Autoreferat

Krzysztof Jasiński

Spis treści

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Krzysztof Jasiński
Adres: Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
E-mail: krzys@mat.umk.pl

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

14.12.2011 r. Doktorat, matematyka
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Tytuł rozprawy: *Oszacowania wariancji statystyk pozycyjnych i czasów pracy systemów niezawodnościowych*, promotor: prof. dr hab. Tomasz Rychlik

25.06.2007 r. Magisterium, matematyka sp. zastosowania matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Tytuł pracy: *Porównanie testów optymalnych i asymptotycznych w populacjach dyskretnych*, promotor: prof. dr hab. Tomasz Rychlik

28.02.2007 r. Dyplom ukończenia studiów specjalnych (4 semestry) w zakresie studiów europejskich
Wydział Prawa i Administracji oraz Centrum Studiów Europejskich UMK im. Jeana Monneta, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Tytuł pracy: *Wspólna polityka handlowa Wspólnoty Europejskiej*, promotor: prof. dr hab. Justyna Maliszewska-Nienartowicz

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1.10.2012 r. –	Katedra Statystyki Matematycznej i Eksploracji Danych (do 30.09.2019 r. Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych) Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu *adiunkt*
1.10.2011 r. –30.09.2012 r.	Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu *asystent*
1.10.2007 r. –30.09.2011 r.	Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu *studia doktoranckie*

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.), niniejszym wskazuję cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

O LICZBIE POPSUTYCH KOMPONENTÓW W DYSKRETNYM SYSTEMIE KOHERENTNYM

Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

[A1] Goroncy, A., JASIŃSKI, K. (2025), Discrete time three-state k-out-of-n system's failure and numbers of components in each state. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 457, s. 1–10, nr art. 116255.

[A2] JASIŃSKI, K. (2024), A study on the number of failed components in a failed coherent system consisting of different types of components. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 435, s. 1–9, nr art. 114839.

[A3] Dembińska, A., JASIŃSKI, K. (2024), Likelihood inference for geometric lifetimes of components of k-out-of-n systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 435, s. 1–18, nr art. 115267.

[A4] JASIŃSKI, K. (2022), On the number of failed components in a coherent system consisting of multiple types of components. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 410, s. 1–8, nr art. 114189.

[A5] JASIŃSKI, K. (2021), The number of failed components in a coherent working system when the lifetimes are discretely distributed. *Metrika* 84:7, s. 1081–1094.

[A6] Dembińska, A., JASIŃSKI, K. (2021), Maximum likelihood estimators based on discrete component lifetimes of a k-out-of-n system. *TEST* 30, s. 407–428.

4.1 Wstęp

W teorii niezawodności jednym z kluczowych pojęć są systemy koherentne. Odgrywają one istotną rolę w matematycznym modelowaniu złożonych urządzeń technicznych, które składają się z prostych komponentów. Podstawowym założeniem jest to, że stan takiego systemu zależy od stanów jego komponentów wyłącznie poprzez funkcję struktury. Funkcja struktury systemu kohernetnego powinna spełniać dwa warunki: musi być niemalejąca względem stanów komponentów oraz każdy komponent musi być istotny (komponent jest nieistotny, jeśli jego działanie lub awaria nie mają wpływu na funkcjonowanie systemu). Kluczową monografią poświęconą tej tematyce jest [4]. Większość badań w literaturze dotyczy przypadku binarnego, w którym zarówno system, jak i jego komponenty mogą znajdować się wyłącznie w jednym z dwóch stanów: pełnej sprawności lub całkowitej awarii. Jednym z ważnych przykładów systemów koherentnych są systemy typu k-spośród-n. W modelu binarnym system taki pozostaje sprawny, dopóki co najmniej k spośród n jego komponentów działa poprawnie. Zauważmy, że przypadki $k = 1$ oraz $k = n$ odpowiadają odpowiednio systemom równoległym i szeregowym. Jednak w rzeczywistych zastosowaniach bardziej elastyczne okazuje się podejście wielostanowe, które pozwala na modelowanie systemów o różnych poziomach wydajności – od pełnej sprawności aż do całkowitej awarii. Załóżmy, że zarówno system, jak i jego komponenty mogą przyjmować $M+1$ możliwych stanów, oznaczonych jako $0, \dots, M$, gdzie M oznacza stan pełnej sprawności, a 0 stan całkowitej awarii. W naszych badaniach ograniczamy się do modeli typu $\mathbf{k}$-spośród-n, gdzie $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ jest parametrem określającym wymagania dotyczące działania systemu. W pracach [47] i [73] zaproponowano dwie różne definicje systemów wielostanowych typu $\mathbf{k}$-spośród-n, oznaczane jako (I) i (II). Nie przytaczamy ich tutaj w pełni, jednak warto zwrócić uwagę na istotną różnicę między nimi. Według definicji (I), aby system znajdował się w stanie j lub wyższym, wystarczy spełnienie dowolnego z warunków dotyczących liczby komponentów działających w stanach od j do M. Natomiast w definicji (II) konieczne jest spełnienie wszystkich wymagań dotyczących liczby komponentów w stanach od 1 do j. Funkcje czasu życia i przeżycia dla tych dwóch rodzajów systemów wielostanowych, przy założeniu, że czasy życia komponentów są niezależnymi, o tym samym rozkładzie (ang. *independent identically distributed*, IID) zmiennymi losowymi, zostały przeanalizowane w pracy [21]. Istnieje również wiele rozszerzeń systemów wielostanowych, w tym modele uwzględniające komponenty o różnych wagach, zwane ważonymi systemami wielostanowymi. Więcej informacji na ten temat można znaleźć m.in. w pracach [27, 26, 35, 51] oraz [C1].

Nasze badania skupimy na przypadku trójstanowych systemów typu $\mathbf{k}$-spośród-n zgodnie z definicją (I), gdy $M = 2$. W tym modelu stan 2 oznacza pełną sprawność systemu, stan 1 reprezentuje jego częściową funkcjonalność, natomiast stan 0 odpowiada całkowitej awarii zarówno systemu, jak i jego komponentów. Definicję (I) zaproponowaną w [47] można uprościć i dostosować do trójstanowych systemów $\mathbf{k}$-spośród-n w następujący sposób.

Definicja 1 *Trójstanowy system typu* $\mathbf{k}$*-spośród-*n*, określony przez parametr* $k = (k_1, k_2)$*, znajduje się w stanie* 1 *lub wyższym, jeśli co najmniej* k_1 *komponentów znajduje się w stanie* 1 *lub wyższym lub co najmniej* k_2 *komponentów znajduje się w stanie* 2*. Natomiast system osiąga stan* 2 *wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej* k_2 *komponentów znajduje się w stanie* 2*.*

W analizie systemów technicznych, z perspektywy niezawodności, tradycyjnie rozważa się modele, w których czasy życia komponentów są opisywane za pomocą ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa. Jednak w ostatnich sześciu latach modele dyskretne zyskały na znaczeniu jako narzędzie do badania niezawodności systemów. W wielu praktycznych sytuacjach założenie o dyskretnym charakterze czasu życia okazuje się bardziej realistyczne i użyteczne. Czasami ciągłe monitorowanie systemu jest niemożliwe ze względów technicznych, ekonomicznych lub organizacyjnych, a jego stan może być oceniany jedynie w określonych, dyskretnych momentach czasowych (zob. [75]). Ponadto, w wielu przypadkach czas życia systemów lub ich komponentów jest naturalnie określany jako liczba cykli do momentu awarii. Przykładowo, trwałość opon samochodowych mierzy się w przejechanych kilometrach lub dniach eksploatacji, natomiast żywotność włącznika określa liczba jego włączeń i wyłączeń. W niniejszych badaniach skupiamy się na dyskretnych rozkładach czasów życia komponentów. Takie podejście znacząco komplikuje analizę niezawodności, ponieważ w jednej chwili może dojść do awarii więcej niż jednego komponentu. Kluczową pozycją w literaturze jest praca [25], w której omówiono modele dyskretne oraz ich zastosowania w inżynierii niezawodności i statystycznej kontroli jakości.

Nasze badania koncentrują się na pewnych aspektach probabilistycznych teorii niezawodności. Interesujemy się liczbą komponentów w każdym stanie w systemie koherentnym w momencie jego awarii lub w przypadku, gdy system nadal funkcjonuje w ustalonej chwili t. Jak powszechnie wiadomo, najistotniejszym narzędziem probabilistycznym dla poznania natury tej zmiennej jest jej rozkład prawdopodobieństwa. Jest to bardzo ważna wielkość, ponieważ umożliwia operatorom systemu lepsze planowanie i bardziej efektywne wykorzystanie zasobów. Odpowiednie prawdopodobieństwa dostarczają niezbędnych informacji do zapobiegania awarii systemu. Operatorzy mogą podjąć działania mające na celu wymianę lub przywrócenie do stanu operacyjnego komponentów, które uległy awarii, aby uniknąć lub zminimalizować ryzyko całkowitej awarii systemu. Podejmujemy również zagadnienie o istotnym znaczeniu praktycznym, związane z binarnymi systemami typu k-spośród-n, dotyczące wnioskowania o dyskretnym rozkładzie czasu życia komponentów. Precyzyjniej, analizujemy estymację największej wiarygodności nieznanego parametru tego rozkładu w sytuacji, gdy dostępne dane obejmują czasy awarii komponentów zarejestrowane do momentu uszkodzenia całego systemu, włącznie z tą chwilą.

Oznaczenia

Rozważamy system składający się z n komponentów ponumerowanych od 1 do n. Zakładamy, że rozpoczyna on działanie w chwili $t = 0$. Oznaczmy przez T czas życia systemu. Czasy życia poszczególnych komponentów oznaczymy przez zmienne losowe $T_1, \ldots, T_n$ o dystrybuantach $F_i(t) = P(T_i \leqslant t)$, $i = 1, \ldots, n$. W literaturze, m.in. w [4], jako typowe rozkłady szeroko stosowane w teorii niezawodności wymienia się następujące rozkłady ciągłe: wykładniczy $E(\lambda)$, $\lambda > 0$, gamma $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, Weilbulla $\mathrm{We}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ oraz dyskretne: Poissona $\mathrm{Poiss}(\theta)$, $\theta > 0$, dwumianowy $\mathrm{b}(w, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$, dwumianowy ujemny $\mathrm{nb}(w, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$, oraz geometryczny $\mathrm{geo}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$. Niech $T_{1:n} \leqslant \ldots \leqslant T_{n:n}$ oznaczają statystyki porządkowe odpowiadające czasom życia komponentów.

