



UNIwersytet
Warszawski



Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

dr hab. Anna Zatorska-Goldstein, prof. UW

Warsaw, 5 marca 2026

Recenzja pracy doktorskiej mgra Władysława Klinikowskiego

Praca doktorska mgra Władysława Klinikowskiego pt. „*Periodic solutions of nonlinear damped wave equations on the whole Euclidean space*” poświęcona jest zagadnieniu istnienia rozwiązań okresowych dla nieliniowego tłumionego równania falowego określonego na całej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^N :

$$u_{tt} + \beta u_t = \Delta u - V(x)u + f(t, x, u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Rozważane równanie – w przypadku gdy funkcja f nie zależy od zmiennej czasowej – nie posiada nietrywialnych rozwiązań okresowych. Rozwiązania takie mogą pojawić się wyłącznie wtedy, gdy f jest T -okresowa względem czasu, co stanowi naturalny kontekst badawczy dla postawionego problemu.

Zagadnienie istnienia rozwiązań okresowych dla równań falowych było szeroko badane w literaturze, poczynając od klasycznych prac Rabinowitza z lat 70-tych XX w., a następnie rozwijane przy użyciu metod wariacyjnych oraz narzędzi topologicznych, takich jak teoria stopnia czy indeks punktu stałego. W literaturze istnieje szereg prac dotyczących rozwiązań okresowych równań ewolucyjnych uzyskiwanych przez operator przesunięcia wzdłuż trajektorii, zwany również operatorem Poincarégo (począwszy od klasycznych prac Mawhina, czy Nussbauma do współczesnych badań prowadzonych przez promotora Doktoranta - Ćwieszewskiego). W analizie istnienia rozwiązań na zbiorach nieograniczonych wykorzystuje się pojęcie operatorów typu k -set contraction (kontrakcja względem miary niezwartości), wprowadzone przez Darbo, które stanowi uogólnienie operatorów zwartych i pozwala na stosowanie metod indeksowych.

Istotą tej rozprawy jest połączenie trzech trudności: tłumienia (które wpływa na zmianę własności operatora różniczkowego), nieograniczonej dziedziny oraz nieliniowości. Podstawową trudnością jest brak zwartości dla operatora przesunięcia na trajektorii oraz trudność uzyskania odpowiednich oszacowań w sytuacji obecności członu nieliniowego.

Struktura pracy i główne wyniki

Rozprawa składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów zasadniczych oraz dodatków.

Pierwszy rozdział ma charakter przygotowawczy i zawiera narzędzia analityczne wykorzystywane w dalszej części pracy. Autor przypomina podstawowe fakty dotyczące półgrup silnie ciągłych oraz omawia zagadnienie istnienia i jednoznaczności łagodnych rozwiązań nieliniowych równań ewolucyjnych. Następnie bada własności ciągłości rozwiązań względem parametrów oraz formułuje odpowiednią zasadę uśredniania. Rozdział kończy wprowadzenie operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii.

W rozdziale drugim Autor analizuje liniowe równanie fali tłumionej. Punktem wyjścia jest badanie operatora Schrödingera $A = -\Delta + V$ z potencjałem typu Kato–Rellicha oraz jego własności spektralnych. Następnie konstruowany jest operator odpowiadający tłumionemu równaniu falowemu i wykazane zostaje, że generuje on półgrupę silnie ciągłą w przestrzeni $\mathcal{X} = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Istotnym rezultatem tego rozdziału jest wykazanie własności typu k -set contraction dla tej półgrupy, względem Hausdorffowskiej miary niezwartości oraz wyprowadzenie wzoru na indeks topologiczny operatora e^{tA} . W tym celu Autor wprowadza normę odpowiadającą energii układu tłumionego, która jest równoważna normie $\|\cdot\|_{H^1}$ na przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N) \cap X_Q$, gdzie X_Q jest dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni generowanej przez funkcje własne odpowiadające ujemnym wartościom własnym operatora A .

