

Kraków, 11.09.25

Prof. dr hab. Klaudiusz Wójcik,  
Instytut Matematyki UJ

## RECENZJA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ I OCENA DOROBKU DR ANNY GOŁĘBIEWSKIEJ

p. t. **Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonałów  
niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań  
różniczkowych.**

### I. Ocena rozprawy habilitacyjnej.

Przedstawione do oceny osiągnięcie naukowe jest cyklem sześciu artykułów:

- (A1) *"Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps"*  
DCDS ser. S, vol. 6, nr 4 (2013), 985-997, (wspólna ze S. Rybickim);
- (A2) *Connected sets of solutions for a nonlinear Neumann problem*, Diff. Int.  
Eq. vol. 30, nr 11-12 (2017), 833-852 (wspólna z J. Kluczenko);
- (A3) *Bifurcation from the orbit of solutions of the Neumann problem*, Calc.  
Variations and PDE vol. 57, nr 1 (2018), 1-23, (wspólna z J. Kluczenko i  
P. Stefaniakiem);
- (A4) *Global bifurcation from an orbit of solutions to non-cooperative semi-  
linear Neumann problem*, JDE vol. 268, nr 11, (2020), 6702-6728 (wspólna  
z P. Stefaniakiem);
- (A5) *Structure of sets of solutions of parametrized semi-linear elliptic systems  
on spheres* Nonl. Anal. TMA vol. 212 (2021), 1-20 (wspólna z P. Stefani-  
akiem);
- (A6) *Bifurcations from degenerate orbits of solutions of nonlinear elliptic sys-  
tems* J. Fixed Point Theory and Appl. vol. 25, nr 1 (2023), 1-22 (wspólna  
z J. Kluczenko i P. Stefaniakiem).

Współautorem pracy (A1) jest promotor rozprawy doktorskiej Anny Gołębio-  
wskiej. Współautorzy pozostałych pięciu publikacji to mniej doświadczeni człon-  
kowie grupy naukowej prof. Rybickiego. Wszyscy współautorzy złożyli stosowne  
oświadczenia dotyczące ich wkładu w powstanie prac. Wynika z nich, że rola  
kandydatki była wiodąca. Tematyka rozprawy lokuje ją w ważnym nurcie anal-  
izy nieliniowej opartym na metodach topologicznych, głównie teorii stopnia  
gradientowych odwzorowań współzmienniczych, teorii stopnia niezmienniczych  
funkcjonałów silnie nieokreślonych, teorii niezmienniczego indeksu punktu Con-  
leya oraz teorii bifurkacji. Ten nurt badań został w Polsce zapoczątkowany przez

K. Gębę, M. Izydorka i S. Rybickiego. W pracach (A1), (A4), (A6) badane są pewne teoretyczne aspekty tych niezmienników. Narzędzie te są używane w pracach (A2)-(A6) do opisu własności zbiorów rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych ze szczególnym naciskiem na równania eliptyczne. Dokładniej, badany jest zbiór słabych rozwiązań równań eliptycznych na sferze oraz problemu Neumanna postaci

$$\begin{cases} A\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda) & \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  jest otwarty, ograniczony i ma gładki brzeg,  $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ ,  $a_i \in \{-1, 1\}$  oraz  $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_p)$  dla funkcji  $u = (u_1, \dots, u_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Zakłada się, że istnieje trywialna rodzina rozwiązań, czyli istnieje  $u_0 \in \mathbb{R}^p$  będące punktem krytycznym  $F$  dla każdego  $\lambda$ . Problem (1) ma sformułowanie wariacyjne, czyli jego słabe rozwiązania odpowiadają rozwiązaniom równania

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0, \quad (2)$$

dla funkcjonału

$$\Phi : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \ni (u, \lambda) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_{\Omega} F(u(x), \lambda) dx \in \mathbb{R},$$

gdzie  $\mathbb{H} = \oplus_{i=1}^p H^1(\Omega)$ .

W osiągnięciu rozważa się układy (1) posiadające jedną z dwóch rodzajów symetrii. Pierwsza dotyczy niezmienniczości  $\Omega$  względem pewnej grupy symetrii  $\mathbb{R}^n$ , głównie  $SO(N)$ . Drugi rodzaj to  $\Gamma$ -niezmienniczość  $F$  względem  $u$  dla pewnej zwartej grupy Liego  $\Gamma$  działającej na  $\mathbb{R}^p$ . W obu przypadkach funkcjonal  $\Phi$  jest niezmienniczy i jego punkty krytyczne tworzą orbity.

