

Prof. dr hab. Tomasz Dłotko
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

**Opinia w postępowaniu habilitacyjnym
pani doktor Anny Gołębiewskiej
dla Rady Doskonałości Naukowej oraz Rady Dyscypliny
Matematyka Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu**

Opinia dotyczy wniosku pani doktor Anny Gołębiewskiej o nadanie stopnia doktora habilitowanego w *Dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w Dyscyplinie matematyka* na podstawie cyklu publikacji: *Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonalów niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych*.

Przebieg kariery naukowej. Pani Anna Gołębiewska ukończyła studia matematyczne na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu w 2003 roku. W 2009 roku doktoryzowała się tamże na podstawie rozprawy *Orbity krytyczne niezmienniczych funkcjonalów silnie nieokreślonych* przygotowanej pod kierunkiem profesora Sławomira Rybickiego. Od 2003 roku pracuje na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Obecnie przedstawia zbiór sześciu prac z lat 2013-2023 zebranych pod wspólnym tytułem: *Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonalów niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych* jako tzw. *osiągnięcie habilitacyjne*. Wszystkie prace wchodzące w skład tego osiągnięcia są współautorskie.

Stwierdzenie spełnienia warunków Art. 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku. Mogę w tym miejscu stwierdzić, że pani dr Anna Gołębiewska spełnia warunki stawiane w Artykule 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20.08.2018 roku. W szczególności posiada stopień doktora nauk matematycznych nadany przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w 2009 roku, posiada także dorobek naukowy pozwalający na wystąpienie z wnioskiem habilitacyjnym, co uzasadnię poniżej.

Opis wybranych elementów dorobku naukowego dr Anny Gołębiewskiej. Według dostarczonej dokumentacji Anna Gołębiewska jest współautorką lub autorką łącznie 17 prac naukowych, z których 6 wchodzi w skład "osiągnięcia habilitacyjnego". Jedyne dwie prace w całym dorobku są monoautorskie. Wszystkie prace są opublikowane w dobrych czasopismach matematycznych, w szczególności można tu wymienić: *Journal of Differential Equations* (4 prace), *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications* (3 prace), *Differential and Integral*

Tematyka badawcza Anny Gołębiewskiej. Tematyka badawcza Anny Gołębiewskiej pozostaje niezmienna przez cały okres jej pracy naukowej i dotyczy opisu rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych, głównie typu eliptycznego, metodami topologicznymi oraz wariacyjnymi. Równanie bądź układ równań są "przepisywane" w formie funkcjonału całkowego, następnie używając technik wariacyjnych poszukuje się punktów krytycznych tego funkcjonału powiązanych ze słabymi rozwiązaniami problemu wyjściowego. Pierwszy etap badań habilitantki polega na przedstawieniu stosownej modyfikacji istniejących twierdzeń używanych do opisu zbioru punktów krytycznych funkcjonałów. Te zmodyfikowane twierdzenia są następnie stosowane do badania własności zbiorów rozwiązań pewnych klas nieliniowych równań i układów równań cząstkowych, głównie eliptycznych. Typowym przykładem są tutaj układy postaci:

$$(1) \quad \begin{aligned} A\Delta u &= \nabla_u F(u, \lambda) \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad i \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

rozpatrywane w ograniczonym gładkim obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $u = (u_1, \dots, u_p)$ jest wektorowym rozwiązaniem zaś A przekątniową macierzą o wyrazach -1 lub 1 na głównej przekątnej. Zakłada się istnienie pewnego (tzw. "trywialnego") rozwiązania u_0 tego układu i poszukuje punktów krytycznych powiązanego z (1) funkcjonału

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_{\Omega} F(u(x), \lambda) dx,$$

dla którego problem (1) stanowi równanie Eulera-Lagrange'a. Badane są przy tym zarówno układy z macierzami A mającymi jedynie element -1 na głównej przekątnej, jak i takie z elementami różnych znaków na głównej przekątnej ("układy niekooperatywne"). Następnie przy użyciu metod topologicznych (jak techniki indeksu Conleya, globalne twierdzenie bifurkacyjne Rabinowitza, stopień odwzorowań współzmiennicznych) bada się istnienie lokalnej bądź globalnej bifurkacji z rozwiązania trywialnego. Bardziej wymagający jest przypadek układu niekooperatywnego, nie objęty założeniami tw. Rabinowitza, z operatorem $\nabla_u \Phi$ nie będącym pełnociągłym zaburzeniem identyczności.

Przejdę obecnie do omówienia kilku, najciekawszych według mnie, prac Anny Gołębiewskiej.

