



Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski  
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej  
tel.: 602 730 893

Łódź, 21 marca 2026 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej**  
**mgra Władysława Klinikowskiego**  
*Periodic Solutions of Nonlinear Damped Wave Equations on the*  
*Whole Euclidean Space* <sup>(1)</sup>

Rozprawa doktorska mgra Władysława Klinikowskiego została przygotowana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Promotorem rozprawy jest dr hab. Aleksander Őwiszewski, prof. UMK. Rozprawę napisano w języku angielskim, liczy ona 158 stron i składa się ze strony tytułowej, spisu treści, obszernego wprowadzenia omawiającego treść w dość szczegółowy sposób, pięciu rozdziałów, aneksu, bibliografii zawierającej 59 pozycji oraz skorowidza.

W pierwszej części recenzji omawiam zawartość i przedmiot rozprawy; w drugiej części przedstawiam uwagi dotyczące kwestii merytorycznych i redakcyjnych; w trzeciej części odnoszę się do wymogów stawianych rozprawom doktorskim określonych w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2018 r. poz. 1668), a także wynikających z uchwały nr 89 Senatu UMK z dnia 25 czerwca 2019 r. w sprawie trybu nadawania stopnia doktora na UMK wraz z późniejszymi zmianami. W podsumowaniu formułuję ostateczną konkluzję.

## Część I: Opis treści

W swoim opisie ograniczę się do stosunkowo zwięzłego przedstawienia zawartości rozprawy, co – ze względu na wysoką złożoność tematu – będzie jednak wymagać nieco miejsca.

Rozprawa otwiera dobrze napisane wprowadzenie, które w sposób wszechstronny przedstawia problem i jego kontekst. Omówiono w nim również tematykę i główne wyniki. Rozprawa doktorska mgra Władysława Klinikowskiego dotyczy klasycznego, ale bardzo nietrywialnego problemu w teorii równań różniczkowych cząstkowych: istnienia okresowych w czasie rozwiązań nieliniowych tłumionych równań falowych. Choć tematyka ta ma bogatą historię, szczególnie w przypadku problemów sformułowanych na obszarach

---

<sup>1</sup>Poniższy tekst jest wiernym tłumaczeniem, dokonany przez recenzenta, recenzji napisanej po angielsku.

ograniczonych, autor podejmuje się znacznie trudniejszego przypadku całej przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^N$ .

Głównym badanym równaniem jest

$$(1) \quad u_{tt} + \beta u_t = \Delta u - V(x)u + f(t, x, u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie  $\beta > 0$  jest współczynnikiem tłumienia, a  $f$  jest  $T$ -okresowa w czasie. Hamiltonian  $-\Delta + V$  zawiera potencjał podlegający stosunkowo słabym założeniom, co pozwala na wiele naturalnych zastosowań. Kluczowa trudność związana z nieograniczoną dziedziną to brak zwartości standardowych włożeń Sobolewa, co uniemożliwia stosowanie wielu klasycznych metod (opartych na zwartości). Rozprawa z powodzeniem pokonuje tę przeszkodę, wykorzystując wyrafinowane połączenie nowoczesnych narzędzi analizy funkcjonalnej, w tym teorię  $C_0$ -półgrup, miary niezwartości, teorię stopnia topologicznego i zasady uśredniania.

Istnienie rozwiązań okresowych dla skończenie lub nieskończenie wymiarowych równań różniczkowych zwyczajnych można badać za pomocą metod topologicznych opartych na teorii punktu stałego. Podejście przedstawione w rozprawie mgra Klinikowskiego opiera się na technice opracowanej (jak głęboko wierzę) na początku lat 60. XX wieku przez Krasnosielskiego (patrz słynna monografia Krasnosielskiego *Operator przesunięcia wzdłuż trajektorii równań różniczkowych*, AMS, 1968, która porusza tematy wciąż interesujące dla współczesnych badaczy), a następnie rozpowszechnionej przez licznych matematyków, w tym kilku polskich badaczy, w szczególności tych związanych z Toruniem. Z tej perspektywy przegląd literatury przedstawiony we wprowadzeniu wydaje się daleki od kompletności.

