



UNIwersytet
Warszawski



Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki (IMSiM)
prof. dr hab. Piotr B. Mucha

Warszawa, 17 listopada 2025

Recenzja rozprawy habilitacyjnej dr Anny Gołębiewskiej

p.t.: "Globalne bifurkacje z orbit krytycznych
funkcjonałów niezmienniczych z zastosowaniem
do eliptycznych równań różniczkowych"

Pani Anna Gołębiewska obroniła doktorat w 2009 w kierunku nauk matematycznych na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu pod kierunkiem prof. dr hab. Sławomira Rybicka. Tytuł rozprawy to: „Orbity krytyczne niezmienniczych funkcyjonałów silnie nieokreślonych”. Jest autorem około 20 prac w pisma określanych jako dobre, z dużą rozpoznawalnością w dziedzinie.

Przedłożyła rozprawę habilitacyjną składającą się z 6 prac:

(A1) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir, Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, vol. 6, nr 4, 2013, s. 985–997.

(A2) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Connected sets of solutions for a nonlinear Neumann problem, Differential and Integral Equations, vol. 30, nr 11-12, 2017, s. 833–852.

(A3) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, Bifurcations from the orbit of solutions of the Neumann problem, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, vol. 57, nr 1, 2018, s. 1–23.

(A4) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, Global bifurcation from an orbit of solutions to non-cooperative semi-linear Neumann problem, *Journal of Differential Equations*, vol. 268, nr 11, 2020, s. 6702–6728.

(A5) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, Structure of sets of solutions of parametrised semi-linear elliptic systems on spheres, *Nonlinear Analysis - Theory Methods & Applications*, vol. 212, 2021, s. 1–20.

(A6) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, Bifurcations from degenerate orbits of solutions of nonlinear elliptic systems, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 25, nr 1, 2023, s. 1–22.

Prace ukazały się w rozpoznawalnych pismach, około połowa z nich ma również bardzo dobrą opinię w środowisku. Załącznikiem jest bardzo dobrze napisany autoreferat, zawierający dogłębny opis wymienionych prac. W skrócie: tematem pracy jest rozwoju metod topologii stosowanych do badania zbioru punktów krytycznych funkcjonału, ze uwzględnieniem stopnia gradientowych odwzorowań współmienniczych oraz niezmienniczego indeksu Conleya. To z kolei zastosowane jest do rezultatów otrzymanych przy pomocy rzeczonych metod do opisu własności zbiorów rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych. W szczególności istnienia spójnych oraz nieograniczonych podzbiorów takich zbiorów. W przedstawionym cyklu koncentrujemy się na pokazaniu zastosowania omawianych metod do układów równań eliptycznych.

W omawianym przypadku równania eliptyczne reprezentowane są przez funkcjonały postaci:

$$\Phi(u, \lambda) = \int_{\Omega} \pm |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u, \lambda) dx$$

a rozwiązania przez punkty krytyczne tego funkcjonału, tj.:

$$\nabla \Phi(u, \lambda) = 0.$$

Zauważmy, że funkcjonał Φ może być nieorganiczny (ani z doły, czy góry). Zakładamy, że istnieje trywialny zbiór rozwiązań, i używając metod topologicznych celem jest znalezienie nietrywialnych rozwiązań dla równań określonych przez powyższy funkcjonał.

Przejdę do bardzo krótkiego opisu każdej z prac, dokładny i przemyślany opis wyników przedstawiany jest w autoreferacie, zatem rozszerzenie tego punktu nie jest potrzebne.

Praca **(A1)**:

Artykuł bada związek pomiędzy stopniem topologicznym dla niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych a indeksem Conleya. Dowodzi, że zmiana indeksu Conleya pociąga

za sobą zmianę stopnia dla odwzorowań gradientowych, co prowadzi do sformułowania warunków wystarczających dla globalnej bifurkacji orbit krytycznych.

Praca (A2):

Celem pracy jest wykazanie istnienia spójnych i nieograniczonych zbiorów rozwiązań układu równań eliptycznych z warunkami brzegowymi Neumanna. Dowód opiera się na twierdzeniu o bifurkacji z nieskończoności, które uzyskuje się przy pomocy topologicznego stopnia dla funkcjonałów G-niezmienniczych.

Praca (A3):

Praca analizuje bifurkacje w nieliniowym problemie Neumanna z potencjałem niezmienniczym, gdzie punkty krytyczne tworzą orbity. Dzięki zastosowaniu metod równaniowych autorzy podają warunki na wystąpienie bifurkacji lokalnych i globalnych w terminach strony prawej układu i widma laplasjanu, identyfikując przy tym orbity prowadzące do globalnego złamania symetrii.

Praca (A4):

Celem pracy jest zbadanie globalnej bifurkacji z orbity krytycznej w problemach dotyczących silnie nieokreślonych funkcjonałów, związanych z nieliniowymi układami eliptycznymi. Kluczowym elementem jest powiązanie indeksu orbity (zdefiniowanego via stopień równaniowy) z indeksem punktu krytycznego, co prowadzi do twierdzeń o istnieniu bifurkacji i nieograniczonych zbiorów rozwiązań.

Praca (A5):

Artykuł bada parametryczny, symetryczny układ równań eliptycznych na sferze, skupiając się na strukturze zbiorów rozwiązań przy założeniu istnienia orbit krytycznych. Wykorzystując alternatywę Rabinowitza, autorzy formułują warunki wystarczające dla bifurkacji nieograniczonych zbiorów rozwiązań.

Praca (A6):

Artykuł bada globalną bifurkację rozwiązań nietrywialnych dla nieliniowych układów eliptycznych na sferze i w problemie Neumanna na kuli. Analizując bifurkację z rodzin rozwiązań stałych tworzących zdegenerowane orbity krytyczne, autorzy obliczają indeks takich orbit za pomocą stopnia dla równaniowych odwzorowań gradientowych, co pozwala dowieść istnienia bifurkacji w przypadku nieizolowanych punktów krytycznych.

