^{2\pi i\alpha}$. Z ergodyczności wynika, że $|F(\bar{x}, \cdot)| =: \xi(\bar{x}) > 0$ (dla p.w. $\bar{x} \in A$; poza zbiorem A funkcja F przyjmuje wartość 0).

Niech $G : A \times Y \rightarrow \mathbb{S}^1$, $G(\bar{x}, y) = F(\bar{x}, y)/\xi(\bar{x})$. Wtedy G jest nadal funkcją własną dla automorfizmu $T|_{A \times Y}$ odpowiadającą wartości własnej $e^{2\pi i\alpha}$. Wynika stąd, że $G \circ T|_{A \times Y} = R_\alpha \circ G$. Co więcej, $G_*(\bar{\mu}|_A \otimes \nu) = \text{Leb}$, ponieważ miara po lewej stronie musi być R_α -niezmiennicza. Wynika z tego, że G jest odwzorowaniem faktoryzującym pomiędzy $T|_{A \times Y}$ i R_α , a więc możemy rozważyć odpowiadające mu połączenie wykresowe $\rho_1 := \Delta_G$. Łączymy również automorfizm $T|_{A^c \times Y}$ z obrotem R_α , przyjmując jako połączenie ρ_2 miarę produktową. Interesujące nas połączenie ρ jest kombinacją wypukłą połączeń ρ_1 i ρ_2 postaci $\bar{\mu}(A)\rho_1 + (1 - \bar{\mu}(A))\rho_2$. Zatem dla $\tilde{B} \subset \bar{X} \times Y$ i $C \subset \mathbb{S}^1$ mamy

$$\rho(\tilde{B} \times C) = \bar{\mu}(A)\rho_1((\tilde{B} \cap (A \times Y)) \times C) + (1 - \bar{\mu}(A))\rho_2((\tilde{B} \cap (A^c \times Y)) \times C).$$

Położmy $\chi(z) = z$, która jest funkcją własną obrotu R_α (odpowiadającą wartości

własnej $e^{2\pi i\alpha}$). Mamy zatem

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{X} \times Y \times \mathbb{S}^1} F(\bar{x}, y) \overline{\chi}(z) d\rho(\bar{x}, y, z) = \\ &= \bar{\mu}(A) \int_{A \times Y \times \mathbb{S}^1} F(\bar{x}, y) \overline{\chi}(z) d\rho_1(\bar{x}, y, z) + (1 - \bar{\mu}(A)) \int_{A^c \times Y \times \mathbb{S}^1} F(\bar{x}, y) \overline{\chi}(z) d\rho_2(\bar{x}, y, z) = \\ &= \bar{\mu}(A) \int_{A \times Y \times \mathbb{S}^1} F(\bar{x}, y) \overline{\chi \circ G}(\bar{x}, y) d(\bar{\mu}|_A \otimes \nu)(\bar{x}, y) = \\ &= \int_{A \times Y} F(\bar{x}, y) \overline{G(\bar{x}, y)} d(\bar{\mu}|_A \otimes \nu)(\bar{x}, y) = \int_A \xi(\bar{x}) d\bar{\mu}(\bar{x}) > 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

Uwaga 5.0.11. Zauważmy, że teza lematu 5.0.10 nie zachodzi, jeśli $\alpha = 0$. Rzeczywiście, jak zauważyliśmy wcześniej, każda funkcja niezmiennicza F o średniej zerowej jest ortogonalna do wszystkich ergodycznych obrazów Markowa (ponieważ funkcja F jest mierzalna względem σ -algebry zbiorów niezmienniczych, a ten faktor jest rozłączny ze wszystkimi automorfizmami ergodycznymi). W powyższym dowodzie ważne było, aby średnia funkcji χ była równa zero, co w końcowym rachunku spowodowało zniknięcie części połączenia ρ danej przez miarę produktową ρ_2 .

