

Gdańsk, dn. 29.09.2025 r.

Prof. dr hab. Joanna Janczewska  
Instytut Matematyki Stosowanej  
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej  
Politechnika Gdańska  
ul. G. Narutowicza 11/12  
80-233 Gdańsk

**Opinia w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego  
w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka  
pani dr Annie Gołębiewskiej**

Pani Anna Gołębiewska ukończyła studia magisterskie na kierunku matematyka na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu w 2003 roku. Tytuł jej pracy magisterskiej brzmiał „Rozwiązania okresowe asymptotycznie liniowych układów hamiltonowskich z rezonansem w nieskończoności”. Sześć lat później na tej samej uczelni obroniła rozprawę doktorską z matematyki nt. „Orbity krytyczne niezmienniczych funkcjonatów silnie nieokreślonych”. Promotorem obu prac był prof. Sławomir Rybicki. Jej kariera zawodowa związana jest z toruńską Alma Mater. Od 2003 roku pracuje na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, od 2010 roku na stanowisku adiunkta. Kilkukrotnie wyjeżdżała na krótkie pobyty naukowe, m.in. do Chin (Guangzhou University) i Hiszpanii (Universidad de Granada).

Jest autorką dwóch i współautorką piętnastu artykułów naukowych opublikowanych w takich czasopismach jak: *Advances in Differential Equations*; *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*; *Differential and Integral Equations*; *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*; *Electronic Research Archive*; *Nonlinear Analysis*; *Journal of Differential Equations*; *Journal of Dynamics and Differential Equations*; *Journal of Fixed Point Theory and Applications*; *Journal of Mathematical Analysis and Applications*; *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Są to dobre i bardzo dobre czasopisma. Uzyskany dorobek jest widoczny w znanych bazach cytowań. Na dzień 13 września br. baza MathSciNet odnotowała 106 cytowań, w tym 37 bez autocytowań, w 53 publikacjach przez 43 autorów; baza Web of Science 65 cytowań, w tym 34 bez autocytowań, w 35 publikacjach; a baza Scopus 79 cytowań w 42 publikacjach. Indeks Hirscha habilitantki wynosi 4. Nie sposób jednak nie zauważyć wyraźnej dysproporcji między liczbą cytowań przez innych autorów a liczbą autocytowań. Ponadto wyniki kandydatki są niemal niewymieniane w bibliografiach prac autorów spoza jej otoczenia naukowego, choć problematyka badawcza dr Gołębiewskiej jest uprawiana przez niemałą liczbę matematyków w wielu ośrodkach.

Zainteresowania naukowe pani Anny Gołębiewskiej dotyczą teorii bifurkacji i jej zastosowań do badania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

Osiągnięciem naukowym dr Anny Gołębiewskiej stanowiącym podstawę ubiegania się o stopień doktora habilitowanego jest cykl sześciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych ujętych w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (zwanej dalej ustawą):

[A1] A. Gołębiewska, S. Rybicki, Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 6 (2013), no. 4, 985-997;

[A2] A. Gołębiewska, J. Kluczenko, Connected sets of solutions for a nonlinear Neumann problem, *Differential Integral Equations* 30 (2017), no. 11-12, 833-852;

[A3] A. Gołębiewska, J. Kluczenko, P. Stefaniak, Bifurcations from the orbit of solutions of the Neumann problem, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57 (2018), no. 1, Paper no. 21, 23 pp.;

[A4] A. Gołębiewska, P. Stefaniak, Global bifurcation from an orbit of solutions to non-cooperative semi-linear Neumann problem, *J. Differential Equations* 268 (2020), no. 11, 6702-6728;

[A5] A. Gołębiewska, P. Stefaniak, Structure of sets of solutions of parametrised semi-linear elliptic systems on spheres, *Nonlinear Anal.* 212 (2021), Paper no. 112451, 20 pp.;

[A6] A. Gołębiewska, J. Kluczenko, P. Stefaniak, Bifurcations from degenerate orbits of solutions of nonlinear elliptic systems, *J. Fixed Point Theory Appl.* 25 (2023), no. 1, Paper no. 36, 22 pp.,

zatytułowany „Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonatów niezmienniczych z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych”. Wszystkie prace z cyklu są współautorskie. Zgodnie z art. 219 ust. 2 ustawy, do wniosku są załączone oświadczenia wszystkich współautorów. Wynika z nich, że indywidualny wkład habilitantki w uzyskanie wyników zawartych w pracach tworzących cykl jest istotny zarówno od strony koncepcyjnej, jak i metodologicznej. W autoreferacie dr Anna Gołębiewska wyszczególniła, nad którymi zagadnieniami z artykułów [A1]-[A6] pracowała. Mimo to sądzę, że lepiej byłoby, gdyby chociaż jedna praca była indywidualna. Zgodnie z przedstawioną dokumentacją kandydatka nie ubiegała się wcześniej o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

\*\*\*

Przejdę teraz do omówienia głównych wyników habilitantki. Przyjmuję oznaczenia jak w autoreferacie.