Rozdział trzeci poświęcony jest zagadnieniom zwartościowym dla części nieliniowej. Autor bada własności operatora Nemyckiego związanego z nieliniowością f oraz uzyskuje oszacowania miary niezwartości dla klas nieliniowości ograniczonych w L^2 oraz o wzroście podliniowym. Ważnym rezultatem jest wykazanie odpowiednich własności typu k -set contraction dla operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii oraz uzyskanie wyników zwartościowych dla ciągów problemów o zmieniającej się częstotliwości.

Dwa ostatnie rozdziały zawierają zasadnicze wyniki rozprawy.

Rozdział czwarty dotyczy przypadku rezonansowego. Autor wyprowadza wzory indeksowe (ang. index formulae) dla równań autonomicznych, formułuje rezonansową zasadę uśredniania oraz wprowadza odpowiednie geometryczne warunki na nieliniowość. W analizie tej sytuacji Doktorant przyjmuje założenia nieco silniejsze od klasycznych warunków typu Landesmana–Lazera, które jednak – dzięki wykorzystaniu własności jednoznacznej kontynuacji dla funkcji własnych operatora liniowego – implikują standardowe warunki tego typu. Pozwala to zastosować narzędzia teorii stopnia topologicznego i uzyskać kryteria istnienia rozwiązań okresowych w przypadku rezonansu.

Rozdział piąty poświęcony jest przypadkowi nierezonansowemu. Autor rozwija odpowiednie zasady uśredniania, wyprowadza wzory indeksowe oraz uzyskuje oszacowania a priori dla rozwiązań. W tej części pracy Doktorant formułuje również warunki asymptotyczne na nieliniowość nieco silniejsze od stosowanych w literaturze, wykazując jednocześnie, że implikują one klasyczne tzw. warunki silnego rezonansu (w odniesieniu do członu nieliniowego). Dzięki temu możliwe jest zastosowanie schematu topologicznego opartego na analizie operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii i obliczeniu odpowiedniego indeksu punktu sta-

tego, co prowadzi do kryteriów istnienia rozwiązań okresowych także w przypadku braku rezonansu.

Rozprawę uzupełniają dodatki, w których Autor zestawia najważniejsze fakty z analizy funkcjonalnej oraz z teorii indeksu punktu stałego wykorzystywane w pracy.

Ocena pracy

Uzyskane w pracy wyniki dotyczące istnienia rozwiązań okresowych dla nieliniowego tłumionego równania falowego mają charakter oryginalny i wpisują się w aktualny nurt badań nad nieliniowymi równaniami ewolucyjnymi. W mojej ocenie stanowią one wartościowy materiał do publikacji.

Rozprawa jest napisana bardzo starannie i przejrzysto. Wstęp w czytelny sposób przedstawia kontekst literaturowy oraz motywację podejmowanych badań. Zasadnicza część pracy liczy ponad 120 stron, ma wyraźnie techniczny charakter i dotyczy zagadnień wymagających bardzo dobrej znajomości współczesnych metod analizy nieliniowej. Poziom trudności technicznej uzyskanych wyników jest wysoki. Autor wykazuje się bardzo dobrą znajomością stosowanego aparatu matematycznego oraz umiejętnością sprawnego posługiwania się zaawansowanymi metodami analizy funkcjonalnej i teorii punktów stałych.

Na podkreślenie zasługuje bardzo dobra organizacja, oraz spójność konstrukcji aparatu analitycznego prowadzącego do dowodu głównych twierdzeń pracy. Poszczególne etapy argumentacji są przedstawione w sposób przejrzysty i logiczny. Świadczy to o dużej dojrzałości matematycznej i samodzielności badawczej Doktoranta oraz o jego bardzo dobrym przygotowaniu do prowadzenia dalszej działalności naukowej w dziedzinie analizy nieliniowej.

Podsumowując, rozprawa stanowi wartościowy wkład w badania nad nieliniowymi równaniami ewolucyjnymi i świadczy o bardzo dobrym przygotowaniu Doktoranta do prowadzenia samodzielnej działalności naukowej.

Stwierdzam, że rozprawa mgra Władysława Klinikowskiego spełnia wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim określone w obowiązujących przepisach. Wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.