Pomimo powyższej uwagi pokażemy, że teza lematu 5.0.10 jest prawdziwa dla $\alpha \neq 0$. Dla uproszczenia założymy, że $\alpha = 1/2$, tj. rozważamy wartość własną -1 . Załóżmy najpierw, że automorfizm T jest nadal aperiodyczny. Zauważmy, że jeśli $F \circ T = -F$, to mamy tę samą relację na składowych ergodycznych. Wówczas F^2 jest funkcją niezmienniczą, więc widzimy, że na każdej składowej ergodycznej $\{\bar{x}\} \times Y$ funkcja $F(\bar{x}, \cdot)$ ma (jak poprzednio) stały moduł $\xi(\bar{x})$ i przyjmuje dwie wartości, albo $c_{\bar{x}}$ albo $-c_{\bar{x}}$. Ponadto jeśli $F(\bar{x}, y) = c_{\bar{x}}$ to $F \circ T(\bar{x}, y) = -c_{\bar{x}}$. Jeżeli ustalimy $y_0 \in Y$, to biorąc $F(\bar{x}, y_0)$, dokonujemy mierzalnego wyboru wartości $d_{\bar{x}}$ (równej albo $c_{\bar{x}}$ albo $-c_{\bar{x}}$) na każdym włóknie $\{\bar{x}\} \times Y$. Twierdzimy teraz, że możemy znaleźć podzbiór $A' \subset A$ dodatniej miary oraz mierzalny wybór $A' \ni \bar{x} \mapsto d_{\bar{x}}$ takie, że

$$\int_{A' \times Y} |F(\bar{x}, y)|^2 \frac{1}{d_{\bar{x}}} d(\bar{\mu} \otimes \nu)(\bar{x}, y) = \int_{A'} \xi(\bar{x})^2 / d_{\bar{x}} d\bar{\mu}(\bar{x}) \neq 0. \quad (5.4)$$

Rzeczywiście, istnienie zbioru A' wynika z faktu, że funkcja podcałkowa jest różna od zera. Definiujemy funkcję $G : A' \times Y \rightarrow \{-1, 1\}$ jako $G(\bar{x}, y) = F(\bar{x}, y)/d_{\bar{x}}$ i powtarzamy poprzedni dowód z okręgiem zastąpionym przez grupę $\{-1, 1\}$, $R_{1/2}(j) = -j$ i $\chi(j) = j$ (której średnia wynosi zero).

Aby poradzić sobie z ogólnym przypadkiem, najpierw założymy, że część aperiodyczna jest nietrywialna, znajdziemy dobre połączenie tej części z obrotem $R_{1/2}$, a następnie uzupełnimy to połączenie do pełnego połączenia automorfizmów T i $R_{1/2}$ poprzez wzięcie połączenia produktowego części $T|_{X_n}$ ($n \geq 1$) z $R_{1/2}$. Wreszcie, jeśli nie ma części aperiodycznej, to musi istnieć nietrywialna część okresowa $T|_{X_{n_0}}$ dla

pewnego $n_0 \geq 2$. Następnie powtarzamy dowód przypadku aperiodycznego, zastępując automorfizm T przez automorfizm $T|_{X_{n_0}}$.

Dla danej przeliczalnej podgrupy G oznaczmy przez $\text{DISP}_G \subset \mathbb{S}^1$ rodzinę automorfizmów o dyskretnym widmie, których zbiór wartości własnych jest zawarty w podgrupie G . Ta rodzina tworzy klasę charakterystyczną.

Stwierdzenie 5.0.12. *Niech G będzie przeliczalną podgrupą okręgu. Wówczas mamy $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \text{DISP}_G$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$ zachodzi $\sigma_{\pi_0, \kappa}(\{z\}) = 0$, gdzie $z \in G \setminus \{1\}$.*

Dowód. \implies : (przez kontrapozycję) Załóżmy, że dla pewnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$ mamy

$$\kappa = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{S^n \mathbf{u}}.$$

Załóżmy, że dla pewnego $1 \neq z_0 \in G$ mamy $\sigma_{\pi_0, \kappa}(\{z_0\}) > 0$, to znaczy, że miara spektralna funkcji π_0 ma atom w z_0 . Z tego wynika, że

$$\pi_0 = \pi_{z_0} + \pi_{z_0}^\perp,$$

gdzie π_{z_0} oznacza rzut ortogonalny funkcji π_0 na podprzestrzeń funkcji własnych odpowiadających wartości własnej $z_0 = e^{2\pi i \alpha}$ (zakładamy, że α jest niewymierne, w przypadku wymiernym $z_0 \neq 1$ dowód przebiega podobnie). W świetle lematu 5.0.10 istnieje połączenie $\rho \in J((X_{\mathbf{u}}, \kappa, S), R_\alpha)$ takie, że

$$\int \pi_{z_0}(\omega) \overline{\chi(z)} d\rho(\omega, z) \neq 0. \quad (5.5)$$