Z punktu widzenia moich zainteresowań naukowych najciekawsza jest praca (A1). Autorzy dowodzą (Thm. 3.5 w (A1)) uogólnienia twierdzenia Poincarégo-Hopfa podającego związek między niezmienniczym indeksem Conleya i stopniem niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych. To ostatnie pojęcie autorzy zdefiniowali w innej wspólnej pracy (praca [21] z bibliografii autoreferatu). Warto tu przypomnieć, że w kontekście klasycznego indeksu Conleya analogiczne rezultaty zostały dużo wcześniej uzyskane przez Szrednickiego. Drugim ważnym rezultatem w (A1) jest formuła produktowa dla stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych (Thm. 3.1). Powyższe niezmienniki są używane w pracach (A2)-(A6) w różnych problemach bifurkacyjnych. W pracy (A2), dla pewnego problemu typu (1), udowodniono istnienie nieograniczonej składowej spójnej zbioru rozwiązań nietrywialnych. Wykorzystano metodę bifurkacji z nieskończoności w oparciu o odpowiednio zdefiniowany indeks. Stosowalność tych rezultatów ogranicza się do zagadnień z potencjałem asymptotycznie kwadratowym w nieskończoności. W pracach (A3)-(A6) rozważano zagadnienia w których istnieje orbita rozwiązań stałych i jest ona zbiorem wymiaru większego od 0. W pracy (A3) wykorzystano metodę teorii badania bifurkacji wprowadzoną przez Rybickiego i współautorów w pracy [35] oraz Thm. 3.5 z (A1)

do dowodu istnienia globalnej bifurkacji słabych rozwiązań z orbity rozwiązań stałych dla problemu Neumanna na kuli z niezmienniczym potencjałem. Praca (A4) daje początek badaniom nad metodami pozwalającymi jednocześnie badać bifurkacje z orbity i opisywać własności bifurkującego zbioru. Prowadzi to do naturalnych problemów dotyczących teorii stopnia niezmienniczych funkcjonalów silnie nieokreślonych. Przy założeniu o niezdegenerowaniu orbity punktów krytycznych podano metodę obliczania, kiedy stopnie dwóch odwzorowań są różne na zbiorze zawierającym taką orbitę. W pracy (A6) rozważano analogiczne problemy dla orbity zdegenerowanej. Jako zastosowanie tych abstrakcyjnych rezultatów pokazano (w (A4)), że jeśli zbiór  $\Omega$  jest  $SO(N)$ -niezmienniczy, potencjał  $F$  jest niezmienniczy oraz orbita punktów krytycznych  $F$  jest niezdegenerowana, to zachodzi globalna bifurkacja rozwiązań problemu (1). Ponadto, pokazano nieograniczonych kontynuów rozwiązań takiego układu. W przypadku zdegenerowanym podobne rezultaty otrzymano w (A6). W pracy (A5) badano globalną bifurkację rozwiązań układu zdefiniowanego na sferze.

Przedstawione osiągnięcie oceniam wysoko. Zawiera ono ciekawe rezultaty czysto teoretyczne i ich zastosowania do teorii bifurkacji. Kandydatka biegle posługuje się zaawansowanymi metodami i technikami: teoria stopnia współzmienniczego odwzorowań gradientowych i niezmienniczych funkcjonalów silnie nieokreślonych, teorii niezmienniczych funkcji Morse'a, teorii reprezentacji zwartych grup Liego i własności pierścienia Eulera takich grup oraz teorii niezmienniczego indeksu Conleya. Ważnym uzyskanym wynikiem jest uogólnienie Globalnego Twierdzenia Bifurkacyjnego Rabinowitza dla pewnej klasy problemów. Artykuły (A1)-(A6) zostały opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach ((A1),(A3),(A5)). Pewnym mankamentem osiągnięcia jest jego rozpoznawalność w środowisku wyrażona cytowaniami. Według bazy MR najwyżej cytowana praca (A1) ma 18 cytowań. Niestety są to głównie autocytytowania albo cytowania współautorów. Wynika to moim zdaniem z tego, że ze względu na stosowane dość trudne pojęciowo i technicznie skomplikowane metody prace te są mało dostępne dla niespecjalistów, a teorie stopnia i indeksu Conleya są moim zdaniem aktualnie w pewnym odwrócie, więc specjalistów nie ma wielu. Uważam jednak, że jest to wartościowa matematyka i z czasem doczeka się szerszego dostrzeżenia.

## II. Charakterystyka pozostałego dorobku naukowego.

Dorobek naukowy autorki, który nie jest zawarty w rozprawie habilitacyjnej obejmuje jedenaście opublikowanych artykułów naukowych ([P1-P11]). Dotyczy on głównie:

1. teorii stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych,
2. rozwiązań okresowych równań newtonowskich i hamiltonowskich,
3. układów eliptycznych.

Większość tych prac jest opublikowanych w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach - (P1), (P10), (P11) opublikowano w JDE.

Lista publikacji Anny Gołębiewskiej świadczy o tym, że potrafi Ona prowadzić wspólne badania z innymi badaczami, zarówno tymi o ugruntowanej pozycji jak i z młodymi naukowcami dopiero zaczynającymi karierę badawczą. Była promotorem pomocniczym w jednym zakończonym przewodzie doktorskim i aktualnie jest w dwóch następnych. Odbyła dwa dwutygodniowe staże zagraniczne (Chiny, Hiszpania). Była wykonawcą w trzech grantach (KBN, MNiSW, NCN). Wygłosiła około 20 referatów na konferencjach naukowych (Belgia, Czechy, Hiszpania, Polska, Portugalia, Szwecja).

**Konkluzja:** Zarówno przedstawione osiągnięcie, jak i cały dorobek doktor Anny Gołębiewskiej oceniam wysoko i w mojej opinii spełnia on wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe dla nadania stopnia naukowego doktora habilitowanego.

K. Wójcik