W pracy (A1) (numeracja prac cytowanych w opinii zgodna ze spisem umieszczonym na jej końcu) znajdziemy informacje wstępne, w szczególności analityczną definicję stopnia i jego związek z indeksem Conleya. Definicja ta jest równoważna z podaną przez profesora K. Gębę w pracy z 1997 roku. Uzyskany *stopień gradientowych odwzorowań współzmienniczych* ma własności analogiczne do stopnia Brouwera. Ponadto spełniona jest *formuła produktowa* pozwalająca obliczać stopień odwzorowania produktowego jako iloczyn stopni na współrzędnych. W pracy tej badane było również uogólnienie pojęcia niezmienniczego indeksu Conleya na przypadek nieskończonego wymiaru gdzie w przestrzeni Hilberta H badany jest G -niezmienniczy funkcjonał Φ klasy C^2 mający postać

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle - \xi(u),$$

z liniowym, ograniczonym, samosprężonym, G -współzmienniczym operatorem Fredholma L o indeksie 0 oraz operatorem $\nabla \xi : H \rightarrow H$ G -współzmienniczym i pełnociągłym. Rzutując problem na podprzestrzenie własne operatora L buduje się ciąg aproksymacyjny na przestrzeni H przybliżeń skończonego wymiaru. Przy użyciu niezmienników formułowane są warunki wystarczające istnienia lokalnych i globalnych bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$.

W pracy (A2) badane były układy równań eliptycznych postaci

$$\begin{aligned} (2) \quad & a_1 \Delta u_1 = \nabla_{u_1} F(u, \lambda), \quad x \in \Omega, \\ & \dots \\ & a_p \Delta u_p = \nabla_{u_p} F(u, \lambda), \end{aligned}$$

rozpatrywane z warunkiem Neumanna dla wszystkich składowych rozwiązania $u = (u_1, \dots, u_p)$. Przy dosyć standardowych założeniach odnośnie klasy wzrostu nieliniowości F lecz dopuszczając różne znaki dla współczynników a_i i przepisując powyższy układ w formie wariacyjnej pokazuje się w pracy (A2) istnienie nieograniczonego i spójnego zbioru $\mathcal{C}$ słabych rozwiązań powyższego układu. Dowodzi się tej własności pokazując istnienie "bifurkacji z nieskończoności".

Praca (A3) poświęcona jest badaniu bifurkacji z nieskończoności słabych rozwiązań niekooperatywnych układów eliptycznych postaci:

$$\begin{aligned} (3) \quad & -\alpha \Delta u = \nabla_u F(u, \lambda), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ & \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

z macierzą przekątniową $\alpha = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ złożoną z m_1 minus jedynek i m_2 jedynek; $m_1 + m_2 = N$. Używając niezmienniczej wersji twierdzenia o funkcji uwikłanej autorstwa E.N. Dancera podaje się tam warunek konieczny dla istnienia lokalnej bifurkacji ze zdegenerowanej orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$. Używając pojęcia "indeksu bifurkacji" podaje się dalej warunek wystarczający dla istnienia lokalnej bifurkacji, co

ujęto zbiorczo w podsumowującym Theorem 3.12. Jako ilustracja tego twierdzenia pokazane jest jego zastosowanie do zadania (3).

W pracy (A5) badana jest struktura zbioru rozwiązań układu równań eliptycznych na $(N - 1)$ wymiarowej sferze S^{N-1} w przypadku gdy odpowiadający mu funkcjonal posiada symetrię. Pozwala to na pokazanie istnienia globalnej bifurkacji ze stałego rozwiązania układu. Pokazane jest istnienie nieograniczonych zbiorów rozwiązań, analizowane są przykłady układu posiadającego jedną orbitę krytyczną lub układu z dwiema orbitami krytycznymi.

Omówione powyżej prace zawierają jedynie próbkę badań prowadzonych przez Annę Gołębiewską. Są one jednak reprezentatywne i dobrze charakteryzują uzyskane przez nią wyniki. Jej prace są skomplikowane pojęciowo lecz interesujące. Używają zaawansowanych faktów z zakresu nieliniowej analizy funkcjonalnej i rachunku wariacyjnego. Można również odnieść wrażenie, że być może niezamierzonym celem badań dr Gołębiewskiej są próby modyfikacji lub uogólniania klasycznego już dziś pojęcia indeksu Conleya.

Wnioski z przedstawionego powyżej opisu dorobku.