Idea metody Krasnosielskiego dotyczy problemu różniczkowego postaci

$$(*) \quad \dot{u} = F(t, u),$$

gdzie  $F$  działa na (podzbiórze) iloczynu kartezjańskiego  $[0, \infty) \times E$ , z  $E$  będącą przestrzenią Banacha, i spełnia założenia gwarantujące globalne istnienie i jednoznaczność rozwiązań. W szczególności, dla każdego  $x \in E$  (lub w odpowiednim podzbiórze) istnieje rozwiązanie  $u(\cdot, x)$  problemu  $(*)$  określone na  $[0, \infty)$  z warunkiem początkowym  $u(0) = x$ . Dla danego  $T > 0$ , punkt stały odwzorowania  $E \ni x \mapsto \Phi_T(x) := u(T, x)$  daje rozwiązanie  $u$  problemu brzegowego  $u(0) = u(T)$  dla  $(*)$ . Jeśli dodatkowo  $F(\cdot, u)$  jest  $T$ -okresowa, otrzymujemy istnienie rozwiązań okresowych.

Mam wątpliwość, czy operator  $\Phi_T$  zdefiniowany powyżej powinien być nazywany *operatorem Poincarégo*. Raczej określiłbym go jako *operator przesunięcia wzdłuż trajektorii Krasnosielskiego*.

Jak widzimy, sama idea metody jest dość prosta i obiecująca. Jednak trudności i poważne wyzwania pojawiają się, gdy próbuje się zastosować te argumenty w konkretnych sytuacjach. Różnorodność tych sytuacji wyjaśnia dużą liczbę prac poświęconych rozwojowi tego podejścia.

Pozwólcie, że wymienię kilka potencjalnych problemów i wyzwań pojawiających się przy stosowaniu metody Krasnosielskiego.

Pierwszy problem dotyczy poprawnego postawienia zagadnienia (w sensie istnienia i jednoznaczności) problemu różniczkowego. Jest to zwykle traktowane jako kwestia zewnętrzna, opierająca się na ogólnych wynikach wynikających z przyjętych założeń. W

rozprawie autor stosuje nieco nadmierne odniesienia łańcuchowe (w Sekcji 3.4 odsyła do Sekcji 1.5, która z kolei odsyła do Sekcji 1.2, gdzie – między innymi – cytowana jest monografia Pazy’ego), co może utrudniać czytelność. Zakładając globalne istnienie, należy następnie zbadać operator Krasnosielskiego  $\Phi_T$ : jego regularność, zwartość i bardziej ogólne własności topologiczne. Pytania te są zazwyczaj trudne, zwłaszcza w sytuacji nieskończenie wymiarowej, głównie z powodu wewnętrznego braku zwartości. Następnie bada się punkty stałe  $\Phi_T$ . Naturalnym punktem wyjścia jest tak zwany *wzór Krasnosielskiego*, wiążący indeks punktu stałego  $\Phi_T$  (typu Leraya–Schaudera) z odpowiednim stopniem prawej strony (\*). Niestety autor nie podaje wystarczająco precyzyjnego odniesienia do tego wzoru.

Po rozwiązaniu tych technicznie skomplikowanych kwestii, można zająć się problemem okresowym.

Niniejsza rozprawa poświęcona jest systematycznemu badaniu tych i pokrewnych problemów w przypadku równania (1). Opis ogólnego podejścia, jak również głównych wyników, znajduje się w drugiej części Wprowadzenia, gdzie sformułowano Twierdzenia I i II. Twierdzenia te dotyczą tak zwanych przypadków *rezonansowego* i *nierezonansowego*, w zależności od zachowania linearyzacji problemu. Kolejne rozdziały poświęcone są rozwiązaniu kwestii zarysowanych powyżej.

Ogólny zarys rozprawy i jej filozofia mogłyby zostać szerzej rozwinięte wraz z porównaniami do alternatywnych podejść; jednak powstrzymuję się od tego, aby przejść do bardziej szczegółowego opisu.