Wyniki uzyskane w omawianych pracach oceniam pozytywnie. Mamy tu do czynienia z zaawansowanym zastosowaniem metod topologicznych do badania równań eliptycznych

związanych z określoną klasą funkcjonałów. Szczególnie interesujące są rezultaty dotyczące przypadków silnie nieokreślonych, w których inne metody analizy okazują się trudne lub wręcz niemożliwe do zastosowania. Oczywiście część twierdzeń wymaga specjalistycznych założeń dotyczących przestrzeni lub szczególnej postaci funkcji F . Niemniej, aby osiągnąć prezentowane wyniki, Autorka znacząco rozwinęła metody topologiczne oparte na stopniu odwzorowań współzmienniczych oraz na niezmienniczym indeksie Conleya.

W cyklu prac (A1)–(A6) rozwinęto nowoczesne podejście topologiczne do analizy globalnej bifurkacji w problemach z symetriami. Z jednej strony wprowadzono ogólne metody abstrakcyjne, prowadzące m.in. do uogólnienia klasycznego twierdzenia Rabinowitza. Z drugiej strony wykazano, że narzędzia te umożliwiają uzyskanie nowych wyników dla układów eliptycznych, w tym twierdzeń o istnieniu rozwiązań nietrywialnych oraz nieograniczonych kontynuów rozwiązań.

Najważniejsze osiągnięcia obejmują opracowanie nowych technik obliczania niezmienników topologicznych w obecności symetrii oraz skuteczne zastosowanie teorii stopnia i niezmienniczego indeksu Conleya. Rezultaty te w przekonujący sposób pokazują, że narzędzia topologiczne stanowią naturalny i niezwykle efektywny aparat w analizie układów równań różniczkowych ze szczególnymi symetriami.

Naturalne pytania, które się tutaj pojawiają, dotyczą możliwości zastosowania przedstawionej teorii – a właściwie uzyskanych wyników – do analizy układów ewolucyjnych, czyli naturalnych parabolicznych odpowiedników badanych układów eliptycznych. Wydaje mi się, że takie rezultaty mogłyby wiele powiedzieć o potencjalnej strukturze atraktorów. Nie potrafię ocenić, jak daleko jesteśmy od odpowiedzi na tak postawione pytanie, gdyż sam nie pracuję w tej dziedzinie, choć metody topologiczne tego typu są bardzo interesujące. Z drugiej strony metody zaprezentowane w pracach przywodzą mi na myśl teorię solitonów, gdzie dla pewnych specyficznych nieliniowych równań cząstkowych, poprzez zastosowanie wyrażonych transformacji, uzyskuje się nietrywialne rozwiązania wychodząc od rozwiązań trywialnych.

Poziom rozprawy habilitacyjnej pod każdym względem oceniam wysoko.

Przejdę teraz o oceny dorobku naukowego poza powyższymi 6 pracami. Autorka dzieli je na trzy grupy:

- Rezultaty dotyczące teorii stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych;
- Rezultaty dotyczące rozwiązań okresowych układów newtonowskich i hamiltonowskich;
- Rezultaty dotyczące układów eliptycznych.

Pierwszy kierunek badawczy jest ściśle związany z tematyką rozprawy habilitacyjnej, natomiast drugi można dobrze zilustrować przykładem pracy (P10) – JDE 2022. W tej publikacji autorzy analizują autonomiczne układy Newtonowskie z siłami Coriolisa i badają istnienie globalnych gałęzi orbit periodycznych bifurkujących z punktów równowagi. Zastosowanie teorii stopnia pozwala im uzyskać wyniki wykraczające poza klasyczne twierdzenie Lapunowa, obejmujące również przypadki zdegenerowane. Metody te prowadzą do istotnych wniosków w mechanice niebieskiej: autorzy dowodzą istnienia co najmniej siedmiu gałęzi orbit periodycznych w trójwymiarowej wersji ograniczonego trójkątnego problemu czterech ciał. Ostatnia grupa prac, reprezentowana m.in. przez (P7), ponownie pozostaje w bezpośrednim związku z główną tematyką badań dr Anny Gołębiewskiej.

Uzupełniając ocenę pozostałych aktywności dr Anny Gołębiewskiej, należy zauważyć stosunkowo niewielką aktywność poza macierzystą uczelnią. W szczególności brak informacji o kierowaniu grantami, a wskaźniki cytowań pozostają umiarkowane. Trzeba jednak podkreślić, że tego typu mierniki są ze sobą silnie powiązane, lecz nie zawsze stanowią miarodajną ocenę merytorycznej wartości dorobku naukowego.

Dorobek dydaktyczny jest relatywnie skromny: pod opieką dr Gołębiewskiej pozostawał jeden doktorant (w roli promotora pomocniczego), jedna magistrantka oraz kilku studentów realizujących prace licencjackie.

Reasumując, pozytywnie oceniam osiągnięcia naukowe dr Anny Gołębiewskiej. Zaprezentowane rezultaty stanowią eleganckie i oryginalne zastosowanie metod topologicznych do trudnych i nietrywialnych zagadnień analizy równań cząstkowych. Dr Gołębiewska wykazuje głębokie zrozumienie tej wymagającej dziedziny matematyki.

Stwierdzam, że przedstawiony materiał stanowi wystarczającą podstawę – w myśl zwyczajów oraz przepisów o stopniach i tytułach naukowych – do uzyskania stopnia doktora habilitowanego. Wnoszę o dopuszczenie dr Anny Gołębiewskiej do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Z poważaniem,



Piotr B. Mucha