Z twierdzenia 2.4.14 (ewentualnie przechodząc do podciągu ciągu (N_k)), otrzymujemy ciąg generujący $((S^n \mathbf{u}), (w_n))$ (wzdłuż (N_k)) dla połączenia ρ :

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \delta_{(S^n \mathbf{u}, w_n)} \rightarrow \rho,$$

gdzie zbiór $\{n; w_{n+1} \neq R_\alpha w_n\}$ ma postać $b_1 < b_2 < \dots$ z $b_{k+1} - b_k \rightarrow \infty$. Używając ciągu (w_n) , przechodzimy do odpowiadającego modelu orbitalnego, aby uzyskać nowy, monoergodyczny układ (Y, S) , który jest modelem obrotu niewymiernego R_α . Z tego wynika, że $(\underline{w} := (w_n))$ i $\tilde{\chi}((y_n)) = \chi(y_0)$

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \mathbf{u}(n) \tilde{\chi}(S^n \underline{w}) = \frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \pi_0(S^n \mathbf{u}) \chi(w_n) \rightarrow \int \pi_0 \otimes \bar{\chi} d\rho.$$

Ponieważ $\pi_{z_0}^\perp \perp \chi$ (w $L^2(\rho)$ miary spektralne $\sigma_{\pi_{z_0}^\perp \otimes 1}$ i $\sigma_{1 \otimes \chi}$ są wzajemnie osobliwe), więc

$$\int \pi_0 \otimes \bar{\chi} d\rho = \int (\pi_{z_0} + \pi_{z_0}^\perp) \otimes \bar{\chi} d\rho =$$

$$= \int \pi_{z_0} \otimes \bar{\chi} d\rho \neq 0,$$

a stąd wynika teza (\mathbf{u} koreluje z monoergodycznym układem mającym grupę wartości własnych zawartą w G).

\Leftarrow (przez kontrapozycję): Załóżmy, że $\mathbf{u} \not\perp (X, T)$ dla pewnego monoergodycznego układu topologicznego (X, T) , dla którego $M(X, T) = \{\nu\}$, a grupa wartości własnych automorfizmu (T, ν) jest zawarta w G . Zatem dla pewnego ciągu (N_k) , pewnej funkcji $f \in C(X)$ i pewnego $x \in X$ mamy $\frac{1}{N_k} \sum_{n \leq N_k} \mathbf{u}(n) f(T^n x) \rightarrow c \neq 0$. Ewentualnie przechodząc do podciągu ciągu (N_k) , otrzymujemy

$$c = \int \pi_0 \otimes f d\rho = \int \pi_0 \mathbb{E}_\rho[1 \otimes f | X_{\mathbf{u}}] d\kappa.$$

Ponieważ automorfizm (T, ν) jest ergodyczny z dyskretnym widmem zawartym w G (możemy również założyć, że $\int f = 0$), więc miara spektralna funkcji f ma tylko atomy w $G \setminus \{1\}$. Miara spektralna funkcji $\mathbb{E}_\rho[1 \otimes f | X_{\mathbf{u}}]$ jest absolutnie ciągła względem miary σ_f , więc jest również czysto atomowa i ma atomy zawarte w $G \setminus \{1\}$. Ponieważ funkcja π_0 nie jest ortogonalna do funkcji $\mathbb{E}_\rho[1 \otimes f | X_{\mathbf{u}}]$, więc jej miara spektralna ma atom należący do zbioru $G \setminus \{1\}$. \square

Uwaga 5.0.13. W rzeczywistości udowodniliśmy następujący fakt: *Założmy, że $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ i $f \in L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Wówczas $f \perp L^2(\text{Im}(\Phi_\rho))$ dla dowolnego połączenia $\rho \in J(R, T)$ i wszystkich automorfizmów R ergodycznych z dyskretnym widmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_f \ll \eta + \delta_{\{1\}}$ dla pewnej miary ciągłej η (na \mathbb{S}^1).*

Ponieważ warunek $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \text{DISP}$ jest równoważny $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \text{DISP}_G$ dla wszystkich przeliczalnych podgrup $G \subset \mathbb{S}^1$, więc otrzymujemy następujący wynik:

Stwierdzenie 5.0.14. *Założmy, że $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$, $M(\mathbf{u}) = 0$. Wówczas $\mathbf{u} \perp \text{UE} \cap \text{DISP}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$, miara spektralna $\sigma_{\pi_0, \kappa} \ll \eta + \delta_{\{1\}}$ dla pewnej ciągłej miary η .*

Ważną obserwacją jest zatem to, że na mocy lematu Wienera (patrz: lemat 2.2.1) oraz (2.4) mamy: dla dowolnej miary borelowskiej (skończonej, nieujemnej) σ na okręgu

$$\begin{aligned} \sum_{1 \neq z} |\sigma(\{z\})|^2 &= \sum_z |\sigma(\{z\})|^2 - |\sigma(\{1\})|^2 = \\ &= \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} |\hat{\sigma}(h)|^2 - \left| \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \hat{\sigma}(h) \right|^2. \end{aligned}$$

Granice tego rodzaju zastosowane do funkcji π_0 w dowolnym układzie Furstenberga $(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$ funkcji arytmetycznej \mathbf{u} są wyrażalne w terminach autokorelacji funkcji \mathbf{u} . Na przykład mamy następujący:

Wniosek 5.0.15. *Załóżmy, że \mathbf{u} jest punktem generującym. Wtedy funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich monoergodycznych modeli automorfizmów ergodycznych o dyskretnym widmie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{aligned} & \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mathbf{u}(n+h) \overline{\mathbf{u}(n)} \right|^2 = \\ & = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mathbf{u}(n+h) \overline{\mathbf{u}(n)} \right|^2 = \\ & = \left| \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mathbf{u}(n+h) \overline{\mathbf{u}(n)} \right|^2. \end{aligned}$$

Rozdział 6

Funkcje arytmetyczne

6.1 Pretensjonalna funkcja masyplikatywna ortogonalna do wszystkich układów monoergodycznych

Przypomnijmy, że przez \mathbb{D} oznaczamy dysk jednostkowy w \mathbb{C} . Rozważamy funkcje arytmetyczne $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$, które są masyplikatywne, tzn. $\mathbf{u}(mn) = \mathbf{u}(m)\mathbf{u}(n)$, gdy m i n są liczbami względnie pierwszymi. Przypomnijmy, że charaktery Archimiedesa $n \mapsto n^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$) są funkcjami wolno zmieniającymi się w średniej i stąd ich układami Furstenberga są tylko identyczności (dokładny opis tych identyczności znajduje się w pracy [25]). Pamiętając, że charaktery Archimiedesa nie mają średniej, stosując np. stwierdzenie 4.5.1 wnioskujemy, że charaktery Archimiedesa są funkcjami ortogonalnymi do wszystkich układów monoergodycznych.

Naszym celem jest udowodnienie następującego wniosku:

Wniosek 6.1.1. *Jedynymi pretensjonalnymi funkcjami masyplikatywnymi $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ ortogonalnymi do wszystkich układów monoergodycznych są charaktery Archimiedesa $n \mapsto n^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja \mathbf{u} nie jest charakterem Archimiedesa. Wtedy mamy $D(\mathbf{u}, \chi \cdot n^{it}) < \infty$, gdzie χ jest nietrywialnym pierwotnym charakterem Dirichleta. Rozważmy dwa przypadki:

1. Jeśli $t = 0$, to na mocy twierdzenia 2.8(i) w [17], wszystkie układy Furstenberga funkcji \mathbf{u} są ergodyczne. Ponadto o ile $\mathbf{u} \neq 1$, to każdy z tych układów Furstenberga jest układem nietrywialnym (czyli różnym od układu jednopunktowego). Stąd π_0 nie spełnia warunku ze stwierdzenia 4.5.1.
2. Jeśli $t \neq 0$, to, ponieważ funkcja \mathbf{u} nie jest (z założenia) charakterem Archimiedesa, więc na mocy twierdzenia 2.8(ii) [17], jego widmo nie może być trywialne. Z tego samego twierdzenia wynika, że każdy układ Furstenberga ma postać $\text{Id} \times T$, gdzie T jest nietrywialnym automorfizmem ergodycznym. Teraz, ponieważ $\mathbf{u} \perp \text{UE}$, to w świetle stwierdzenia 4.5.1 mamy, że $\pi_0 \perp F_{\text{we},0}(X_{\mathbf{u}}, \kappa, S)$

dla dowolnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Ze stwierdzenia 4.1.5 wynika, że dla dowolnego $\kappa \in V(\mathbf{u})$, funkcja π_0 jest κ -p.w. mierzalna względem \mathcal{I}_S . Jednak wówczas \mathcal{I}_S jest σ -algebrą generowaną przez proces $(\pi_0 \circ S^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, co oznacza, że działa on jako identyczność. Jest to sprzeczne z faktem, że w układach Furstenberga funkcji \mathbf{u} mamy nietrywialną część ergodyczną.