Pierwszy rozdział ustanawia abstrakcyjne ramy analizy funkcjonalnej dla całej rozprawy. Autor zaczyna od przypomnienia podstawowych faktów dotyczących  $C_0$ -półgrup i poprawnego postawienia zagadnienia dla półliniowych równań ewolucyjnych. Kluczowym rozdziału – i znaczącym wkładem samym w sobie – jest **Twierdzenie 1.3.1**, które dostarcza ogólnego wyniku o ciągłości (lub zbieżności) dla ciągów rozwiązań łagodnych. Twierdzenie orzeka, że jeśli ciąg wyrazów nieliniowych  $F_n$  spełnia jednostajne warunki Lipschitza i wzrostu, a ich całki zbiegają punktowo,

$$\int_0^t F_n(\tau, u) d\tau \rightarrow \int_0^t F_0(\tau, u) d\tau,$$

to odpowiadające im rozwiązania łagodne  $u_n$  zbiegają jednostajnie na ograniczonych przedziałach do rozwiązania  $u_0$  problemu granicznego. Dowód jest umiejętnym zastosowaniem teorii półgrup, twierdzenia Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej oraz własności miary niezwartości Hausdorffa. Twierdzenie to rozszerza klasyczne wyniki (np. te autorstwa D. Henry’ego), ponieważ wymaga jedynie zbieżności całkowej wyrazów nieliniowych, warunku ściśle słabszego niż zbieżność punktowa lub  $L^1$ .

Z tego fundamentalnego wyniku autor wyprowadza dwa ważne wnioski:

- **Twierdzenie 1.4.1 (Ciągłość dla równań sparametryzowanych):** Wynik ten dotyczy nieliniowości postaci  $F_n(t/\alpha_n, u)$  i jest szczególnie istotny dla problemów związanych ze zmiennością częstotliwości.
- **Twierdzenie 1.4.2 (Abstrakcyjna zasada uśredniania):** Twierdzenie to pokazuje, że rozwiązania równań szybko oscylujących postaci  $F_n(t/\epsilon_n, u)$  gdy  $\epsilon_n \searrow 0$  zbiegają do rozwiązania uśrednionego równania autonomicznego z nieliniowością  $\hat{F}(u) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, u) dt$ .

Rozdział kończy się wprowadzeniem operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii (Poincarégo, czy raczej Kranosielskiego)  $\Phi_t$  oraz przypomnieniem twierdzenia o jego ciągłości i  $k$ -kontraktywności. Operator ten odgrywa centralną rolę w analizie, ponieważ jego punkty stałe odpowiadają  $T$ -okresowym rozwiązaniom.

Drugi rozdział zawiera szczegółową analizę spektralną i półgrupową liniowej części równania, stanowiąc podstawę dla późniejszych badań nieliniowych. Rozważanym operatorem jest tłumiony operator falowy  $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ , gdzie  $\mathbb{X} = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ .

Kluczowe założenia dotyczące potencjału  $V$  są takie, że jest on typu *Kato–Rellicha*, to znaczy  $V = V_\infty + V_0$  z  $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  i  $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$  dla odpowiednich  $p$ , a jego asymptotyczne dno,  $\theta(V_\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,inf}_{|x| > R} V_\infty(x)$ , jest dodatnie. Założenia te są starannie dobrane, aby zapewnić samosprzężoność operatora Schrödingera  $-\Delta + V$  w duchu twierdzenia Kato oraz zapewnić efektywną kontrolę jego widma.

Główne wyniki tego rozdziału obejmują:

- **Propozycje 2.1.10 i 2.1.12:** Ustalają one, że  $-\Delta + V$  jest samosprężony, jego istotne widmo zawarte jest w  $[\theta(V_\infty), \infty)$ , a widmo poniżej  $\theta(V_\infty)$  składa się ze skończonej liczby wartości własnych o skończonej krotności.
- **Propozycja 2.2.1:** Pokazuje, że  $\mathbb{A}$  generuje  $C_0$ -półgrupę  $\{e^{t\mathbb{A}}\}_{t \geq 0}$  i dostarcza precyzyjnego opisu widma w kategoriach widma  $-\Delta + V$ .
- **Twierdzenia 2.3.3 i 2.3.9:** Są to centralne wyniki rozdziału. Autor wprowadza normę równoważną  $\|\cdot\|_{s,V}$  na  $\mathbb{X}$  (zależną od parametru  $s$ ) i dowodzi, że półgrupa  $\{e^{t\mathbb{A}}\}_{t \geq 0}$  jest *ścistą* kontrakcją na odpowiedniej podprzestrzeni  $\mathbb{X}_Q$ , a zatem jest  $k$ -kontrakcją względem miary niezwartości Hausdorffa  $\chi_{s,V}$ .
- **Twierdzenie 2.4.4:** Dostarcza wzoru na indeks punktu stałego operatora liniowego  $e^{t\mathbb{A}}$ , mianowicie  $\operatorname{Ind}_C(e^{t\mathbb{A}}, Z) = (-1)^{m_-(A)}$ , gdzie  $m_-(A)$  oznacza całkowitą krotność ujemnych wartości własnych  $-\Delta + V$ . Wzór ten odgrywa kluczową rolę w nieliniowych obliczeniach indeksu przeprowadzanych w późniejszych rozdziałach.

Wyniki przedstawione w dwóch pierwszych punktach są prawdopodobnie znane; jednak ich włączenie wraz z kompletnymi i starannie napisanymi dowodami zwiększa wartość rozprawy jako samodzielnego źródła wiedzy. Analiza w tym rozdziale jest technicznie wymagająca, ale jasno przedstawiona, demonstrując solidne opanowanie teorii operatorów i analizy spektralnej przez autora.

Trzeci rozdział stanowi pomost między abstrakcyjną teorią liniową rozwiniętą w Rozdziale 2 a konkretną nieliniowością  $f$  występującą w równaniu (1). Koncentruje się on na własnościach związanego z nią operatora Nemytskiego  $F(t, u)(x) = f(t, x, u(x))$ .

Główne wkłady tego rozdziału są następujące:

- **Propozycja 3.1.2:** Ustala podstawowe własności ciągłości i Lipschitza  $F$ , pokazując, że odwzorowuje on  $H^1(\mathbb{R}^N)$  w  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .
- **Propozycje 3.2.1 i 3.3.1:** Dostarczają kluczowych oszacowań zwartości. Oceniają one miarę niezwartości zbioru  $\bigcup_n F_n(D \times U)$ . Przy silnym założeniu ograniczoności ( $|f| \leq m(x)$ ) wykazano, że zbiór ten jest *względnie zwarty* (Propozycja 3.2.1). Przy

słabszych założeniach podliniowego wzrostu (warunki (f1) i (f2)) autor ustala ostre oszacowanie

$$\chi_{L^2} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(D \times U) \right) \leq \widehat{\theta}(l_{\infty}) \chi_{L^2}(U),$$

gdzie  $\widehat{\theta}(l_{\infty})$  oznacza asymptotyczne supremum  $l_{\infty}$ , ograniczonej części funkcji Lipschitza  $l$ .

- **Twierdzenie 3.4.1:** Łączy wyniki Rozdziałów 2 i 3, aby pokazać, że operator przesunięcia wzdłuż trajektorii Krasnosielskiego  $\Phi_{t_0}$  związany z nieliniowym tłumionym równaniem falowym jest dobrze określony, ciągły i jest  $k$ -kontrakcją. Kluczowe oszacowanie ma postać

$$\chi_{s,V}(\Phi_{t_0}(Z \times M \times [a, b])) \leq e^{-(\rho-k/\sqrt{d})at_0} \chi_{s,V}(Z),$$

gdzie  $k$  jest w zasadzie  $\widehat{\theta}(l_{\infty})$ , a  $d = \text{dist}(0, \sigma(A) \cap (0, \infty))$ . Oszacowanie to pokazuje, że brak zwartości jest skutecznie kontrolowany.

- **Propozycja 3.5.1:** Technicznie ważny wynik ustalający względną zwartość ciągów punktów okresowych pojawiających się w problemach ze zmianą częstotliwości. Odgrywa to kluczową rolę w argumentach kontynuacyjnych rozwiniętych później.

Czwarty rozdział poświęcony jest przypadkowi rezonansowemu, w którym 0 należy do widma  $-\Delta + V$  i nieliniowość  $f$  jest ograniczona ( $|f| \leq m(x)$ ). Celem jest udowodnienie Twierdzenia I. Metoda łączy redukcję Lyapunowa–Schmidta z zasadą uśredniania.

