

prof. dr hab. Dariusz Bugajewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań

Poznań, 27.01.2026r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pana magistra Władysława Jana Klinikowskiego
*Periodic Solutions of Nonlinear Damped Wave Equations
on the Whole Euclidean Space*

Głównym celem rozprawy doktorskiej przygotowanej przez pana magistra Władysława Jana Klinikowskiego jest badanie nieliniowego tłumionego równania falowego i podanie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych tego równania, które są określone na n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Nieco bardziej precyzyjnie, głównymi wynikami rozprawy są dwa twierdzenia egzystencjalne dotyczące łagodnych T -okresowych rozwiązań (tak zwanych „mild solutions”) tłumionego równania falowego z rezonansem w nieskończoności (Theorem I (rozszerzona wersja Theorem 4.4.1)) oraz bez rezonansu (Theorem II (rozszerzona wersja Theorem 5.5.1)).

Przeszukując znane bazy Mathematical Reviews oraz Zentralblatt für Mathematik, a także Google Scholar i arXiv, znalazłem w dorobku pana Klinikowskiego jeden artykuł opublikowany wspólnie z A. Ćwiszewskim w znanym czasopiśmie Journal of Differential Equations. Wnioskuje zatem, że do tej pory zasadnicze wyniki zawarte w recenzowanej pracy nie zostały opublikowane (oczywiście nie posiadam wiedzy na temat ich ewentualnego przedłożenia do publikacji).

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Nie mogąc nazwać się ekspertem w zakresie języka angielskiego, pozwalam sobie mimo to stwierdzić, że pan mgr Klinikowski bardzo dobrze wywiązał się z zadania przygotowania rozprawy w tym języku. Znalazłem tylko kilka drobnych błędów językowych, w szczególności „literówek”, ale pozostaje to bez żadnego wpływu na moją ocenę wyrażoną powyżej.

Rozprawa jest obszerna - liczy ona 160 stron włączając Wprowadzenie („Introduction”). Składa się ona zasadniczo z pięciu rozdziałów. Ponadto zawiera ona Dodatek, Literaturę oraz Indeks (w spisie treści na str. iii, te dwie ostatnie pozycje zostały pominięte).

We Wprowadzeniu Autor opisał zagadnienia, którymi zajmuje się w rozprawie, przypomniał znane w literaturze wyniki związane z rozważanym tematem, przedstawił główne rezultaty rozprawy, opisał zawartości poszczególnych jej rozdziałów oraz ustalił notację. W Rozdziale 1, po przypomnieniu podstawowych faktów z teorii c_0 -semigrup i równań ewolucji Autor dowodzi twierdzenie dotyczące zbieżności łagodnych rozwiązań zagadnień Cauchy’ego dla równań semiliniowych (Theorem 1.3.1). Ponadto rozważane są w nim własności ciągłości i zwartości operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii.

Rozdział 2 dotyczy liniowego tłumionego równania falowego. W szczególności Autor rozważa w nim operator Schrödingera z potencjałem typu Kato-Rellicha. Dowodzi on, że semigrupa generowana przez operator falowy z tłumieniem jest kontrakcją względem miary niezwartości

Hausdorffa na przestrzeni będącej produktem kartezjańskim pewnych przestrzeni funkcyjnych (Theorem 2.3.9).

W Rozdziale 3 Autor zajmuje się tak zwanymi operatorami Nemytskiego (nieliniowymi operatorami złożenia), które stanowią jedną z podstawowych klas operatorów rozważanych w analizie nieliniowej. Istotną rolę odgrywa w nim wynik dotyczący oszacowania w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a pewnego zbioru wyznaczonego przez ciąg operatorów Nemytskiego, generowanych przez funkcje spełniające w szczególności warunki Lipschitza oraz ograniczoności w zerze (Proposition 3.3.1).

W kolejnym Rozdziale 4 Autor bada okresowe rozwiązania tłumionego równania falowego z rezonansem w nieskończoności. Wpierw wyprowadzony jest wzór na topologiczny indeks operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z rodziną pewnych autonomicznych równań ewolucji (Theorem 4.1.1) a następnie wersja tak zwanej „resonant averaging principle” z wzorem na topologiczny indeks dla pewnych nieautonomicznych równań ewolucji (Theorem 4.2.1). W Paragrafie 4.4 Autor dowodzi rozszerzoną wersję pierwszego z głównych wyników rozprawy (Theorem I), w której wykorzystuje tak zwane warunki Ladesmanna - Lazera oraz warunki silnego rezonansu. Ostatni Rozdział 5 zawiera dowód rozszerzonej wersji drugiego głównego wyniku rozprawy (Theorem II). Przedtem jednak Autor bada indeks topologiczny operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z tłumionym równaniem falowym o zmiennej częstotliwości oraz dowodzi wzór na indeks topologiczny związany z tłumionym równaniem falowym bez rezonansu, w którym nieliniowość nie zależy od czasu.