Następnie przez $\mathbf{I}(\cdot)$ oznaczamy funkcję wskaźnikową, czyli $\mathbf{I}(B) = 1$, jeśli zdarzenie B zachodzi oraz $\mathbf{I}(B) = 0$ w przeciwnym przypadku. Funkcja ta przyjmuje wartości w zbiorze boolowskim, co oznacza, że jej dziedzina składa się wyłącznie z dwóch elementów, które interpretujemy jako fałsz i prawdę. Przyjmujemy także konwencję, że $\bigcap_{i \in \emptyset} B_i = \Omega$, a więc przecięcie pustego zbioru zdarzeń jest równe całej przestrzeni probabilistycznej Ω. Ponadto przez $\mathcal{P}^n$ oznaczamy zbiór wszystkich permutacji $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ liczb $(1, 2, \ldots, n)$. Dalej przez $\mathcal{P}^n_m$, $m = 0, \ldots, n$ oraz $\mathcal{P}^n_{m,r}$, $0 \leqslant m < r \leqslant n$, oznaczymy podzbiory zbioru $\mathcal{P}^n$, zawierające wyłącznie te permutacje, które spełniają odpowiednio warunki

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_m, \quad j_{m+1} < j_{m+2} < \ldots < j_n,$$

i

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_m,\ j_{m+1} < j_{m+2} < \ldots < j_r,\ j_{r+1} < j_{r+2} < \ldots < j_n.$$

Przyjmujemy, że $\mathcal{P}^n_{0,r} = \mathcal{P}^n_r$ oraz $\mathcal{P}^n_{m,n} = \mathcal{P}^n_m$.

Ponadto $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ oznacza rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ^2. Oznaczenie $\xrightarrow{\text{P-a.s.}}$ określa zbieżność prawie wszędzie względem miary P, natomiast $\xrightarrow{\text{d}}$ zbieżność według rozkładu. Na koniec, dla dodatniej liczby rzeczywistej x, symbole $\ln x$ and $[x]$ oznaczają odpowiednio logarytm naturalny z x oraz największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x.

4.2 Liczba popsutych komponentów w binarnym, działającym systemie koherentnym

Wyniki tego podrozdziału odnoszą się do pracy [A5], w której analizowany jest przypadek binarny, czyli sytuacja, gdy zarówno system, jak i jego komponenty mogą znajdować się w jednym z dwóch możliwych stanów: pełnej sprawności lub całkowitej awarii. Określamy prawdopodobieństwo, że w binarnym systemie typu k-spośród-n znajduje się dokładnie w uszkodzonych komponentów, gdzie $w = 0, \ldots, n-k$, pod warunkiem, że system pozostaje sprawny w chwili t. Uzyskane wyniki zostały następnie uogólnione na dowolne binarne systemy koherentne. W zastosowaniach praktycznych znajomość takiego prawdopodobieństwa może mieć istotne znaczenie. System jako całość może bowiem nadal funkcjonować, nawet jeśli część jego komponentów uległa awarii. Co więcej, czasy uszkodzeń poszczególnych komponentów mogą pozostawać nieznane. Jednak w sytuacji, gdy liczba niesprawnych elementów przekroczy określony próg, system przestaje działać. Wiedza na temat tego prawdopodobieństwa dostarcza kluczowych informacji, które mogą wspomagać zapobieganie awariom systemu poprzez lepsze planowanie działań konserwacyjnych oraz bardziej efektywne zarządzanie zasobami. W ostatnich latach zmienna losowa opisująca liczbę uszkodzonych komponentów w danej chwili cieszyła się rosnącym zainteresowaniem w literaturze. Rozważano różne scenariusze oraz ograniczenia dotyczące rozkładu czasów życia komponentów, a także różne zależności pomiędzy komponentami. Rozkład liczby uszkodzonych komponentów w momencie awarii systemu składającego się z wymienialnych (ang. *exchangeable*) komponentów został zbadany w pracach [67] oraz [20]. Analogiczny problem rozważono dla systemu typu k-spośród-n o n uporządkowanych komponentach, który ulega awarii wtedy i tylko wtedy, gdy popsuje się co najmniej k kolejnych jego komponentów (ang. *consecutive k-out-of-n system*). Takie struktury mogą dobrze modelować systemy telekomunikacyjne oraz rurociągi naftowe, zob. [64]. W pracy [64] analizowano rozkład liczby uszkodzonych komponentów przy założeniu, że czasy życia komponentów są IID zmiennymi losowymi. Z kolei w [19] badano właściwości liczby sprawnych komponentów w takim systemie podczas jego działania.

Prawdopodobieństwo w formie zaproponowanej w pracy [A5] było wcześniej analizowane w [2] przy założeniu, że czasy życia komponentów są IID absolutnie ciągłymi zmiennymi losowymi. Naturalnie pojawia się pytanie, jak obliczyć prawdopodobieństwo liczby uszkodzonych komponentów w działającym systemie, jeśli osłabimy klasyczne założenie IID lub zrezygnujemy z założenia o ciągłości rozkładu. Warto podkreślić, że zarówno zależność między komponentami, jak i dyskretny charakter ich rozkładów są bardziej adekwatne w wielu praktycznych sytuacjach. Na przykład wystarczy rozważyć system monitorowany jedynie w określonych dyskretnych momentach lub system składający się z wymienialnych komponentów. W przypadku wymienialności komponenty mają identyczne rozkłady, ale oddziałują na siebie nawzajem w obrębie systemu. Dokładniej mówiąc, mówimy, że czasy życia komponentów $T_1, \ldots, T_n$ są wymienialne, jeśli dla dowolnego $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{P}^n$ wektor losowy $(T_{j_1}, \ldots, T_{j_n})$ ma ten sam rozkład co $(T_1, \ldots, T_n)$. Otwarty problem został rozwiązany dla binarnych systemów k-spośród-n, a następnie uogólniony na binarne systemy koherentne w pracy [A5]. W najbardziej ogólnym przypadku rozważano sytuację, w której czasy życia komponentów $T_1, \ldots, T_n$ mogą być zależne, o niekoniecznie identycznym rozkładzie (ang. *dependent not necessarily identically distributed*, DNID) oraz pochodzić z rozkładu dyskretnego.

Binarny system k-spośród-n

Chcąc zaprezentować wyniki pracy [A5], wprowadzimy pomocnicze oznaczenie: $N(t)$ to zmienna losowa reprezentująca liczbę uszkodzonych komponentów w systemie k-spośród-n w chwili czasu t. Dokładniej mówiąc, w kontekście binarnego systemu k-spośród-n określamy następujące prawdopodobieństwo warunkowe:

$$\mathrm{P}(N(t) = w|T > t), \quad w = 0, 1, \ldots, n-k, \tag{4.2.1}$$

gdzie zakres dla w wynika z faktu, że co najmniej k sprawnych komponentów gwarantuje działanie całego systemu, tzn. $T = T_{n-k+1:n}$. Ponadto $S(t) = n - N(t)$ opisuje liczbę sprawnych komponentów w działającym systemie w chwili czasu t. Dlatego badanie zmiennych losowych $N(t)$ i $S(t)$ jest równoważne.

Ponieważ zdarzenie $\{N(t) = w\}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ma miejsce zdarzenie $\{T_{w:n} \leqslant t < T_{w+1:n}\}$, to

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N(t) = w|T > t) &= \frac{\mathrm{P}(N(t) = w, T > t)}{\mathrm{P}(T > t)} = \frac{\mathrm{P}(T_{w:n} \leqslant t < T_{w+1:n}, T_{n-k+1:n} > t)}{\mathrm{P}(T_{n-k+1:n} > t)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(T_{w:n} \leqslant t < T_{w+1:n})}{\mathrm{P}(T_{n-k+1:n} > t)}, \quad w = 0, 1, \ldots, n-k.\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Korzystając z metod pracy ze statystykami porządkowymi, zaproponowanych w [12] i [8], które odnoszą się do DNID zmiennych losowych dyskretnych, prawdopodobieństwo (4.2.2) zostało obliczone w [A5]. Poniżej cytujemy Twierdzenie 1 z pracy [A5].

Twierdzenie 1 ([A5], Twierdzenie 1) *Rozważmy system k-spośród-n, składający się z n komponentów, których dyskretne czasy życia $T_1, \ldots, T_n$ są DNID zmiennymi losowymi. Wówczas dla dowolnego $w = 0, \ldots, n-k$ otrzymujemy*

$$\mathrm{P}(N(t) = w|T > t) = \frac{\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{P}_w^n} \mathrm{P}\left({}^{(j_1,\ldots,j_n)}H_w^t\right)}{\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{P}_s^n} \mathrm{P}\left({}^{(j_1,\ldots,j_n)}H_s^t\right)}, \tag{4.2.3}$$

gdzie

$${}^{(j_1,\ldots,j_n)}H_v^t = \left(\bigcap_{l=1}^{v}\{T_{j_l} \leqslant t\}\right) \cap \left(\bigcap_{l=v+1}^{n}\{T_{j_l} > t\}\right).$$

W szczególności mamy

$$\mathrm{P}(N(t) = w|T > t) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{w}\mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{l=1}^{w}\{T_l\leqslant t\}\right)\cap\left(\bigcap_{l=w+1}^{n}\{T_l>t\}\right)\right)}{\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n}{s}\mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{l=1}^{s}\{T_l\leqslant t\}\right)\cap\left(\bigcap_{l=s+1}^{n}\{T_l>t\}\right)\right)}, & \textit{jeśli } T_1,\ldots,T_n \textit{ są wymienialne}, \\[2ex] \dfrac{\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{P}_w^n}\left(\prod_{l=1}^{w}F_{j_l}(t)\right)\left(\prod_{l=w+1}^{n}\overline{F}_{j_l}(t)\right)}{\sum_{s=0}^{n-k}\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{P}_s^n}\left(\prod_{l=1}^{s}F_{j_l}(t)\right)\left(\prod_{l=s+1}^{n}\overline{F}_{j_l}(t)\right)}, & \textit{jeśli } T_1,\ldots,T_n \textit{ są niezależne}. \end{cases}$$

Warto odnotować, że wyrażenie (4.2.3) w przypadku IID jest takie samo, jak te uzyskane w [2], gdzie rozważano model IID zmiennych losowych o rozkładzie ciągłym. W związku z tym, własności zaproponowane w [2] są również prawdziwe w przypadku dyskretnym.