□

Uwaga 6.1.2. W świetle ostatnich postępów wokół hipotez Chowli i Sarnaka, rozsądne jest oczekiwanie, że charaktery Archimedesusa i funkcje moltiplikatywne o zerowej pseudo-normie Besicovitcha są jedynymi (ograniczonymi przez 1) funkcjami moltiplikatywnymi, które są ortogonalne do wszystkich układów monoergodycznych.

6.1.1 Zastosowanie: uśredniona własność Chowli

Pokażemy teraz, że uśredniona hipoteza Chowli (patrz: przypis 14 lub uwaga 6.1.4) dla funkcji arytmetycznej \mathbf{u} jest równoważna hipotezie ortogonalności (1.1) dla układów topologicznych, których wszystkie miary niezmiennicze dają układy ze specjalnej klasy charakterystycznej. Ustalmy funkcję ograniczoną $\mathbf{u} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ i zaczynamy od rozszerzenia stwierdzenia 4.1.2 (równoważność warunków (a) i (b)).

Stwierdzenie 6.1.3. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) *Funkcja \mathbf{u} ma średnią zerową na typowym krótkim przedziale (jest to równoważne z faktem, że pierwsza norma GHK funkcji \mathbf{u} znika).*

(b) $\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S] = 0$ dla dowolnego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$.

(c) *Miara spektralna $\sigma_{\pi_0, \kappa}$ nie ma atomu w punkcie 1 dla dowolnego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$.*

Dowód. Fakt, że (b) i (c) są równoważne pochodzi z teorii spektralnej. Istotnie, niech $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Wówczas z (2.4), definicji miary spektralnej, ciągłości iloczynu skalarnego i twierdzenia von Neumanna otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi_0, \kappa}(\{1\}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\sigma}_{\pi_0, \kappa}[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle U_S^n \pi_0, \pi_0 \rangle_\kappa = \\ &= \langle \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_S^n \pi_0, \pi_0 \rangle_\kappa = \langle \mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S], \pi_0 \rangle_\kappa = \\ &= \|\mathbb{E}_\kappa[\pi_0 | \mathcal{I}_S]\|^2. \end{aligned}$$

□

Rozważmy teraz funkcję \mathbf{u} spełniającą uśrednioną własność 2-Chowli rozpatrywaną w [33] i opartą na pracy [40]:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h \leq H} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{M_k} \left| \sum_{m \leq M_k} \mathbf{u}(m+h)\mathbf{u}(m) \right| = 0 \quad (6.1)$$

dla każdego podciągu (M_k) definiującego układ Furstenberga funkcji \mathbf{u} .

Uwaga 6.1.4. Jak pokazano w [40], zobacz także dodatek A w [33], uśredniona własność 2-Chowli jest równoważna uśrednionej własności Chowli:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H^k} \sum_{h_1, \dots, h_k \leq H} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{M_s} \left| \sum_{n \leq M_s} \mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n+h_1) \dots \mathbf{u}(n+h_k) \right| = 0$$

dla dowolnego $k \geq 1$, $1 \leq h_1 < \dots < h_k$ (dla każdego podciągu (M_s) definiującego układ Furstenberga funkcji \mathbf{u}). Z punktu widzenia teorii ergodycznej (patrz: uwaga 2.3.16) rozpatrywana własność może być uważana za jedno z możliwych sformułowań klasycznego zjawiska (po raz pierwszy rozpatrywanego przez Furstenberga), że „słabe mieszanie implikuje słabe mieszanie wszystkich rzędów”.