Tematyka przedstawionego cyklu artykułów dotyczy zjawiska globalnej bifurkacji (słabych) rozwiązań układów równań eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna. Bardziej precyzyjnie, rozpatruje się w nich układ postaci

$$\begin{cases} A\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda), & \text{w } \Omega \\ \frac{\delta u}{\delta \nu} = 0, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  jest otwartym i ograniczonym zbiorem z gładkim brzegiem,  $F: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją klasy  $C^2$  oraz  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ ,  $a_i \in \{-1, 1\}$ . Zakłada się, że istnieje punkt  $u_0 \in \mathbb{R}^p$  będący punktem krytycznym funkcji  $F$  dla każdego  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wówczas powyższy układ posiada rodzinę rozwiązań postaci  $\{u_0\} \times \mathbb{R}$ , nazywaną *trywialną rodziną rozwiązań*. Bada się problem istnienia rozwiązań nienależących do tej rodziny, tj. rozwiązań nietrywialnych. W tym celu autorzy stosują podejście wariacyjne. Mianowicie zamieniają problem istnienia (słabych) rozwiązań rozważanego układu na problem istnienia punktów krytycznych stowarzyszonego z nim funkcjonatu

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_{\Omega} F(u(x), \lambda) dx$$

określonego na przestrzeni  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ , gdzie  $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^p H^1(\Omega)$  oraz  $H^1(\Omega)$  oznacza standardową przestrzeń Sobolewa.

Zamiana powyższego układu na równanie Eulera

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0$$

pozwała na wykorzystanie różnych metod wariacyjnych, m.in.: twierdzenia Ambrosettiego-Rabinowitza o przełęczy górskiej, twierdzenia o punkcie siodłowym, zasady Ekelanda, oraz metod topologicznych, w szczególności metod z teorii bifurkacji opartych na niezmiennikach topologicznych typu stopień Leraya-Schaudera, indeks Conleya czy potok spektralny.

W pracach [A1]-[A6] stosuje się metody teorii bifurkacji. Bada się zmiany struktury zbioru rozwiązań powyższego równania przy zmianie parametru  $\lambda$ . Dokładniej mówiąc, poszukuje się odpowiedzi na pytanie, czy punkt  $(u_0, \lambda_0)$  należący do trywialnej rodziny rozwiązań tego równania jest punktem bifurkacji lokalnej tj. punktem skupienia rozwiązań nietrywialnych lub punktem bifurkacji globalnej tj. istnieje spójny, domknięty zbiór  $C(u_0, \lambda_0) \subset cl(\mathcal{N})$  zawierający punkt  $(u_0, \lambda_0)$  i taki, że albo  $C(u_0, \lambda_0)$  jest nieograniczony albo  $C(u_0, \lambda_0)$  jest ograniczony i  $C(u_0, \lambda_0) \cap (\{u_0\} \times \mathbb{R} \setminus \{(u_0, \lambda_0)\}) \neq \emptyset$ , gdzie

$$\mathcal{N} = \{(u, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} : \nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0, u \neq u_0\}.$$

Aby otrzymać pozytywne odpowiedzi na postawione pytanie, należy przyjąć pewne założenia na funkcję  $F$ . Autorzy zakładają, że  $F$  spełnia m.in. pewien warunek wzrostu oraz że istnieje macierz symetryczna  $B$  taka, że  $\nabla_u^2 F(u_0, \lambda) = \lambda B$  dla  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Przyjęte założenia implikują istnienie funkcji  $\xi: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^2$  takiej, że

$$F(u, \lambda) = \frac{\lambda}{2} (Bu, u) - \lambda (Bu_0, u) + \xi(u - u_0, \lambda)$$

oraz dla każdego  $\lambda \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\nabla_u \xi(0, \lambda) = \nabla_u^2 \xi(0, \lambda) = 0$ . Wówczas  $\nabla_u \Phi$  ma postać

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = L(u - u_0) + L_{\lambda B}(u - u_0) - \nabla_u \eta_0(u - u_0, \lambda),$$

gdzie  $L: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  jest samosprężonym, ograniczonym operatorem Fredholma indeksu zero,  $L_{\lambda B}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  jest samosprężonym, ograniczonym operatorem pełnociągłym,  $\nabla_u \eta_0: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  jest pełnociągły. W pracy [A4] opisano spektrum operatora  $L + L_{\lambda B}$  (Lemma 3.4). Dodatkowo zakłada się, że rozważany układ ma pewne symetrie, które pochodzą albo od obszaru, albo od funkcji  $F$ , albo zarówno od obszaru, jak i funkcji:

(S1)  $\mathbb{R}^N$  jest ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego  $G$  oraz  $\Omega$  jest zbiorem  $G$ -niezmienniczym;

(S2)  $\mathbb{R}^p$  jest ortogonalną  $\Gamma$ -reprezentacją i funkcja  $F$  jest  $\Gamma$ -niezmiennicza dla pewnej zwartej grupy Liego  $\Gamma$ .