Główne kroki to:

- **Twierdzenie 4.1.1 (Wzór na indeks dla równań autonomicznych):** Dla zredukowanego układu autonomicznego na jądrze  $X_0 = \text{Ker}(-\Delta + V)$ , indeks operatora Poincarégo  $\overline{\Phi}_T^{(\epsilon)}$  jest wyrażony przez stopień Brouwera rzutowanej nieliniowości  $F_0 : X_0 \rightarrow X_0$ . Wzór ma postać:

$$\text{Ind}_C(\overline{\Phi}_T^{(\epsilon)}, \mathbb{U}) = (-1)^{m - (-\Delta + V) + \dim X_0} \text{deg}_B(F_0, U),$$

gdzie  $\epsilon$  jest parametrem kontynuacji skalującym zaburzenie. Należy to traktować jako wariant wspomnianego wzoru Krasnosielskiego. Dowód wykorzystuje zręczny argument homotopijny do rozprężenia dynamiki na skończenie wymiarowym jądrze od dynamiki wykładniczo stabilnej na jego dopełnieniu.

- **Twierdzenie 4.2.1 (Rezonansowa zasada uśredniania):** Rozszerza ono poprzedni wzór indeksowy na pełne, zależne od czasu równanie (4.23) dla dostatecznie małych  $\epsilon$ . Pokazuje, że dla małego parametru  $\epsilon$ , indeks  $\overline{\Phi}_T^{(\epsilon)}$  jest dany tym samym wzorem, ale z  $F_0$  zastąpionym przez jego uśrednienie czasowe po jednym okresie,  $\overline{F}_0(u) = \frac{1}{T} \int_0^T P_0 F(t, u) dt$ .
- **Warunki geometryczne (Sekcja 4.3):** Autor łączy abstrakcyjną funkcję  $\overline{F}_0$  z konkretnymi, weryfikowalnymi warunkami na  $f$ , takimi jak warunki Landesmana–Lazera (LL) i silnego rezonansu (SR). Szczególnie eleganckie wykorzystanie *własności jednoznaczności przedłużenia* (Twierdzenie 4.3.4) pokazuje, że silniejsze warunki punktowe  $(LL)'_{\pm}$  i  $(SR)'_{\pm}$  implikują warunki całkowite  $(LL)_{\pm}$  i  $(SR)_{\pm}$ .

- **Lemat 4.3.12:** Pokazuje, że przy założeniach  $(LL)$  lub  $(SR)$ , uśrednione odwzorowanie  $\bar{F}_0$  jest niezerowe na dużych sferach w  $X_0$ , co implikuje  $\deg_B(\bar{F}_0, B_R \cap X_0) \neq 0$ .
- **Dowód Twierdzenia I (Sekcja 4.4):** Jest to imponująca synteza. Przez sprzeczność autor pokazuje, że każdy ciąg rozwiązań okresowych o dużej normie, po przeskalowaniu, zbiegałby do niezerowego elementu jądra, co prowadzi do sprzeczności z warunkami  $(LL)$  lub  $(SR)$ . Ustala to *a priori* ograniczenie. Zasada kontynuacji (Twierdzenie 4.2.4) łączy następnie to ograniczenie z niezerowym stopniem z Lematu 4.3.12, aby udowodnić istnienie  $T$ -okresowego rozwiązania łagodnego.

Rozdział kończy się zastosowaniami do równań różniczkowych cząstkowych, pokazując, że abstrakcyjne twierdzenia mają zastosowanie do równań z potencjałem Coulomba i konkretnymi nieliniowościami spełniającymi warunki typu Landesmana–Lazera lub silnego rezonansu.

Piąty, końcowy rozdział dotyczy przypadku nierezonansowego, w którym  $f$  jest asymptotycznie liniowa zarówno w zerze, jak i w nieskończoności. Celem jest udowodnienie Twierdzenia II, które gwarantuje istnienie *niezerowego* rozwiązania okresowego. Struktura rozdziału odzwierciedla Rozdział 4, ale jest bardziej złożona ze względu na konieczność uwzględnienia obu reżimów asymptotycznych.