W paragrafach kończących Rozdział 4 oraz Rozdział 5, Autor przedstawia przykładowe zastosowania głównych wyników rozprawy do badania istnienia łagodnych T -okresowych rozwiązań nieliniowych tłumionych równań falowych z potencjałami Coulomba oraz szczególnymi typami nieliniowości (zaburzeń).

W Dodatku podzielonym na cztery grupy tematyczne, Autor zebrał szereg podstawowych definicji i twierdzeń dotyczących operatorów liniowych działających w przestrzeniach Banacha, pewnych przestrzeni funkcyjnych, miar niezwartości, a także teorii stopnia oraz indeksu topologicznego. Załączony Dodatek ułatwia czytanie recenzowanej rozprawy.

Podana przez Autora literatura obejmuje 59 pozycji. Znaczną jej część stanowią dobrze znane monografie z zakresu szeroko rozumianej analizy nieliniowej. Wszystkie pozycje wymienione w Literaturze są cytowane w tekście rozprawy. Należy docenić wysiłek Autora, który przy każdej pozycji występującej w Literaturze zaznaczył strony, na których jest ona cytowana.

Poniżej przedstawię dwie merytoryczne uwagi dotyczące recenzowanej rozprawy. Pierwsza dotyczy kontrakcji względem miary niezwartości Hausdorffa (zob. s. 15, 39, 43 oraz szczególnie 64 (założenie (iii))). W zasadzie istnieje tylko jedna szeroka klasa odwzorowań, której elementy spełniają założenie typu Darbo, sformułowane z użyciem miar niezwartości. Inne (nieliczne?) funkcje spoza tej klasy, które spełniają ten warunek, są dość osobliwe. Moim zdaniem warto byłoby w rozprawie dodać pewną uwagę dotyczącą założenia typu Darbo, tym bardziej, że wykorzystywane jest one w związku z badaniem równań różniczkowych.

Druga uwaga związana jest z warunkami $(H1)$ oraz $(F1)$ (warunek $(H1)$ pojawia się m.in. na s. 54, 63, 103 oraz 113; warunek $(F1)$ występuje m.in. na s. 48, 100, 102 oraz 106). Mówiąc nieco nieprecyzyjnie, mamy tu do czynienia z globalnymi warunkami Lipschitza nałożonymi na nieautonomiczny operator superpozycji działający na pewnych przestrzeniach funkcyjnych. Jak pokazują znane z literatury twierdzenia, często występuje w takich przypadkach „degeneracja” rozważanych operatorów do klasy odwzorowań afinicznych. Również w związku z tym warto byłoby w rozprawie dodać uwagę związaną z tą kwestią.

Ponadto znalazłem dosłownie kilka drobiazgów, które nie są warte, aby je tutaj wymieniać.

Uważam, że rozprawa doktorska pana mgra Władysława Jana Klinikowskiego zawiera ciekawe wyniki, a metody dowodowe pojawiające się w rozprawie mogą być wykorzystane w dalszych badaniach. Chciałbym wyraźnie podkreślić, że przedstawione powyżej dwie uwagi dotyczące recenzowanej rozprawy nie wpływają na moją całościową, wysoką jej ocenę. Przygotowanie takiej rozprawy wymagało od Autora bardzo dobrej znajomości szeregu pojęć i faktów z różnych teorii matematycznych, w szczególności z teorii równań różniczkowych cząstkowych, analizy funkcjonalnej, teorii przestrzeni funkcyjnych, analizy nieliniowej (ze wskazaniem na nieliniowe operatory superpozycji i miary niezwartości) oraz oczywiście topologii algebraicznej, zwłaszcza w zakresie teorii stopnia topologicznego i indeksu. Dowody kluczowych wyników rozprawy są często złożone (kilkuetapowe), ale mimo to są one przedstawione w sposób jasny, z dużą dbałością o precyzję i szczegóły, co ułatwia czytelnikowi ich analizę. Podane w rozprawie przykłady dobrze ilustrują rozważane zagadnienia. Dodam, iż moim zdaniem pan mgr Klinikowski jest bardzo dobrze przygotowany do prowadzenia dalszych badań z szeroko rozumianej analizy nieliniowej.

W konkluzji stwierdzam, że rozprawa doktorska napisana przez pana magistra Klinikowskiego spełnia wszystkie wymagania *Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2022 r. poz. 574 z późn. zm.)*.

Wnioskuje zatem o dopuszczenie pana magistra Władysława Jana Klinikowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

D. Bugajewski