Założenie (S1) implikuje, że  $\mathbb{H}$  jest ortogonalną reprezentacją grupy  $G$  z działaniem określonym wzorem  $(gu)(x) = u(g^{-1}x)$  dla  $g \in G, u \in \mathbb{H}, x \in \Omega$ . Wtedy  $\Phi$  jest funkcjonałem  $G$ -niezmienniczym. Natomiast założenie (S2) implikuje, że  $\mathbb{H}$  jest ortogonalną reprezentacją grupy  $\Gamma$  z działaniem określonym następująco  $(\gamma u)(x) = \gamma \cdot u(x)$  dla  $\gamma \in \Gamma, u \in \mathbb{H}, x \in \Omega$ . Wówczas  $\Phi$  jest funkcjonałem  $\Gamma$ -niezmienniczym. Z kolei, gdy spełnione są oba te założenia, to można zdefiniować działanie grupy produktowej  $\Gamma \times G$  na przestrzeni  $\mathbb{H}$  wzorem  $((\gamma, g)u)(x) = \gamma \cdot u(g^{-1}x)$  dla  $\gamma \in \Gamma, g \in G, u \in \mathbb{H}, x \in \Omega$ . W tej sytuacji  $\mathbb{H}$  jest ortogonalną  $\Gamma \times G$ -reprezentacją, a funkcjonał  $\Phi$  jest  $\Gamma \times G$ -niezmienniczy. Przy założeniach warunkujących symetrię wyjściowego układu bada się zjawisko lokalnej bifurkacji oraz zjawisko globalnej bifurkacji z orbity punktu  $(u_0, \lambda_0)$ . W pracach [A1]-[A6] do badania bifurkacji z orbity wykorzystuje się przede wszystkim niezmienniczy indeks Conleya oraz stopień gradientowych odwzorowań współzmienniczych. W przestrzeniach skończonego wymiaru konstrukcje tych niezmienników podali odpowiednio Andreas Floer i Kazimierz Gęba. Oba te niezmienniki mają swoje nieskończone wymiarowe odpowiedniki, a ich konstrukcje podali uczniowie Kazimierza Gęby – odpowiednio Marek Izydorek i Sławomir Rybicki. Zmiana niezmienniczego indeksu Conleya przy zmianie parametru implikuje bifurkację lokalną z orbity. Z kolei zmiana stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych pociąga za sobą bifurkację globalną z orbity. W [A4] autorzy uogólnili twierdzenie Rabinowitza o bifurkacji globalnej, znane jako *Alternatywa Rabinowitza*, na przypadek bifurkacji globalnej z orbity. Natomiast Theorem 2.8 z [A4] oraz Corollary 2.5 z [A6] stanowią rozwinięcie nowych metod obliczania tych niezmienników. Stosując te metody, udowodniono serię twierdzeń dotyczących globalnej bifurkacji rozwiązań układów eliptycznych: Theorem 3.5 w [A3] dla  $\Omega = B^N, A = -Id, G = SO(N), F(u, \lambda) = \lambda F(u)$ , Theorem 3.9 i Theorem 3.10 w [A4] dla  $A = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_2}), p = p_1 + p_2, G = SO(N)$  czy Theorem 3.8 w [A6] dla  $\Omega = B^N, A = -Id, G = SO(N)$ . W artykułach [A5] i [A6] otrzymano też rezultaty o globalnej bifurkacji z orbity dla układu eliptycznego na sferze

$$-\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda), \quad \text{na } S^{N-1}$$

(Theorem 3.7 w [A5]; Theorem 3.7 w [A6]). Ponadto w [A2] zakładając, że

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = \nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda)u + o(|u|),$$

gdy  $|u| \rightarrow \infty$ , badano zjawisko bifurkacji z nieskończoności (Theorem 2.5, [A2]). We wszystkich omawianych powyżej pracach istotny nie jest sam schemat dowodu istnienia bifurkacji, znany wcześniej, ale konkretne obliczenia, których autorzy nie bali się wykonać. Z drugiej strony, trzymanie się schematu, który prawie zawsze prowadzi do *Alternatywy Rabinowitza* lub *twierdzenia Krasnosielskiego*, w mojej ocenie wpływa na postrzeganie omówionych publikacji i niewielką liczbę cytowań.