- **Zasady uśredniania (Sekcja 5.1):** Propozycje 5.1.1 i 5.1.2 rozszerzają zasadę uśredniania na ciągi problemów ze zmieniającą się częstotliwością, pokazując, że jeśli  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , to ciąg rozwiązań  $\epsilon_n T$ -okresowych zbiega do rozwiązania stacjonarnego równania uśrednionego.
- **Wzór na uśrednianie indeksu (Twierdzenie 5.2.1):** Twierdzenie to jest nierezonansowym odpowiednikiem Twierdzenia 4.2.1. Stwierdza ono, że dla dostatecznie małych  $\epsilon$ , indeks  $\Phi_{\epsilon T}^{(\epsilon)}$  (będącego operatorem Krasnosielskiego związanym z  $F(t/\epsilon, u)$ ) na zbiorze otwartym  $Z$  (spełniającym warunek niezdegenerowania) jest równy indeksowi autonomicznego uśrednionego operatora  $\hat{\Phi}_{\epsilon T}$ . Prowadzi to do zasady kontynuacji (Twierdzenie 5.2.2), która łączy indeks oryginalnego odwzorowania czasu  $T$   $\Phi_T$  z indeksem uśrednionego odwzorowania dla małych czasów.
- **Oszacowania a priori (Propozycja 5.3.1):** Jest to kluczowa sekcja techniczna. Dowodzi ona, że jeśli zlinearyzowane równania (5.28) i (5.29) nie mają nietrywialnych rozwiązań okresowych, to nieliniowe równanie (5.3) nie ma rozwiązań okresowych o bardzo dużej normie (oszacowanie w nieskończoności) ani niezerowych rozwiązań okresowych o bardzo małej normie (oszacowanie w zerze). Dowód jest wyrafinowanym argumentem zwartościowym wykorzystującym linearyzację i wyniki z Sekcji 5.1.
- **Wzory na indeks dla równań autonomicznych (Twierdzenie 5.4.1):** Twierdzenie to dostarcza indeksu operatora przesunięcia dla autonomicznego, asymptotycznie liniowego równania  $\dot{y} = Ay + (0, F(y))$ . Dla dużych kul (w nieskończoności) pokazuje  $\text{Ind}_C(\Phi_t, B_R) = (-1)^{m - (-\Delta + V - \hat{\omega})}$ . Dla małych kul (w zerze) pokazuje  $\text{Ind}_C(\Phi_t, B_r) = (-1)^{m - (-\Delta + V - \hat{\alpha})}$ .
- **Dowód Twierdzenia II (Sekcja 5.5):** Dowód jest teraz kwestią złożenia elementów. Twierdzenie 5.4.1 daje indeksy na małych i dużych kulach. Propozycja 5.3.1

gwarantuje, że  $\Phi_T$  nie ma punktów stałych na brzegach tych kul. Twierdzenie 5.2.2 pokazuje następnie, że indeksy  $\Phi_T$  są równe indeksom  $\widehat{\Phi}_t$ . Wreszcie własność addytywności indeksu na pierścieniu  $Z = B_R \setminus \overline{B_r}$  daje:

$$\text{Ind}_C(\Phi_T, Z) = (-1)^{m-(\cdot, \hat{\omega})} - (-1)^{m-(\cdot, \hat{\alpha})}.$$

Jeśli ta różnica jest niezerowa, co jest gwarantowane przez warunek (5.64), to  $\Phi_T$  musi mieć punkt stały w  $Z$ , czyli niezerowe  $T$ -okresowe rozwiązanie.

Ponownie, rozdział kończy się konkretnymi zastosowaniami do równań różniczkowych cząstkowych, demonstrując użyteczność twierdzenia dla równań na  $\mathbb{R}^3$  z potencjałem Coulomba.

Rozprawa kończy się obszernym aneksem, który zawiera zwięzłe i dobrze zorganizowane podsumowanie niezbędnego materiału podstawowego, w tym teorii operatorów liniowych, przestrzeni funkcyjnych, miar niezwartości i teorii stopnia topologicznego. To znacząco zwiększa samodzielność pracy.