Wniosek 1 ([A5], Wniosek 1) *W przypadku, gdy dyskretne (lub ciągłe) czasy życia $T_1,\dots,T_n$ są IID zmiennymi losowymi o wspólnej dystrybuancie F, prawdopodobieństwo (4.2.3) można uprościć do*

$$\mathrm{P}(N(t)=w|T>t)=\frac{\binom{n}{w}F^w(t)\overline{F}^{n-w}(t)}{\sum\limits_{s=0}^{n-k}\binom{n}{s}F^s(t)\overline{F}^{n-s}(t)}=\frac{\binom{n}{w}\left(\phi(t)\right)^w}{\sum\limits_{s=0}^{n-k}\binom{n}{s}\left(\phi(t)\right)^s},\quad w=0,\dots,n-k,$$

gdzie $\phi(t)=\frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$.

Binarny system koherentny

W pracy [A5], w sposób naturalny rozszerzamy uzyskane wyniki na dowolny system koherentny. W konsekwencji wyznaczamy następujące prawdopodobieństwo warunkowe

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N(t)=w|T>t)&=\mathrm{P}(T_{w:n}\leqslant t<T_{w+1:n}|T>t)\\&=\frac{\mathrm{P}(T_{w:n}\leqslant t<T_{w+1:n},T>t)}{\mathrm{P}(T>t)},\quad w=0,\dots,n-1.\end{aligned}$$

Zauważmy, że przypadek $w=n$, czyli sytuacja, w której wszystkie elementy uległy awarii, prowadzi do uszkodzenia całego systemu. W celu określenia pożądanego prawdopodobieństwa stosujemy metodę inną niż ta zaproponowana w [2]. Wykorzystujemy następującą reprezentację czasu działania systemu T

$$T=\max_{1\leqslant j\leqslant s}\min_{p\in P_j}T_p, \tag{4.2.4}$$

zaproponowaną w [4], s. 13, gdzie $P_1,\dots,P_s$ są minimalnymi ścieżkami. Przypomnijmy, że zbiór $P\subset\{1,\dots,n\}$ jest ścieżką systemu koherentnego, jeśli system działa, gdy wszystkie komponenty o indeksach należących do P funkcjonują. Ścieżkę nazywamy minimalną, jeśli nie zawiera żadnego podzbioru, który również jest ścieżką. W przypadku systemu k-spośród-n istnieje $\binom{n}{k}$ minimalnych ścieżek, czyli wszystkich zbiorów składających się dokładnie z k komponentów. Ponadto reprezentacja (4.2.4) oznacza, że system działa, jeśli wszystkie komponenty przynajmniej jednej z jego ścieżek funkcjonują. Podejście z wykorzystaniem reprezentacji (4.2.4) zastosowano w sposób oryginalny do wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia $\{T_{w:n}\leqslant t<T_{w+1:n},T>t\}$. Następnie udowodniono poniższe Twierdzenie 2 z pracy [A5].

Twierdzenie 2 ([A5], Twierdzenie 2) *Rozważmy system koherentny składający się z n komponentów. Zakładamy, że dyskretne czasy życia komponentów $T_1,\dots,T_n$ są DNID zmiennymi* *losowymi. Wówczas dla dowolnego $w = 0, \dots, n-1$, otrzymujemy*

$$\mathrm{P}(N(t) = w | T > t) = \frac{\sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \mathrm{P}\left(T_{w:n} \leqslant t < T_{w+1:n}, \bigcap_{p \in P_{k_1} \cup \ldots \cup P_{k_j}} \{T_p > t\} \right)}{\sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \mathrm{P}\left(\bigcap_{p \in P_{k_1} \cup \ldots \cup P_{k_j}} \{T_p > t\} \right)}.$$

W szczególności mamy

$$\mathrm{P}(N(t) = w | T > t)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \sum_{m=1}^{n-w} \mathrm{I}\left(|\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}| = m \right) \binom{n-m}{w} P\left(\bigcap_{l=1}^{m} \{T_{p_l} > t\} \cap \bigcap_{l=1}^{w} \{T_{j_l} \leqslant t\} \cap \bigcap_{l=w+1}^{n-m} \{T_{j_l} > t\} \right)}{\sum_{m=1}^{n} P\left(\bigcap_{l=1}^{m} \{T_l > t\} \right) \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant j} \mathrm{I}\left(|\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}| = m \right)}, \\ \qquad \textit{jesli } T_1, \dots, T_n \textit{ są wymienialne}, \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \sum_{m=1}^{n-w} \mathrm{I}\left(|\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}| = m \right) \prod_{l=1}^{m} \overline{F}_{p_l}(t) \sum_{(j_1, \ldots, j_{n-m}) \in \mathcal{P}_w^{n-m}} \prod_{l=1}^{w} F_{j_l}(t) \prod_{l=w+1}^{n-m} \overline{F}_{j_l}(t)}{\sum_{m=1}^{n} \left(\prod_{l=1}^{m} \overline{F}_l(t) \right) \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant j} \mathrm{I}\left(|\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}| = m \right)}, \\ \qquad \textit{jesli } T_1, \dots, T_n \textit{ są niezależne}. \end{cases}$$

Przypomnijmy Twierdzenie 3 z pracy [A5], które dotyczy sposobu wyznaczania prawdopodobieństwa warunkowego w modelu IID zmiennych losowych. Należy zauważyć, że jest to uproszczona wersja wcześniejszego wyniku. Co więcej, twierdzenie to jest równoważne wynikowi uzyskanemu w [2], gdzie analizowano model IID zmiennych losowych o rozkładzie ciągłym.

Twierdzenie 3 ([A5], Twierdzenie 3) *Załóżmy, że dyskretne (lub ciągłe) czasy życia komponentów $T_1, \dots, T_n$ są IID zmiennymi losowymi o wspólnej dystrybuancie F. Wtedy dla dowolnego $w = 0, \dots, n-1$ mamy*

$$\mathrm{P}(N(t) = w | T > t) = \frac{F^w(t) \overline{F}^{n-w}(t) \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \sum_{m=1}^{n-w} \mathrm{I}\left(\left| \bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l} \right| = m \right) \binom{n-m}{w}}{\sum_{m=1}^{n} \overline{F}^m(t) \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant j} \mathrm{I}\left(|\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}| = m \right)},$$

lub równoważnie

$$\mathrm{P}(N(t) = w | T > t) = \frac{F^w(t) \overline{F}^{n-w}(t) \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} \sum_{m=1}^{n-w} \mathrm{I}\left(\left| \bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l} \right| = m \right) \binom{n-m}{w}}{\sum_{v=0}^{n-1} \left(\sum_{m=v+1}^{n} s_m \right) \binom{n}{v} F^v(t) \overline{F}^{n-v}(t)},$$

gdzie wektor $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ jest nazywany sygnaturą Samaniego i zależy jedynie od struktury systemu, a nie od rozkładu zmiennych $(T_1, \dots, T_n)$, zob. [69] po więcej szczegółów.

Warto zaznaczyć, że Twierdzenia 1, 2 oraz ich uproszczone wersje zostały zastosowane do opracowania optymalnej strategii wymiany urządzeń na podstawie ich wieku w systemach równoległych w przypadku dyskretnym, omówionej w pracy [33].

Dodatkowo, w pracy [A5] uzyskujemy następującą, wcześniej nieznaną, formułę na sygnaturę Samaniego systemu wyrażoną w terminach jego minimalnych ścieżek. Dla $1 \leqslant i \leqslant n$ otrzymujemy

$$s_i = \sum_{m=1}^{n-i+1} \frac{\binom{n-i}{m-1}}{\binom{n}{m}} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant s} I\left(|\bigcup_{w=1}^{j} P_{k_w}| = m \right).$$

Rola sygnatur w teorii niezawodności została szczegółowo omówiona w pracy [70].

4.3 Liczba uszkodzonych komponentów w binarnym systemie koherentnym z różnymi typami komponentów

Wyniki tego podrozdziału odnoszą się do prac [A4] i [A2] oraz stanowią kontynuację rezultatów przedstawionych w poprzedniej części autoreferatu. Najpierw rozważymy przypadek, w którym system działa w chwili t, a następnie sytuację, w której jest niesprawny. Tym razem jednak analizujemy bardziej realistyczny scenariusz, w którym komponenty systemu są $K \geqslant 2$ różnych typów. Mówimy, że komponent jest typu i, jeśli jego czas życia jest zmienną losową typu i. Dokładniej, niech n_i oznacza liczbę zmiennych losowych $T_1^{(i)}, \ldots, T_{n_i}^{(i)}$, reprezentujących czasy życia komponentów typu i o dystrybuancie F_i, $i = 1, \ldots, K$, gdzie $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$. Zakładamy, że wszystkie komponenty tego samego typu mają identyczny rozkład czasu do awarii, natomiast dystrybuanty zmiennych losowych różnych typów są parami różne. W szczególności czasy życia komponentów mogą mieć rozkład dyskretny.

Model systemu k-spośród-n, składający się z różnych typów komponentów, których czasy życia są niezależnymi zmiennymi losowymi, został przeanalizowany w pracy [23]. Autor zaproponował metodę określania optymalnego momentu wymiany systemu, wykorzystując informacje o liczbie uszkodzonych komponentów każdego typu w chwili t, gdy system nadal funkcjonuje, lub w momencie jego awarii – zależnie od tego, co nastąpi pierwsze. Podkreślił również, że uogólnienie tych wyników na dowolny system koherentny ma istotne znaczenie praktyczne. Udało się to skutecznie zrobić w pracach [A4] i [A2]. Warto zaznaczyć, że artykuł [A2] został wyróżniony zaproszeniem do publikacji w specjalnym wydaniu "Computational Methods in System Reliability" (SI-CMSR) prestiżowego czasopisma Journal of Computational and Applied Mathematics (Elsevier), obok ośmiu innych wybranych prac.