Przypomnijmy, że w [14] i [33] pokazano, że warunek (6.1) jest równoważny faktowi, że $\sigma_{\pi_0, \kappa}$ jest miarą ciągłą dla dowolnego układu Furstenberga $\kappa \in V(\mathbf{u})$. Wynika z tego (patrz: stwierdzenie 6.1.3 powyżej), że uśredniona własność Chowli implikuje zerową średnią na typowym krótkim przedziale, czyli (patrz: stwierdzenie 4.1.2) mamy $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$. Naszym celem jest udowodnienie następującego wyniku:

Twierdzenie 6.1.5. *Załóżmy, że $\|\mathbf{u}\|_{u^1} = 0$. Następujące warunki są równoważne:*

- (a) *funkcja \mathbf{u} spełnia uśrednioną własność Chowli;*
- (b) *funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich monoergodycznych modeli automorfizmów o dyskretnym widmie;*
- (c) *funkcja \mathbf{u} jest ortogonalna do wszystkich układów topologicznych, których wszystkie miary niezmiennicze dają miarowe układy dynamiczne o dyskretnym widmie.*

Dowód. (a) \Rightarrow (b) Pamiętając, że uśredniona hipoteza Chowli implikuje ciągłość miary spektralnej funkcji π_0 , twierdzenie wynika bezpośrednio ze stwierdzenia 5.0.7 i uwagi 5.0.13 (patrz także: wniosek 5.0.15).

(b) \Rightarrow (a) Ponownie wynika to z uwagi 5.0.13 (pamiętając, że zgodnie ze stwierdzeniem 6.1.3, miara spektralna funkcji π_0 nie ma atomu w 1). Ponieważ (c) \Rightarrow (b), więc wystarczy pokazać, że (a) \Rightarrow (c), co natomiast wynika z [14] (patrz: dowód wniosku 3.20 w [14]). Dzieje się tak, ponieważ warunek (a) implikuje, że miara spektralna funkcji π_0 jest ciągła (dla dowolnej miary $\kappa \in V(\mathbf{u})$). \square

Bibliografia

- [1] H. El Abdalaoui, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *Automorphisms with quaaasi-discrete spectrum, multiplicative functions and average orthogonality along short intervals*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017, no. 14, 4350-4368.
- [2] H. El Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *Möbius disjointness for models of an ergodic system and beyond*, Israel J. Math. **228** (2018), 707-751.
- [3] T. Austin, M. Lemańczyk, *Relatively finite measure-preserving extensions and lifting multipliers by Rokhlin cocycles*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **6** (2009), 115-131 (special volume dedicated to S. Smale).
- [4] S. Benzoni, *Confined extensions and non-standard dynamical filtrations*, Studia Mathematica **276** (2024), 233-270.
- [5] V. Bergelson, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, F. Richter, *A structure theorem for level sets of multiplicative functions and applications*, International Math. Research Notices 2020, no 5, 1300-1345.
- [6] P. Berk, M. Górska, T. de la Rue, *Joining properties of automorphisms disjoint with all ergodic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **45** (2025), 1998-2022.
- [7] J.-P. Conze, T. Downarowicz, J. Serafin, *Correlation of sequences and of measures, generic points for joinings and ergodicity of certain cocycles*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 3421-3441.
- [8] A. Danilenko, *Rank-one actions, their $(C; F)$ -models and constructions with bounded parameters*, J. Anal. Math. **139** (2019), 697-749.
- [9] A. Danilenko, M. Lemańczyk, *A class of multipliers for \mathcal{W}^\perp* , Israel J. Math. **148** (2005), 137-168.
- [10] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), **78** (1961), pp. 273-304.
- [11] Denker, Manfred; Grillenberger, Christian; Sigmund, Karl, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 527. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. iv+360 pp.