## Część II: Ocena ogólna i znaczenie

Recenzowana rozprawa stanowi znaczący i zaawansowany technicznie wkład w teorię nieliniowych równań ewolucyjnych. Charakteryzuje się wysokim poziomem matematycznej precyzji, znaczną finezją techniczną i dobrze rozwiniętymi ramami koncepcyjnymi.

### Mocne strony i główne osiągnięcia

- **Podjęcie trudnego problemu:** Rozprawa z powodzeniem zajmuje się istnieniem rozwiązań okresowych dla hiperbolicznego równania różniczkowego cząstkowego sformułowanego na nieograniczonej dziedzinie, gdzie brak zwartości stanowi fundamentalną trudność analityczną. Autor radzi sobie z tym problemem z zauważalną kompetencją.
- **Rozwój efektywnych narzędzi technicznych:** Wprowadzenie normy równoważnej zapewniającej ścisłą kontraktywność liniowej półgrupy, połączone z precyzyjnymi oszacowaniami miary niezwartości dla operatora Nemytskiego i udoskonalonym twierdzeniem o ciągłości dla równań ewolucyjnych, tworzy spójne i potężne ramy analityczne. Narzędzia te mają niezależne znaczenie i mogą znaleźć zastosowania poza rozpatrywanym konkretnym problemem.
- **Przejrzystość i precyzja głównych wyników:** Główne twierdzenia (Twierdzenia I i II), dotyczące odpowiednio przypadków rezonansowego i nierezonansowego, są sformułowane w jasny i matematycznie precyzyjny sposób. Założenia dotyczące potencjału  $V$  i nieliniowości  $f$  są jawne i weryfikowalne oraz znacząco powiązane z klasycznymi warunkami geometrycznymi, takimi jak warunki Landesmana–Lazera i silnego rezonansu.
- **Powiązanie z konkretnymi modelami:** Teorii abstrakcyjnej towarzyszą starannie dobrane zastosowania, w szczególności do równań z potencjałem Coulomba. Znacząco to zwiększa istotność wyników i demonstruje ich zastosowalność do konkretnych modeli analitycznych.

- **Wysoki poziom prezentacji:** Rozprawa jest, ogólnie rzecz biorąc, starannie napisana i logicznie zorganizowana. Autor demonstruje solidne opanowanie odpowiedniego aparatu matematycznego i potrafi poprowadzić czytelnika przez wymagające technicznie argumenty.

Ogólna struktura rozprawy – składająca się z pięciu rozdziałów, wprowadzenia i obszernego aneksu – jest spójna i dobrze przemyślana. Aneks w szczególności służy jako użyteczne i samodzielne źródło informacji o niezbędnym materiale podstawowym.

## Uwagi i punkty do dyskusji

Niezależnie od wysokiej jakości, rozprawa skorzystałaby na uwzględnieniu następujących punktów, które być inspiracją do dalszych rozważań i dyskusji.

1. Zależność od wymiaru  $N$  w założeniach dotyczących potencjałów typu Kato–Rellicha i wyrazów nieliniowych (warunki (5b), (8b), itp.) jest dość zawiła. Pożądane byłoby skomentowanie, w jakim stopniu warunki te są optymalne, czy też wynikają głównie z technicznych ograniczeń metody.
2. W przypadku nierezonansowym założenie, że zlinearyzowane równania (5.28) i (5.29) nie dopuszczają nietrywialnych  $\epsilon T$ -okresowych rozwiązań łagodnych, odgrywa kluczową rolę. Warto byłoby wiedzieć, czy warunek ten można przeformułować w czysto spektralnym języku, na przykład w odniesieniu do operatorów  $-\Delta + V - \hat{\omega}$  i  $-\Delta + V - \hat{\alpha}$ .
3. Warunek  $\hat{\theta}(l_\infty) < \sqrt{d}\rho$ , który gwarantuje  $k$ -kontrakcyjność operatora przesunięcia, wydaje się być kluczowy dla metody. Warto byłoby wyjaśnić, czy założenie to jest istotne dla samych wyników istnienia, czy też jest głównie wymogiem technicznym zapewniającym stosowalność wybranych ram topologicznych.
4. Z perspektywy redakcyjnej, niektóre części wywodu są niepotrzebnie gęste i stylistycznie nieco rozwlekłe („barokowe”), co może utrudniać czytelność. Dostępność pracy można by poprawić, przenosząc niektóre bardziej techniczne lub pomocnicze materiały do aneksu.
5. Wywód czasami opiera się na rozbudowanych łańcuchach odniesień wewnętrznych (odwołania zagnieżdżone), co może zaciemniać logiczną strukturę rozumowania. Bardziej bezpośrednia prezentacja lub konsolidacja kluczowych odniesień poprawiłaby przejrzystość.
6. Rola tak zwanego wzoru Krasnosielskiego, który pełni rolę podstawową w obliczeniach indeksu punktu stałego, zasługuje na bardziej precyzyjne i jawne sformułowanie, wraz z jasnym odniesieniem bibliograficznym.
7. Wreszcie, można zapytać, czy alternatywne zasady punktu stałego (na przykład typu Browdera–Schaudera, Darbou, Sadowskiego lub pokrewne) mogłyby dostarczyć wyników istnienia przy założeniach typu Landesmana–Lazera lub innych, potencjalnie oferując komplementarne podejścia do problemu.