Liczba uszkodzonych komponentów w działającym lub niesprawnym binarnym systemie koherentnym nie należy do klasycznych charakterystyk rozważanych w teorii niezawodności. Dostarcza jednak cennych informacji na temat liczby części zamiennych potrzebnych do wymiany wszystkich uszkodzonych elementów. Ponadto pozwala częściowo oszacować czas życia systemu, co umożliwia operatorom redukcję kosztów i zwiększenie rentowności poprzez bardziej efektywne zarządzanie zasobami. Aby uniknąć zbędnych kosztów związanych z wymianą komponentów, operatorzy mogą stosować strategie konserwacji korygującej (naprawczej) lub zapobiegawczej. Takie działania pozwalają na planowanie okresowych przeglądów, podczas których wszystkie uszkodzone komponenty są zastępowane nowymi, a sprawne poddawane procesowi regeneracji. Wymiana korygująca jest przeprowadzana po awarii systemu, natomiast wymiana zapobiegawcza ma miejsce przed jej wystąpieniem, co pomaga zapobiegać nieoczekiwanym przestojom. W pracy [A2] analizowana jest klasyczna strategia wymiany oparta na wieku systemu. Szczegółowe omówienie tego podejścia zostanie przedstawione w jednym z kolejnych paragrafów.

Działający binarny system koherentny

Rezultaty z tego paragrafu odnoszą się do pracy [A4]. Rozpoczynamy od oznaczenia

$$N_t^{(i)} \text{ dla liczby popsutych komponentów typu } i,\ i = 1, \ldots, K, \text{ w chwili } t. \tag{4.3.1}$$

Ponadto T nadal oznacza czas życia systemu. Przyjmujemy założenie, że w chwili t system koherentny nadal funkcjonuje, czyli $T > t$. Problem analizowany w [A4] polega na wyznaczeniu poniższego prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P\left(N_t^{(i)} = w_i | T > t\right) = \frac{P(N_t^{(i)} = w_i, T > t)}{P(T > t)}, \quad w_i = 0, 1, \ldots, n_i.$$

Należy zauważyć, że jest to inaczej postawiony problem niż w poprzednim podrozdziale (por. ze wzorem (4.2.1)), ponieważ tym razem interesuje nas liczba uszkodzonych komponentów konkretnego typu, a nie łączna liczba komponentów, które uległy awarii.

Reprezentacja (4.2.4) czasu życia systemu koherentnego za pomocą minimalnych ścieżek $P_1, \ldots, P_s$ umożliwia nam uzyskanie analitycznych wzorów na funkcję przeżycia systemu oraz na prawdopodobieństwo zdarzenia $\{N_t^{(i)} = w_i, T > t\}$. Warto dodać, że w [A4] odpowiednie wyrażenia zostały otrzymane w szerszym kontekście niż tylko dla przypadku niezależnych czasów życia komponentów. Efektem było udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([A4], Twierdzenie 1) *Rozważmy system koherentny składający się z n komponentów, których czasy życia $T_1, \ldots, T_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $K \geqslant 2$ różnych typów. Wtedy dla $w_i = 0, \ldots, n_i$, oraz dowolnego $i = 1, \ldots, K$, otrzymujemy*

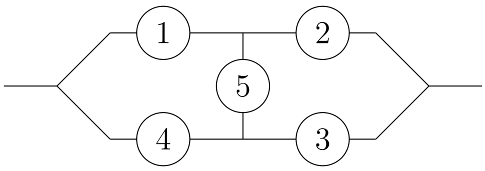
$$P\left(N_t^{(i)} = w_i | T > t\right)$$
$$= F_i^{w_i}(t)\overline{F}_i^{n_i - w_i}(t) \cdot \frac{\sum\limits_{m=1}^{n-w_i} \sum\limits_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\ldots+m_i+\ldots+m_K=m}}^{n_1} \cdots \sum\limits_{m_i=0}^{n_i-w_i} \cdots \sum\limits_{m_K=0}^{n_K} \alpha_{(m_1,\ldots,m_K)} \binom{n_i - m_i}{w_i} \overline{F}_1^{m_1}(t) \ldots \overline{F}_{i-1}^{m_{i-1}}(t) \overline{F}_{i+1}^{m_{i+1}}(t) \ldots \overline{F}_K^{m_K}(t)}{\sum\limits_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\ldots+m_K \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum\limits_{m_K=0}^{n_K} \alpha_{(m_1,\ldots,m_K)} \overline{F}_1^{m_1}(t) \ldots \overline{F}_K^{m_K}(t)},$$

gdzie

$$\alpha_{(m_1,\ldots,m_K)} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\}\subset\{1,\ldots,s\}} \mathrm{I}\Bigg(\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l} \textit{ zawiera dokładnie } m_1 \textit{ indeksów czasów życia komponentów typu } 1, \ \vdots \ \textit{dokładnie } m_K \textit{ indeksów czasów życia komponentów typu } K\Bigg). \qquad (4.3.2)$$

W pracy [A4] szczegółowo wyjaśniamy, jak w praktyce wyznaczyć współczynniki $\alpha_{(m_1,\ldots,m_K)}$. W tym miejscu przypominamy tę procedurę. Zauważmy, że współczynnik $\alpha_{(m_1,\ldots,m_K)}$ obliczany jest jako suma ściśle określonych składników, które zależą od struktury systemu za pomocą minimalnych ścieżek. Na początku rozważamy wszystkie możliwe sumy minimalnych ścieżek, tj. $\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l}$, $j = 1,\ldots,s$. Pierwszy składnik z dodatnim znakiem reprezentuje liczbę pojedynczych ścieżek, które składają się dokładnie z m_1 komponentów typu 1, …, oraz m_K typu K. Drugi składnik wskazuje, ile sum dwóch minimalnych ścieżek ma pożądaną strukturę, a jest dodawany z ujemnym znakiem. Kontynuujemy te sumowanie, aż rozważymy sumę s minimalnych ścieżek. Jeśli spełnia ona nasz warunek, ostatni składnik jest równy $(-1)^{s+1}$. Procedura ta jest zastosowana w praktyce dla systemu mostkowego w poniższym przykładzie.

Przykład 1 *Rozważmy system mostkowy przedstawiony na Rysunku* 1*. Przypuśćmy, że czasy życia komponentów* $T_1,\ldots,T_5$ *są niezależne* $K = 2$ *różnych typów:* $T_1, T_3, T_5 \sim F_1$*, oraz* $T_2, T_4 \sim F_2$*.*



Rysunek 1: System mostkowy.

Łatwo zauważyć, że system mostkowy ma 4 *minimalne ścieżki:*

$$P_1 = \{1,2\},\ P_2 = \{3,4\},\ P_3 = \{1,3,5\},\ P_4 = \{2,4,5\}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} P_1 \cup P_2 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{5\},\\ P_1 \cup P_3 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{4\},\\ P_1 \cup P_4 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{3\},\\ P_2 \cup P_3 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{2\},\\ P_2 \cup P_4 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1\},\\ P_3 \cup P_4 &= \{1,2,3,4,5\} \end{aligned}$$

i

$$\bigcup_{l=1}^{j} P_{k_l} = \{1,2,3,4,5\}, \text{ gdy } 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant 5 \text{ oraz } j \geqslant 3.$$

Zauważmy, że minimalne ścieżki P_1, P_2 składają się z jednego komponentu każdego typu. Minimalna ścieżka P_3 składa się wyłącznie z elementów typu 1, podczas gdy P_4 zawiera jeden element typu 1 i dwa elementy typu 2. Dodatkowo zauważmy, że sumy $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cup P_4$ oraz $P_2 \cup P_4$ zawierają po dwa elementy każdego typu, podczas gdy $P_1 \cup P_3$ oraz $P_2 \cup P_3$ składają się z trzech komponentów typu 1 i jednego komponentu typu 2. Na koniec, $P_3 \cup P_4$, wszystkie sumy trzech minimalnych ścieżek oraz $\bigcup_{i=1}^4 P_i$ zawierają trzy elementy typu 1 i dwa elementy typu 2. W związku z tym

$$\alpha_{(m_1,m_2)} = \begin{cases} 2, & \textit{jeśli } (m_1,m_2) = (1,1),\ (m_1,m_2) = (3,2), \\ 1, & \textit{jesli } (m_1,m_2) = (3,0),\ (m_1,m_2) = (1,2), \\ -2, & \textit{jeśli } (m_1,m_2) = (3,1), \\ -3, & \textit{jeśli } (m_1,m_2) = (2,2), \\ 0, & \textit{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

stosując (4.3.2).

W pracy [A4] przedstawiamy również jak stosować Twierdzenie 4 w przypadku rozważanego systemu mostkowego.

Niesprawny binarny system koherentny

Ten paragraf odnosi się do pracy [A2]. Problem rozwiązany w [A2] polega na wyznaczeniu prawdopodobieństwa warunkowego związanego ze zdarzeniem, w którym dokładnie $w_i = 0, \ldots, n_i$ komponentów typu i uległo awarii, pod warunkiem, że system nie działa. Innymi słowy, podamy wzór jak liczyć

$$P\left(N_t^{(i)} = w_i | T \leqslant t\right) = \frac{P\left(N_t^{(i)} = w_i, T \leqslant t\right)}{P(T \leqslant t)}, \quad w_i = 0, \ldots, n_i,$$

Aby osiągnąć cel, posługujemy się pojęciem minimalnych cięć. Przypominamy, że $C \subset \{1, \ldots, n\}$ jest cięciem, jeśli system się psuje, gdy wszystkie elementy o indeksach należących do C ulegają awarii. Cięcie nazywamy minimalnym, jeśli nie zawiera żadnego podzbioru, który również jest cięciem. Powszechnie wiadomo, że jeśli system koherentny ma s minimalnych cięć $C_1, \ldots, C_s$, to jego czas życia T można przedstawić jako

$$T = \min_{1 \leqslant j \leqslant s} \max_{i \in C_j} T_i, \tag{4.3.3}$$

(zob. [4], s. 13). Wzór (4.3.3) mówi o tym, że system się psuje, jeśli wszystkie komponenty w co najmniej jednym minimalnym cięciu ulegną awarii. Dzięki tej reprezentacji otrzymujemy metodę jak obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń $\{T \leqslant t\}$ oraz $\{N_t^{(i)} = w_i, T \leqslant t\}$. Odpowiednie wzory zostały uzyskane w [A2], i to w bardziej ogólnej sytuacji niż tylko w przypadku niezależnych czasów życia komponentów. Poniżej przedstawiamy główne twierdzenie z pracy [A2].