- [12] T. Downarowicz, *Entropy in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2011.
- [13] S. Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), 35–65.
- [14] S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, *Sarnak’s Conjecture – what’s new*, in: Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetics and Combinatorics, CIRM Jean-Morlet Chair, Fall 2016, Editors: S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, Lecture Notes in Mathematics **2213**, Springer International Publishing, pp. 418.
- [15] N. Frantzikinakis, B. Host, *The logarithmic Sarnak conjecture for ergodic weights*, Annals of Math. (2) **187** (2018), 869–931.
- [16] N. Frantzikinakis, B. Host, *Furstenberg systems of bounded multiplicative functions and applications*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2021, no. 8, 6077–6107.
- [17] N. Frantzikinakis, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *Furstenberg systems of pretentious and MRT multiplicative functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **45** (2025), 2765–2844.
- [18] K. Frączek, M. Lemańczyk, *On the self-similarity problem for flows*, Proc. London Math. Soc. **99** (2009), 658–696.
- [19] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.
- [20] Su Gao, A. Hill, *Disjointness between bounded rank-one transformations*, Colloq. Math. **164** (2021), 91–121.
- [21] E. Glasner, *Ergodic Theory via Joinings*, American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [22] E. Glasner, *On the class of multipliers for W^\perp* , Ergodic Theory Dynam. Systems **14** (1994), 129–140.
- [23] E. Glasner, B. Weiss, *Processes disjoint from weak mixing*, Trans. Amer. Math. Soc. **316** (1989), 689–703.
- [24] A. Gomilko, D. Kwietniak, M. Lemańczyk, *Sarnak’s conjecture implies the Chowla conjecture along a subsequence*, Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetics and Combinatorics, Lecture Notes in Math., 2213, Springer, Cham, 2018.
- [25] A. Gomilko, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *On Furstenberg systems of aperiodic multiplicative functions of Matomäki, Radziwiłł and Tao*, J. Modern Dynamics **17** (2021), 529–555.

- [26] M. Górska, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *On orthogonality to uniquely ergodic sequences*, ukaże się w *J. Analyse Math.*, arXiv:2404.07907.
- [27] A. Granville, K. Soundararajan, *Decay of mean values of multiplicative functions*, *Canad. J. Math.* **55** (2003), 1191-1230.
- [28] B. Host, *Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum*, *Israel J. Math.* **76** (1991), 289–298.
- [29] A. del Junco, *Disjointness of measure-preserving transformations, minimal self-joinings and category*, *Ergodic theory and dynamical systems, I* (College Park, Md., 1979-80), pp. 81-89. *Progr. Math.*, 10, Birkhäuser, Boston, MA, 1981.
- [30] A. del Junco, M. Rahe, L. Swanson, *Chacon's automorphism has minimal self-joinings*, *J. Analyse Math.* **37** (1980), 276–284.
- [31] A. del Junco, D. Rudolph, *On ergodic actions whose self-joinings are graphs*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1980), 531-557.
- [32] R. Kallman, *Certain quotient spaces are countably separated, III*, *J. Functional Analysis* **22** (1976), 225-241.
- [33] A. Kanigowski, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *On arithmetic functions orthogonal to deterministic sequences*, *Advances Math.* **428** (2023), 68 pp., <https://doi.org/10.1016/j.aim.2023.109138>
- [34] A. Kanigowski, M. Lemańczyk, C. Ulcigrai, *On disjointness of some parabolic flows*, *Inventiones Math.* **221** vol. 1 (2020), 1-111.
- [35] O. Klurman, *Correlations of multiplicative functions and applications*, *Compositio Math.* **153** (2017), 1622–1657.
- [36] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **13** (1965), 397-403.
- [37] M. Lemańczyk, *Ergodic Theory: Spectral Theory, Joinings and Applications*, monografia w przygotowaniu.
- [38] M. Lemańczyk, F. Parreau, *Rokhlin extensions and lifting disjointness*, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), 1525-1550.
- [39] K. Matomäki, M. Radziwiłł, *Multiplicative functions in short intervals*, *Annals Math. (2)* **183** (2016), 1015-1056.
- [40] K. Matomäki, M. Radziwiłł, T. Tao, *An averaged form of Chowla's conjecture*, *Algebra Number Theory* **9** (2015), 2167–2196.
- [41] D. Rudolph, *An example of a measure preserving map with minimal self-joinings, and applications*, *J. Analyse Math.* **35** (1979), 97-122.

-
- [42] T. de la Rue, *Notes on Austin's multiple ergodic theorem*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00400975>
- [43] P. Sarnak, *Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics*, Web-page, <http://publications.ias.edu/sarnak/>.
- [44] S.M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Graduate texts in mathematics, Springer 1998.
- [45] T. Tao, *Equivalence of the logarithmically averaged Chowla and Sarnak conjectures*, Number Theory – Diophantine Problems, Uniform Distribution and Applications: Festschrift in Honour of Robert F. Tichy's 60th Birthday (C. Elsholtz and P. Grabner, eds.), Springer International Publishing, Cham, 2017, pp. 391–421.
- [46] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, New York, Springer-Verlag, 2000.