Mogę w tym miejscu stwierdzić, że zakres dorobku naukowego dr Anny Gołębiewskiej jednoznacznie wskazuje iż jej problematyka badawcza mieści się w zakresie *Dyscypliny matematyka*. Zarówno zestaw sześciu prac *Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonalów niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych* przedstawiony jako "osiągnięcie habilitacyjne" jak i pozostały dorobek naukowy stanowią w moim przekonaniu wystarczającą podstawę dla uzyskania stopnia doktora habilitowanego.

Udział w projektach badawczych i staże naukowe. Według dostarczonej dokumentacji dr A. Gołębiewska była w latach 2004-2016 Wykonawcą w trzech grantach (KBN, MNiSW oraz NCN) oraz Kierownikiem grantu UMK pt. *Spójne zbiory orbit krytycznych niezmienniczych funkcjonalów silnie nieokreślonych* w 2007 roku. Ma więc pojęcie o zdobywaniu grantów i prowadzeniu w ich ramach badań naukowych. W latach 2004-2024 dr Gołębiewska uczestniczyła w 18 konferencjach naukowych wygłaszając na nich referaty. W roku 2018 odwiedziła z krótką wizytą naukową Universidad de Granada w Hiszpanii a w 2019 roku Guangzhou University w Chinach.

Uwagi dotyczące opiniowanego wniosku. Mam kilka uwag dotyczących opiniowanego wniosku.

- (1) Zdecydowana większość prac Anny Gołębiewskiej to pozycje współautorskie. Jest więc bardzo trudno, poza zacytowaniem oświadczeń, rozgraniczyć wkład pracy poszczególnych autorów.

Ta sama uwaga dotyczy wszystkich pozycji zaliczonych do "osiągnięcia habilitacyjnego".

- (2) W moim odczuciu prezentowane rezultaty są mocno przeładowane definicjami, oznaczeniami oraz bardzo specyficznym nazewnictwem. Z tego powodu prace są trudno czytelne dla osób spoza wąskiego grona bezpośrednio zainteresowanych, co zapewne skutkuje małą ilością cytowań; 106 w bazie MatSciNet, w tym 37 bez autocytowań. Baza Google Scholar podaje 132 cytowania a baza ResearchGate 176 cytowań (stan na połowę września 2025).
- (3) Początkowo uważałem, że problematyka badań Anny Gołębiewskiej jest zdecydowanie abstrakcyjna. Dotarłem jednak do pracy doktorskiej pani Marty Kowalczyk pt. *Zastosowanie metod niezmienniczej analizy nieliniowej do badania istnienia i bifurkacji centralnych konfiguracji pewnych zagadnień mechaniki nieba*, UMK 2017, która dotyczy astronomicznego "problemu N-ciał", kojarzącemu się dla mnie z badaniami H. Poincaré. Trochę szkoda, że tego typu fizyczne odniesienia nie znalazły się w opiniowanej rozprawie habilitacyjnej.
- (4) Dobry jest przekrój czasopism matematycznych w których prace są publikowane. W szczególności wysoko cenione są czasopisma *Journal of Differential Equations* czy *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

Powyższe uwagi nie wpływają na moją pozytywną ocenę całego wniosku habilitacyjnego.

Konkluzja końcowa. Pragnę stwierdzić, że opiniowany wniosek habilitacyjny pani dr Anny Gołębiewskiej *Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonalów niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych* spełnia wszelkie warunki stawiane w Art. 2019 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku. Stanowi on również ciekawy i wartościowy wkład do nowoczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych. W związku z powyższym popieram wniosek doktor Anny Gołębiewskiej o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego w Dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, Dyscyplinie matematyka.

Katowice, 27.09.2025.

Prof. dr hab. Tomasz Dłotko.

Spis prac cytowanych w opinii.

- (A1) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir, Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, 6 (4), 2013, 985-997.
- (A2) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Connected sets of solutions for a nonlinear Neumann problem, *Differential and Integral Equations* 30, 2017, 833-852.
- (A3) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, Bifurcations from the orbit of solutions of the Neumann problem, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 57, 2018, 1-23.
- (A4) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, Global bifurcation from an orbit of solutions to non-cooperative semi-linear Neumann problem, *Journal of Differential Equations* 268, 2020, 6702-6728.
- (A5) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, Structure of sets of solutions of parametrised semi-linear elliptic systems on spheres, *Nonlinear Analysis - Theory Methods and Applications* 212, 2021, 1-20.
- (A6) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, Bifurcations from degenerate orbits of solutions of nonlinear elliptic systems, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 25, 2023, 1-22.