Twierdzenie 5 ([A2], Twierdzenie 1) *Rozważmy system koherentny składający się z n elementów, których czasy życia $T_1, \ldots, T_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $K \geqslant 2$ różnych typów. Wtedy dla $w_i = 0, \ldots, n_i$, oraz dowolnego $i = 1, \ldots, K$, otrzymujemy*

$$P\left(N_t^{(i)} = w_i | T \leqslant t\right) = F_i^{w_i}(t)\overline{F}_i^{n_i - w_i}(t) \cdot \frac{\sum\limits_{v=1}^{n} \sum\limits_{\substack{v_1=0 \\ v_1+\ldots+v_i+\ldots+v_K=v}}^{n_1} \cdots \sum\limits_{v_i=0}^{w_i} \cdots \sum\limits_{v_K=0}^{n_K} \beta_{(v_1,\ldots,v_K)} \binom{n_i - v_i}{w_i - v_i} F_1^{v_1}(t) \cdots F_{i-1}^{v_{i-1}}(t) F_{i+1}^{v_{i+1}}(t) \cdots F_K^{v_K}(t)}{\sum\limits_{\substack{v_1=0 \\ v_1+\ldots+v_K \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum\limits_{v_K=0}^{n_K} \beta_{(v_1,\ldots,v_K)} F_1^{v_1}(t) \cdots F_K^{v_K}(t)},$$

gdzie

$$\begin{aligned}\beta_{(v_1,\ldots,v_K)} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_j\} \subset \{1,\ldots,s\}} \mathrm{I}\Bigg(& \textit{dokładnie } v_1 \textit{ indeksów} \\ & \textit{czasów życia komponentów typu } 1 \textit{ należy do } \bigcup_{l=1}^{j} C_{k_l}, \\ & \vdots \\ & \textit{dokładnie } v_K \textit{ indeksów czasów życia} \\ & \textit{komponentów typu } K \textit{ należy do } \bigcup_{l=1}^{j} C_{k_l}\Bigg). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Procedura wyznaczania współczynników $\beta_{(v_1,\ldots,v_K)}$ została szczegółowo opisana w pracy [A2]. W dalszej części tekstu omówimy ją ponownie. Zauważmy, że współczynniki $\beta_{(v_1,\ldots,v_K)}$ zależą od struktury systemu przez minimalne cięcia i są niezależne od rozkładów czasów życia komponentów. Dla danych minimalnych cięć $C_1, \ldots, C_s$, możemy określić wszystkie możliwe ich sumy, tj. $\bigcup_{l=1}^{j} C_{k_l}$, $j = 1, \ldots, s$. Dla ustalonych $v_1, \ldots, v_K$, $v_i = 0, \ldots, n_i$, $v_1 + \ldots + v_K \geqslant 1$, od razu widzimy liczbę sum, które dają pożądany skład typów komponentów. Te wielkości pozwalają nam wyznaczyć poszukiwane współczynniki $\beta_{(v_1,\ldots,v_K)}$. Aby zaprezentować metodę ich obliczania, stosujemy ją dla systemu mostkowego wcześniej rozważanego w Przykładzie 1.

Przykład 2 *Rozważmy ten sam system, co w Przykładzie 1, przedstawiony na Rysunku 1. Zauważmy, że istnieją cztery minimalne cięcia dla tego systemu mostkowego:*

$$C_1 = \{1, 4\},\ C_2 = \{2, 3\},\ C_3 = \{1, 3, 5\},\ C_4 = \{2, 4, 5\}.$$

Widzimy, że

$$
\begin{aligned}
C_1 \cup C_2 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{5\},\\
C_1 \cup C_3 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{2\},\\
C_1 \cup C_4 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{3\},\\
C_2 \cup C_3 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{4\},\\
C_2 \cup C_4 &= \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1\},\\
C_3 \cup C_4 &= \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

i

$$\bigcup_{l=1}^{j} C_{k_l} = \{1,2,3,4,5\}, \text{ gdy } 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant 5 \text{ oraz } j \geqslant 3.$$

Oczywiście, minimalne cięcia C_1, C_2 składają się z jednego komponentu każdego typu, podczas gdy C_3, C_4 składają się z dwóch elementów typu 1 i jednego elementu typu 2. Teraz spójrzmy na sumy dwóch minimalnych cięć. $C_1 \cup C_2$, $C_1 \cup C_4$ oraz $C_2 \cup C_3$ zawierają po dwa elementy każdego typu, a $C_1 \cup C_3$, $C_2 \cup C_4$ mają trzy komponenty typu 1 i jeden komponent typu 2. Rozważając $C_3 \cup C_4$, wszystkie sumy składające się z trzech minimalnych cięć oraz sumę wszystkich minimalnych cięć, widać, że składają się one z trzech elementów typu 1 i dwóch elementów typu 2. Te obserwacje pozwalają nam wyznaczyć następujące współczynniki $\beta_{(v_1,v_2)}$ zdefiniowane w (4.3.4).

$$
\beta_{(v_1,v_2)} = \begin{cases}
2, & \textit{jeśli } (v_1,v_2) = (1,1),\ (v_1,v_2) = (2,1),\ (v_1,v_2) = (3,2),\\
-2, & \textit{jeśli } (v_1,v_2) = (3,1),\\
-3, & \textit{jeśli } (v_1,v_2) = (2,2),\\
0, & \textit{w przeciwnym przypadku.}
\end{cases}
$$

W pracy [A2] pokazujemy również jak stosować Twierdzenie 5 na przykładzie rozważanego systemu mostkowego.

Zastosowanie

Niniejszy paragraf odnosi się do zastosowania wyników uzyskanych w pracach [A4] i [A2], a dotyczy problemu określenia optymalnej liczby części zamiennych, które powinny być dostępne w magazynie, aby zapewnić utrzymanie systemu w optymalnym stanie działania. Problem ten jest istotny, ponieważ awarie oraz niedostępność systemu mogą generować wysokie, nieoczekiwane koszty dla jego użytkowników. Z tego względu szczególne znaczenie ma opracowanie metod umożliwiających obliczanie charakterystyk ważnych z punktu widzenia niezawodności systemu, które są przydatne w procesie jego optymalnego projektowania. Kierunek tych badań obejmuje analizę liczby uszkodzonych komponentów zarówno w działającym, jak i niesprawnym dowolnym systemie koherentnym, składającym się z różnych typów komponentów. W przypadku klasycznej strategii wymiany, charakterystyka ta może zostać wykorzystana do określenia optymalnego momentu wymiany zapewniającego minimalizację średniego kosztu eksploatacji systemu.

W pracy [A2], przy założeniu, że system rozpoczyna działanie w chwili $t = 0$, rozważamy klasyczną strategię wymiany opartą na wieku. Oznacza to, że w fazie eksploatacji system jest wymieniany prewencyjnie w ustalonym momencie $t > 0$ lub naprawczo w przypadku jego awarii – w zależności od tego, które zdarzenie nastąpi wcześniej. Strategia ta ma na celu minimalizację nieoczekiwanych kosztów związanych z wymianą. Modele wymiany oparte na wieku były szeroko analizowane w literaturze w różnych ujęciach, zob. na przykład [6], [24], [31], [36], [59], [60], oraz [77].

Przypomnijmy szczegóły rozważanej sytuacji. Operatorzy systemów przeprowadzają okresowe przeglądy, dążąc do utrzymania systemów w optymalnym stanie pracy oraz do jak najbardziej efektywnego wykorzystania dostępnych zasobów. Gdy system jest sprawny w chwili $t > 0$, operatorzy wymieniają jeden popsuty komponent typu i ponosząc koszt c_i oraz odnawiają niepopsuty komponent za kwotę c_i^*, przy czym obowiązuje zależność $c_i > c_i^*$, dla $i = 1, \dots, K$. W przypadku awarii systemu dodatkowo ponoszą koszt c^{**} związany z jego uszkodzeniem. Zarówno po odnowieniu, jak i po wymianie komponenty odzyskują pełną sprawność, stając się tak dobre jak nowe. Całkowity koszt konserwacji korygującej (naprawczej) po awarii systemu można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}\alpha_c(t) &= \sum_{i=1}^{K} c_i E\left(N^{(i)}(T)|T \leqslant t\right) + \sum_{i=1}^{K} c_i^* E\left(n_i - N^{(i)}(T)|T \leqslant t\right) + c^{**} \\ &= \sum_{i=1}^{K} (c_i - c_i^*) E\left(N^{(i)}(T)|T \leqslant t\right) + \sum_{i=1}^{K} c_i^* n_i + c^{**}, \qquad (4.3.5)\end{aligned}$$

gdzie zmienne losowe $N^{(i)}(T)$, $i = 1, \dots, K$, są zdefiniowane w (4.3.1). Całkowity koszt konserwacji zapobiegawczej przed awarią, tj. gdy $T > t$, jest określony wzorem:

$$\begin{aligned}\alpha_p(t) &= \sum_{i=1}^{K} c_i E\left(N_t^{(i)}|T > t\right) + \sum_{i=1}^{K} c_i^* E\left(n_i - N_t^{(i)}|T > t\right) \\ &= \sum_{i=1}^{K} (c_i - c_i^*) E\left(N_t^{(i)}|T > t\right) + \sum_{i=1}^{K} c_i^* n_i. \qquad (4.3.6)\end{aligned}$$

Łącząc teraz wyrażenia (4.3.5) oraz (4.3.6), w pracy [A2] wyznaczamy następujący średni koszt utrzymania systemu koherentnego na jednostkę czasu:

$$\eta(t) = \frac{\alpha_c(t) P(T \leqslant t) + \alpha_p(t) P(T > t)}{E(\min(t, T))} \qquad (4.3.7)$$

(cf. [23], s. 248), gdzie $E(\min(t, T)) = \int_0^t P(T > x)\, dx$. Z praktycznego punktu widzenia, istotne jest wyznaczenie optymalnego czasu wymiany t_0, który minimalizuje funkcję określoną w (4.3.7).