Symetrie w zagadnieniach różniczkowych w naturalny sposób wynikają z zastosowań, w szczególności z fizyki matematycznej. To jeden z powodów, dla których układy eliptyczne o różnych rodzajach symetrii są badane przez wielu matematyków. Niestety ani w dostarczonych mi artykułach, ani w autoreferacie nie znalazłam żadnych konkretnych przykładów pochodzących z rzeczywistych zastosowań.

Podsumowując ocenę wartości prac zawartych w rozprawie, można stwierdzić, że zawierają one nowe rezultaty, stanowią spójny tematycznie cykl i znajdują się w jednym z głównych nurtów analizy nieliniowej. Moje krytyczne uwagi nie powinny przesłaniać faktu, że uzyskane przez autorów wyniki dotyczące spójnych zbiorów rozwiązań poszerzają naszą wiedzę z zakresu układów eliptycznych.

\*\*\*

Na pozostały dorobek publikacyjny habilitantki powstały już po obronie rozprawy doktorskiej składa się 9 artykułów. Współautorami tych publikacji są m.in.: Norimichi Hirano, Ernesto Pérez-Chavela, Sławomir Rybicki, Antonio J. Ureña. Prace z pozostałego dorobku dotyczą głównie problemu istnienia orbit okresowych w układach hamiltonowskich. Od strony metodologicznej są one podobne do prac z omówionego powyżej cyklu. Autorzy stosują w nich metody wariacyjne i topologiczne, oparte przede wszystkim na niezmiennikach topologicznych. Rozważają zagadnienia z symetriami. Tu w szczególności chciałabym wyróżnić samodzielną pracę habilitantki nt. „Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian systems” w *J. Math. Anal. Appl.* 400 (2013), no. 1, 254-265 ([P4]). Autorka bada istnienie i ciągłą zależność od parametru rozwiązań okresowych pewnej klasy autonomicznych układów hamiltonowskich. Rozważa układ, który jest nierezonansowy w nieskończoności, ale którego rozwiązania stacjonarne mogą być rezonansowe lub nierezonansowe. Rozwiązania okresowe znajduje jako punkty krytyczne funkcjonału działania zdefiniowanego w przestrzeni Hilberta. Gradient tego funkcjonału jest odwzorowaniem  $S^1$ -współmienniczym postaci pełnociągłe zaburzenie operatora Fredholma indeksu zero. W celu znalezienia punktów krytycznych habilitantka stosuje stopień dla funkcjonałów silnie nieokreślonych  $S^1$ -niezmienniczych. Technicznie podobna jest druga samodzielna praca kandydatki nt. „Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian systems with resonance” w *J. Dynam. Differential Equations* 30 (2018), no. 4, 1509-1524 ([P6]), w której - jak mówi tytuł - badany jest układ rezonansowy w nieskończoności. Z tych samodzielnych prac wynika, że habilitantka w efektywny sposób potrafi posługiwać się metodami topologii niezmienniczej. Szkoda, że swoje badania dotyczące układów hamiltonowskich ograniczyła tylko do poszukiwania rozwiązań okresowych. Z mojej perspektywy, jako osoby pracującej nad zagadnieniami dotyczącymi istnienia i krotności rozwiązań układów hamiltonowskich, naturalne byłoby poszerzenie badań o orbity łączące, homo- i heterokliniczne.

Kandydatka prezentowała swoje wyniki wygłaszając referaty na międzynarodowych konferencjach matematycznych zarówno w Polsce, jak i za granicą. Uczestniczyła w realizacji trzech projektów badawczych finansowanych w drodze konkursów krajowych (KBN, 2004-2007; MNiSW, 2008-2011; NCN, 2013-2016). Ponadto pełniła funkcję promotora pomocniczego w przewodzie doktorskim dra D. Strzeleckiego. Obecnie jest promotorem pomocniczym w dwóch kolejnych przewodach doktorskich.

Działalność dydaktyczna i organizacyjna pani Anny Gołębiewskiej mieści się w zwyczajowej normie dla kandydatów na stopień doktora habilitowanego, choć nie była specjalnie duża. Natomiast działalność popularyzatorska habilitantki, obejmująca różne działania mające na celu promowanie matematyki w szkołach podstawowych i średnich, jest bez wątpienia godna szacunku.

\*\*\*

Według mnie przedstawiony do oceny cykl publikacji, mimo kilku moich uwag krytycznych, spełnia wymagania ustawowe stawiane obecnie przed osobami ubiegającymi się o stopień doktora habilitowanego. Dlatego popieram wniosek pani dr Anny Gołębiewskiej o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

Joanna Janczewska