## Ocena z perspektywy prawnej

Przepisy prawne cytowane we wstępie niniejszej recenzji określają podstawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Najistotniejsze regulacje zawarte są w artykułach 187 i 188 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, a także w uchwale nr 89 Senatu Uniwersytetu Mikołaja Kopernika z dnia 25 czerwca 2019 r. wraz z późniejszymi zmianami.

1. Zgodnie z tymi przepisami rozprawa doktorska powinna:

- (a) stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne zastosowanie wyników badań naukowych,
- (b) dotyczyć oryginalnego rozwiązania problemu naukowego lub innowacyjnego zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej,
- (c) wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

2. Rozprawa powinna być przedstawiona w formie:

- (a) monografii,
- (b) zbioru opublikowanych i tematycznie powiązanych artykułów naukowych,
- (c) pracy projektowej, konstrukcyjnej, technologicznej lub wdrożeniowej, albo
- (d) samodzielnej i wydodrębnionej części pracy zbiorowej.

3. Rozprawa musi być przygotowana samodzielnie, a jej treść musi być oryginalna i wolna od plagiatu. W przypadku prac zbiorowych należy określić indywidualny wkład autora.

4. Przepisy wymagają, aby część wyników badań zawartych w rozprawie została opublikowana w recenzowanych czasopismach naukowych lub publicznie zaprezentowana przed obroną.

5. Rozprawa powinna być napisana w języku polskim lub w języku obcym, za zgodą promotora i jednostki prowadzącej.

W świetle tych przepisów stwierdzam, co następuje:

- 1. Rozprawa doktorska przedłożona przez mgra Klinikowskiego **spełnia wymagania określone w punktach 1(a), (b) i (c)**.
- 2. Rozprawa została przedstawiona w formie **monografii wykazującej spójność logiczną i integralność strukturalną**. Indywidualny wkład autora jest jednoznacznie identyfikowalny.
- 3. W mojej ocenie rozprawa jest **oryginalna i wolna od plagiatu**.
- 4. Część wyników została **opublikowana w recenzowanych międzynarodowych czasopismach naukowych**; ponadto znaczące części rozprawy zostały przygotowane do złożenia w czasopismach do publikacji.
- 5. Rozprawa jest **napisana w języku angielskim**; jednak wskazane byłoby dołączenie streszczenia w języku polskim.

## Konkluzja końcowa

Podsumowując, mgr Władysław Jan Klinikowski przygotował rozprawę doktorską o wysokim poziomie naukowym, zawierającą oryginalne i znaczące wyniki w dziedzinie ana-

lizej nieliniowej. Praca demonstruje dojrzale opanowanie zaawansowanych metod analitycznych i przekonująco rozwiązuje trudny i istotny problem matematyczny.

Rozprawa spełnia – i pod większością względów przewyższa – standardowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki.

Dlatego **wniosuję o przyjęcie rozprawy w celu nadania stopnia doktora filozofii**. Co więcej, ze względu na jej jakość, proponuję, aby została **uwzględniona w postępowaniu o wyróżnienie**.

*Wojciech Kryszewski*