Sformułowany problem optymalizacyjny jest stosowany w [A2] do systemu mostkowego przedstawionego na Rysunku 1. Projektantom systemu daje się możliwość wyboru, które komponenty systemu mostkowego będą typu 1, a które typu 2. Wszystkie możliwe konfiguracje zostały przedstawione w Tabeli 1 w [A2]. Rozważamy przypadki, w których czasy życia komponentów są z rozkładu geometrycznego, gdzie

$$F_i(t) = 1 - (1 - p_i)^t, \quad p_i \in (0, 1), \;\; i = 1, 2, \;\; p_1 \neq p_2, \;\; t = 0, 1, \ldots,$$

lub z rozkładu Weibulla, gdzie

$$F_i(t) = 1 - e^{-(\beta_i t)^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i, \;\; \beta_i > 0, \;\; i = 1, 2, \;\; t > 0.$$

W Tabeli 1 w [A2] przedstawiamy optymalny czas wymiany t_0, który minimalizuje $\eta(t)$ zdefiniowaną w (4.3.7) oraz minimalną wartość $\eta(t_0)$ dla wybranych p_i, α_i, β_i oraz kosztów c_i, c_i^*, $i = 1, 2$ i c^{**}.

4.4 Rozkład liczby komponentów w poszczególnych stanach podczas awarii trójstanowego systemu k-spośród-n

Następny podrozdział, odnoszący się do pracy [A1], jest ściśle związany z wynikami dotyczącymi systemów trójstanowych **k**-spośród-n, gdzie $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ (zob. Definicja 1). Niemniej jednak przypadek systemu (II) (zob. Wstęp oraz [73]) nie będzie tutaj analizowany, a zatem nie ma potrzeby by symbol (I) był dalej używany w odniesieniu do systemu. Zaletą modelowania z pomocą systemu trójstanowego jest to, że jest ono bardziej efektywne i elastyczne niż podejście binarne. W rzeczywistych sytuacjach system może nie ulec całkowitej awarii, ale jego zdolność do działania może zostać ograniczona. Dodanie stanu "częściowego działania" pozwala na bardziej realistyczne odwzorowanie wydajności urządzenia, co ostatecznie prowadzi do lepszej optymalizacji i efektywności systemu. Aby lepiej zobrazować praktyczne zastosowanie podejścia trójstanowego, w pracy [A1] przedstawiamy następujący przykład. Rozważmy system zasilania energią składający się z jednostek ją generujących. Dokładniej, załóżmy, że obserwujemy farmę wiatrową, składającą się z turbin wiatrowych zlokalizowanych w tym samym regionie. Oczywiście, zadaniem pojedynczej turbiny jest produkcja energii elektrycznej poprzez przekształcanie energii kinetycznej wiatru w energię elektryczną. Zdolność produkcji energii przez turbinę wiatrową zależy od prędkości wiatru. Mówimy, że turbina działa perfekcyjnie, gdy generuje pełną moc. Jeśli moc zaczyna spadać, mówimy, że turbina znajduje się w stanie częściowego działania. Oczywiście, gdy prędkość wiatru jest poniżej prędkości wejścia, turbina nie produkuje energii. Prędkość wejścia określa moment, w którym łopaty turbiny zaczynają się obracać, generując moc. Gdy prędkość wiatru osiągnie prędkość znamionową, moc generowana przez turbinę pozostaje stała, nawet jeśli wiatr nadal przyspiesza. Gdy natomiast osiągnie prędkość wyłączenia, turbina zostaje automatycznie zatrzymana. Takie działanie chroni turbinę przed potencjalnymi uszkodzeniami mechanicznymi. Po więcej informacji odsyłamy do [23].

Zakładamy dalej, że $k_1 \geqslant k_2$, ponieważ odwrotna sytuacja prowadzi do systemów binarnych (zob. [22]). Aby przedstawić wyniki pracy [A1], wprowadzamy następujące oznaczenia. Przez $T_{1\,i}$ oraz $T_{2\,i}$, $i = 1, \ldots, n$, oznaczamy czasy, w których i-ty komponent przechodzi odpowiednio do stanu $'0'$ i stanu $'1'$. Oczywiście, $T_{1\,i}$ oraz $T_{2\,i}$ można traktować odpowiednio jako czas życia i-tego komponentu oraz jego czas życia w stanie $'2'$, który odpowiada perfekcyjnemu działaniu. Zmiennie losowe $T_{1\,i}$ oraz $T_{2\,i}$ są zależne, a wiadomo również, że $T_{1\,i}$ jest większe w zwykłym porządku stochastycznym niż $T_{2\,i}$, tzn. $T_{1i} \geqslant_{st} T_{2i}$, $i = 1, \ldots, n$. Następnie, niech $T_{1,1:n}, T_{1,2:n}, \ldots, T_{1,n:n}$ oraz $T_{2,1:n}, T_{2,2:n}, \ldots, T_{2,n:n}$ będą statystykami porządkowymi odpowiadającymi zmiennym losowym odpowiednio $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1n}$ oraz $T_{21}, T_{22}, \ldots, T_{2n}$. Zgodnie z Definicją 1, czas życia systemu trójstanowego $\mathbf{k}$-spośród-n jest określony jako

$$T = \max\{T_{1,n-k_1+1:n}, T_{2,n-k_2+1:n}\}. \tag{4.4.1}$$

Zauważmy z kolei, że czas życia trójstanowego systemu $\mathbf{k}$-spośród-n w stanie $'2'$ można opisać jako $T_{2,n-k_2+1:n}$. Przy założeniu, że wektor $(T_{1\,i}, T_{2\,i})$, $i = 1, \ldots, n$, składa się z niezależnych zmiennych losowych odpowiednio $T_{1\,1}, \ldots, T_{1\,n}$ oraz $T_{2\,1}, \ldots, T_{2\,n}$, o niejednakowym, ciągłym rozkładzie, autorzy pracy [34] badali wspólną funkcją przeżycia jak i odpowiednie funkcje brzegowe dla wektora $(T, T_{2,n-k_2+1:n})$. W przypadku IID w pracy [22] analizowano średnią liczbę komponentów znajdujących się w stanie pełnej sprawności lub częściowej funkcjonalności zarówno w momencie awarii trójstanowego systemu $\mathbf{k}$-spośród-n, jak i w czasie jego działania. Natomiast w pracy [28] przeprowadzono analizę niezawodności systemów ważonych $\mathbf{k}$-spośród-n zbudowanych z trójstanowych komponentów.

Analizując przypadek binarny wspomnieliśmy, że w analizie niezawodności coraz większą uwagę poświęca się liczbie uszkodzonych komponentów zarówno w systemie niesprawnym, jak i wciąż działającym. W Podrozdziałach 4.2 i 4.3 przypomnieliśmy niektóre dotychczasowe badania. W pracy [A1] kontynuujemy te analizy. Dokładniej, wyznaczamy łączny rozkład wektora $\{X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j\}$, gdzie zmienna losowa $X^{(r)}_{\mathbf{k},n}$ oznacza liczbę komponentów znajdujących się w stanie $'r'$, $r = 0, 1$, w momencie awarii trójstanowego systemu $\mathbf{k}$-spośród-n. Oczywiście liczba komponentów w stanie $'2'$ jest równa $n - X^{(0)}_{\mathbf{k},n} - X^{(1)}_{\mathbf{k},n}$. Zakładamy, że $(T_{1,i}, T_{2,i})$ to wektory losowe złożone z IID dyskretnych zmiennych losowych odpowiednio $T_{1\,1}, \ldots, T_{1\,n}$ oraz $T_{2\,1}, \ldots, T_{2\,n}$, gdzie

$$\begin{aligned}
F(t;1) &= P(T_{1i} \leqslant t), & F(t;2) &= P(T_{2i} \leqslant t),\\
\bar{F}(t;1) &= 1 - F(t;1) = P(T_{1i} > t), & \bar{F}(t;2) &= 1 - F(t;2) = P(T_{2i} > t),\\
p(t;1) &= P(T_{1i} = t), & p(t;2) &= P(T_{2i} = t),
\end{aligned}$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Dodatkowo zakładamy, że w dowolnej ustalonej chwili t komponenty systemu mogą zmieniać stan jedynie z $'2'$ na $'1'$ lub z $'1'$ na $'0'$, tj. nie jest możliwe, aby komponent uległ awarii bezpośrednio ze stanu pełnej sprawności. Założenie to nie odnosi się jednak do całego systemu, który w danym momencie może zmieniać swój stan o więcej niż jeden poziom.

Twierdzenie 6 ([A1], Twierdzenie 2.1) *Rozważmy trójstanowy system* $\mathbf{k}$*-spośród-*n*, gdzie* $\mathbf{k}=(k_1,k_2)$*, składający się z komponentów o IID dyskretnych czasach życia. Wówczas łączny rozkład liczby komponentów znajdujących się w momencie awarii całego systemu w stanach* $'0'$ *i* $'1'$*, opisany odpowiednio przez zmienne losowe* $X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n}$ *i* $X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n}$*, wyraża się wzorem*

$$P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n}=i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n}=j\right)=\sum_{t=2}^{\infty} P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n}=i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n}=j, T=t\right), \tag{4.4.2}$$

dla $i=n-k_1+1,\dots,n$*, oraz* $j=0,\dots,n-i$*.*

Podobne wyniki, ale dotyczące podejścia binarnego, zostały przedstawione w pracy [8]. Autorzy skoncentrowali się na wyprowadzeniu dokładnego rozkładu zmiennej losowej $X_{k,n}$, która reprezentuje liczbę uszkodzonych komponentów w momencie awarii systemu. Nowość Twierdzenia 6 polega na rozszerzeniu tej analizy na trójstanowy system w przypadku dyskretnych czasów życia. Tak postawione zagadnienie nie było poruszano wcześniej w literaturze. Praca [A1] wypełnia tę lukę. Warto podkreślić, że wprowadzenie dodatkowego stanu z jednej strony lepiej odzwierciedla rzeczywiste działanie urządzeń, ale z drugiej strony znacząco komplikuje analizę niezawodności systemu. Efektywną metodą umożliwiającą analizę jeszcze bardziej złożonych struktur wydaje się podejście oparte na zanurzeniu w skończonym łańcuchu Markowa (ang. *finite Markov chain imbedding approach*, FMCIA), zaproponowane w [37], natomiast sama nazwa metody została wprowadzona w [54].

Zauważmy ponadto, że suma w (4.4.2) zaczyna się od $t=2$, ponieważ w przypadku dyskretnym zakładamy, że częściowa i całkowita degradacja każdego komponentu nie mogą wystąpić jednocześnie, tzn. stan komponentu musi najpierw zmienić się z $'2'$ na $'1'$, a dopiero później, w następnym kroku, z $'1$ na $'0'$. Ponadto, aby praktycznie stosować Twierdzenie 6, musimy znaleźć analityczne wzory, które umożliwią wyznaczenie składników sumy w (4.4.2). W pracy [A1], w dowodzie Twierdzenia 6, pokazujemy, jak to zrobić, w zależności od tego, jakie warunki decydują o awarii systemu. Z (4.4.1) wynika, że

$$\begin{aligned}\{T=t\}=&\Big\{\max\{T_{1,n-k_1+1:n}, T_{2,n-k_2+1:n}\}=t\Big\}\\ =&\{T_{1,n-k_1+1:n}< T_{2,n-k_2+1:n}=t\}\cup\{T_{2,n-k_2+1:n}< T_{1,n-k_1+1:n}=t\}\\ &\cup\{T_{1,n-k_1+1:n}=T_{2,n-k_2+1:n}=t\},\end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned}&P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n}=i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n}=j, T=t)\\ =&P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n}=i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n}=j, T_{1,n-k_1+1:n}<T_{2,n-k_2+1:n}=t) \quad (4.4.3)\\ &+P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n}=i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n}=j, T_{2,n-k_2+1:n}<T_{1,n-k_1+1:n}=t) \quad (4.4.4)\\ &+P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n}=i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n}=j, T_{1,n-k_1+1:n}=T_{2,n-k_2+1:n}=t). \quad (4.4.5)\end{aligned}$$

Następnie prawdopodobieństwa (4.4.3)-(4.4.5) rozważane są w oddzielnych przypadkach. Odpowiednie wzory zostały podane w Propozycjach 4.1, 4.2 oraz 4.3 i zostały przytoczone poniżej.

Dowody wymagają umiejętności pracy ze statystykami porządkowymi w przypadku dyskretnym, przy jednoczesnym uwzględnieniu, że zmienne losowe $T_{1\,i}$ oraz $T_{2\,i}$, $i = 1, \ldots, n$ są zależne, co nie jest łatwym zadaniem.

Przypadek I

Po pierwsze, liczone jest prawdopodobieństwo podane w (4.4.3) dla $i = n-k_1+1, \ldots, n-k_2$ oraz $j = n-k_2+1-i, \ldots, n-i$. Zauważmy, że ten przypadek jest równoważny sytuacji, w której awaria systemu jest spowodowana brakiem odpowiedniej liczby k_2 w pełni sprawnych komponentów (w stanie $'2'$) w systemie, ponieważ wymagane k_1 komponentów częściowo sprawnych (w stanie $'1'$) już wcześniej uległo uszkodzeniu. Oczywiście, na starcie w chwili $t = 0$ wszystkie komponenty systemu są w pełni sprawne.

Propozycja 4.1 ([A1], Propozycja 2.1) *Rozważmy trójstanowy system* $\mathbf{k}$*-spośród-*n*, gdzie* $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$*, składający się z komponentów o IID dyskretnych czasach życia. Niech* $i = n - k_1 + 1, \ldots, n-k_2$ *oraz* $j = n-k_2+1-i, \ldots, n-i$*. Wówczas prawdopodobieństwo (4.4.3) jest podane następującym wzorem*

$$
\begin{aligned}
&P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n} = i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n} = j, T_{1,n-k_1+1:n} < T_{2,n-k_2+1:n} = t\right) \\
&= \left[\binom{n}{i} \sum_{v=n-k_1+1}^{i} \binom{i}{v} \left(F(t-1;1)\right)^v \left(p(t;1)\right)^{i-v}\right] \\
&\quad \cdot \left[\binom{n-i}{j} \sum_{u=0}^{n-k_2-i} \binom{j}{u} (F(t;2)-F(t;1)-p(t;2))^u (p(t;2))^{j-u}\right)\left(\overline{F}(t;2)\right)^{n-i-j}.
\end{aligned}
$$

Przypadek II

Następnie obliczamy prawdopodobieństwo podane w (4.4.4) dla $i = n - k_1 + 1, \ldots, n$ oraz $j = \max\{0, n - k_2 + 1 - i\}, \ldots, n - i$. W analizowanym przypadku system ulega awarii w czasie t z powodu braku wymaganej minimalnej liczby k_1 działających (możliwie częściowo) komponentów. Wymagana liczba k_2 w pełni sprawnych komponentów musiała już wcześniej ulec zmniejszeniu.

Propozycja 4.2 ([A1], Propozycja 2.2) *Rozważmy trójstanowy system* $\mathbf{k}$*-spośród-*n*, gdzie* $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$*, składający się z komponentów o IID dyskretnych czasach życia. Prawdopodobieństwo (4.4.4) jest dane następującym wzorem*

$$
\begin{aligned}
&P(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n} = i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n} = j, T_{2,n-k_2+1:n} < T_{1,n-k_1+1:n} = t) \\
&= \left[\binom{n}{i} \sum_{v=0}^{n-k_1} \binom{i}{v} \left(F(t-1;1)\right)^v \left(p(t;1)\right)^{i-v}\right] \\
&\quad \cdot \left[\binom{n-i}{j} \sum_{u=\max\{0,n-k_2-i+1\}}^{j} \binom{j}{u} [F(t;2)-F(t;1)-p(t;2)]^u (p(t;2))^{j-u}\right] \\
&\quad \cdot \left(\overline{F}(t;2)\right)^{n-i-j}.
\end{aligned}
$$

Przypadek III

Na sam koniec obliczane jest prawdopodobieństwo podane w (4.4.5) dla $i = n-k_1+1, \ldots, n-k_2$, oraz $j = n - k_2 + 1 - i, \ldots, n - i$. Taka sytuacja ma miejsce, gdy w momencie t awarii systemu brakuje wymaganej liczby komponentów (wymagane k_1) w stanie $'1'$ (działających, możliwie częściowo) oraz brakuje wymaganej liczby komponentów (wymagane k_2) w stanie $'2'$ (w pełni działających), a ów brak działających komponentów ujawnia się dokładnie w tym samym czasie t.

Propozycja 4.3 ([A1], Proposition 2.3) *Rozważmy trójstanowy system* $\mathbf{k}$*-spośród-*n*, gdzie* $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$*, składający się z komponentów o IID dyskretnych czasach życia. Dla ustalonych* $i = n - k_1 + 1, \ldots, n - k_2$ *oraz* $j = n - k_2 + 1 - i, \ldots, n - i$*, prawdopodobieństwo (4.4.5) jest dane następującym wzorem*

$$
\begin{aligned}
&P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n} = i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n} = j, T_{2,n-k_2+1:n} = T_{1,n-k_1+1:n} = t\right)\\
&= \left[\binom{n}{i} \sum_{v=0}^{n-k_1} \binom{i}{v} \left(F(t-1;1)\right)^v \left(p(t;1)\right)^{i-v}\right]\\
&\quad \cdot \left[\binom{n-i}{j} \sum_{u=0}^{n-k_2-i} \binom{j}{u} \left(F(t;2) - F(t;1) - p(t;2)\right)^u \left(p(t;2)\right)^{j-u}\right] \left(\overline{F}(t;2)\right)^{n-i-j}.
\end{aligned}
$$

W pracy [A1] dostrzegamy też problem z obliczaniem w praktyce prawdopodobieństwa podanego w (4.4.2), gdy T_{1i}, T_{2i}, $i = 1, \ldots, n$, są zmiennymi losowymi o nieskończonych nośnikach. Łatwo zauważyć, że wzór (4.4.2) wymaga nieskończonej liczby składników, co może być kłopotliwe w implementacjach numerycznych. W związku z tym proponujemy metodę przycinania, aby rozwiązać ten problem. Ogólna idea polega na ustaleniu pewnego poziomu dokładności $d > 0$, np. $d = 0.0001$ i przycięciu sumy po prawej stronie wzoru (4.4.2) w punkcie t_0, tak aby

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{\infty} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t) = &\sum_{t=2}^{t_0} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t)\\
&+ \sum_{t=t_0+1}^{\infty} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t),
\end{aligned}
$$

gdzie t_0 jest wybrane tak by

$$
\sum_{t=t_0+1}^{\infty} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t) \leqslant d.
$$

W ten sposób otrzymujemy przybliżony wzór

$$
\sum_{t=2}^{\infty} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t) \approx \sum_{t=2}^{t_0} P(X^{(0)}_{\mathbf{k},n} = i, X^{(1)}_{\mathbf{k},n} = j, T = t)
$$

z błędem nie większym niż d. Następująca propozycja z [A1] daje odpowiedź na pytanie, jak znaleźć odpowiedni poziom przycinania t_0.

Propozycja 4.4 ([A1], Propozycja 2.4) *Niech* (T_{1i}, T_{2i}), $i = 1, \ldots, n$ *będzie wektorem losowym, którego składowe to IID zmienne losowe* $T_{1\,1}, \ldots, T_{1\,n}$ *oraz* $T_{2\,1}, \ldots, T_{2\,n}$, *odpowiadające czasom spędzonym w stanach* $'1'$ *i* $'2'$ *przez każdy z n komponentów w trójstanowym systemie* **k**-*spośród-n. Jeśli* t_0 *spełnia warunek*

$$\overline{F}(t_0; 1) \leqslant \frac{d}{\tilde{d}},$$

z $\tilde{d} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}(3 \cdot 2^{i+j+1} - 2^i - 2^j)$, *wówczas błąd przybliżenia dla wzoru*

$$\sum_{t=2}^{\infty} P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n} = i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n} = j, T = t\right) \approx \sum_{t=2}^{t_0} P\left(X^{(0)}_{\boldsymbol{k},n} = i, X^{(1)}_{\boldsymbol{k},n} = j, T = t\right)$$

jest co najwyżej równy d.

W [A1] przedstawiamy również przykład numeryczny ilustrujący wyniki Twierdzenia 6. Analizujemy dyskretny system trójstanowy typu **k**-spośród-n, w którym degradacja komponentów przebiega zgodnie z procesem Markowa. Zakładamy, że zmienne losowe T_{2i}, $i = 1, \ldots, n$ mają rozkład geometryczny z funkcją masy prawdopodobieństwa $p(t; 2) = q(1-q)^{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots$. Przez W_{1i}, $i = 1, \ldots, n$ oznaczamy czas spędzony przez i-ty komponent w stanie $'1'$. Zakładamy, że te zmienne losowe mają również rozkład geometryczny z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(W_{1i} = t) = p(1-p)^{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots$. Parametry q i p mają tutaj naturalne interpretacje. Można je rozumieć jako prawdopodobieństwa degradacji pojedynczego komponentu w jednej jednostce czasu: q opisuje przejście ze stanu $'2'$ do stanu $'1'$, natomiast p odpowiada za degradację ze stanu $'1'$ do stanu $'0'$. Wówczas

$$T_{1i} = T_{2i} + W_{1i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zmienne losowe W_{1i} oraz T_{2i} są niezależne, co wynika z założenia, że degradacja komponentów przebiega zgodnie z procesem Markowa. Dalsza analiza prowadzi do następującego wyniku

$$p(t; 1) = \frac{q\,p}{q-p}\left((1-p)^{t-1} - (1-q)^{t-1}\right), \quad t = 2, 3, \ldots,$$

i w konsekwencji

$$F(t; 1) = 1 - \frac{q(1-p)^t - p(1-q)^t}{q-p}.$$

Korzystając z tych informacji oraz Twierdzenia 6, w Tabelach 1–2 w [A1] przedstawiono łączny rozkład wektora losowego $\left(X^{(0)}_{\mathbf{k},n}, X^{(1)}_{\mathbf{k},n}\right)$, gdzie odpowiednio $n = 3$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (2, 1)$, oraz $n = 6$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (4, 2)$, dla wybranych wartości $q, p \in (0, 1)$, $q \neq p$.

4.5 Estymatory największej wiarygodności oparte na dyskretnych czasach życia komponentów w systemie k-spośród-n

Wyniki przedstawione w tym podrozdziale odnoszą się do prac [A6], [A3]. Artykuł [A3] znalazł się w gronie dziewięciu prac wyróżnionych zaproszeniem do publikacji w specjalnym wydaniu

"Computational Methods in System Reliability" (SI-CMSR) prestiżowego czasopisma Journal of Computational and Applied Mathematics wydawanego przez Elsevier. W obu pracach prezentujemy wyniki dotyczące estymacji metodą największej wiarygodności nieznanego parametru dyskretnego rozkładu czasów życia komponentów w binarnym systemie k-spośród-n, zakładając, że te czasy życia są IID zmiennymi losowymi. Również tym razem, w estymacji uwzględniamy liczbę popsutych komponentów w systemie. Rejestrujemy ją aż do momentu (włącznie) jego awarii. Kluczowe znaczenie ma tutaj łączny rozkład tej liczby i czasów awarii odpowiadających jej komponentów. Najpierw omawiamy przypadek ogólny, czyli dowolnego rozkładu dyskretnego, który spełnia określone łagodne warunki regularności. Następnie analizujemy typowe rozkłady dyskretne, takie jak rozkład Poissona, dwumianowy, dwumianowy ujemny oraz geometryczny. Dodatkowo rozszerzamy wyniki dotyczące rozkładu geometrycznego, uznawanego za jeden z najczęściej stosowanych w praktyce. Prezentowane wyniki są pierwszymi w literaturze, które uwzględniają dyskretne czasy życia komponentów w kontekście estymacji metodą największej wiarygodności. Wcześniejsze prace koncentrują się głównie na przypadku, w którym czasy życia komponentów mają rozkłady absolutnie ciągłe. Na przykład w [40] oraz [5] autorzy opisują właściwości asymptotyczne estymatorów największej wiarygodności (*ang. maximum likelihood estimators*, MLEs) opartych na czasach awarii komponentów w systemie k-spośród-n. W literaturze, m.in. w [53], [57], zaprezentowano uogólnienia tych wyników na przypadek z częściowo cenzurowanymi czasami uszkodzeń. Ponadto istnieją prace rozwijające metody estymacji rozkładu czasu życia komponentów na podstawie obserwacji czasów życia systemu, zob. np. [46], [61], [62], oraz inne pozycje w tych artykułach.

Oznaczenia

Chcąc zaprezentować odpowiednie wyniki, potrzebujemy nowych oznaczeń. Niech $\mathcal{F} = \{F(\theta, \cdot),\ \theta \in \Theta\}$ będzie rodziną dystrybuant dla rozkładów dyskretnych, gdzie $\theta \in \mathbf{R}$ jest parametrem, który nas interesuje. Rozważamy binarny system k-spośród-n, składający się z komponentów, których czasy życia $T_1, T_2, \ldots, T_n$ są IID zmiennymi losowymi o jednakowej dystrybuancie $F(\theta, \cdot) \in \mathcal{F}$, gdzie $F(\theta, t) = P_\theta(T_1 \leqslant t)$. Następnie $p(\theta, t) = P_\theta(T_1 = t)$ i $\overline{F}(\theta, t) = 1 - F(\theta, t)$. Ponadto, dla uproszczenia notacji, zakładamy, że dla każdego $\theta \in \Theta$ nośnik funkcji $F(\theta, \cdot)$, oznaczony jako $\operatorname{supp} F(\theta, \cdot)$, ma postać $\{0, 1, \ldots, V\}$, gdzie $V \leqslant \infty$. Przypomnijmy ponadto, że $T_{1:n} \leqslant T_{2:n} \leqslant \ldots \leqslant T_{n:n}$ oznaczają statystyki porządkowe odpowiadające zmiennym losowym $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Dodatkowo, system typu k-spośród-n ulega awarii, gdy nastąpi awaria $(n-k+1)$-ego komponentu. Zatem jego czas życia T jest równy $T_{n-k+1:n}$.

Problem

Naszym celem jest zastosowanie metody największej wiarygodności do oszacowania nieznanego parametru θ na podstawie danych o awariach komponentów zebranych aż do (i łącznie z) momentu popsucia się systemu k-spośród-n. Należy zauważyć, że w przypadku dyskretnych czasów życia komponentów, gdy $k \neq 1$, w momencie awarii systemu niekoniecznie obserwujemy dokładnie $n-k+1$ niesprawnych elementów. Ze względu na możliwość jednoczesnych awarii komponentów z niezerowym prawdopodobieństwem, liczba elementów, które uległy uszkodzeniu, może być większa niż $n-k+1$ – szczegółowe omówienie takiej sytuacji znajduje się w [8]. Oznacza to, że zbierając dane do momentu awarii systemu k-spośród-n, możemy zarejestrować nie tylko wartości statystyk porządkowych $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n-k+1:n}$, lecz także wartość zmiennej $X_{k,n}$ – liczby elementów, które uległy awarii w momencie całkowitego uszkodzenia systemu. Innymi słowy, obserwujemy:

$$X_{k,n}, T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n-k+1:n},$$

lub równoważnie

$$X_{k,n}, T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{X_{k,n}:n}.$$

Warto podkreślić, że przedstawiony problem, choć sformułowany w kontekście wnioskowania na podstawie czasów awarii komponentów systemu k-spośród-n do momentu (włącznie) jego całkowitego uszkodzenia, może być równie dobrze zastosowany do analizy danych dyskretnych z prawostronnym ucięciem typu II. W eksperymencie z ucięciem typu II testuje się n elementów o IID czasach życia $T_1, T_2, \dots, T_n$. Ze względu na ograniczenia budżetowe, czasowe lub z powodów etycznych – szczególnie w badaniach biomedycznych – eksperyment kończy się w momencie wystąpienia r-tej awarii, przy czym wartość $r < n$ jest ustalona z góry. Jeśli czasy życia T_i są dyskretnymi zmiennymi losowymi, istnieje niezerowe prawdopodobieństwo, że w chwili wystąpienia r-tej awarii uszkodzeniu ulegnie łącznie więcej niż r elementów. Dlatego, aby nie pominąć istotnych informacji, zasadne jest uwzględnienie nie tylko wartości statystyk porządkowych $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n}$, lecz także liczby uszkodzonych elementów w chwili zakończenia eksperymentu, oznaczonej jako $X_{k,n}$. W konsekwencji, problem sprowadza się do wnioskowania na podstawie zbioru danych $(X_{k,n}, T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{r:n})$. Co więcej, przy założeniu $r = n-k+1$, jest to dokładnie ten sam problem, co analiza czasów awarii komponentów systemu k-spośród-n aż do jego całkowitego popsucia.

Pierwszym problemem, który należy rozwiązać, jest znalezienie jawnej postaci dla łącznej funkcji masy prawdopodobieństwa dla zmiennych losowych $X_{k,n}, T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{X:n}$, a w dalszej kolejności – wyznaczenie odpowiadającej jej funkcji wiarygodności. Korzystamy z podejścia zaproponowanego w pracy [38], opartego na koncepcji tzw. serii remisów (*ang. tie-runs*). Zakładamy, że obserwowane wartości zmiennych $X_{k,n}, T_{1:n}, \dots, T_{X_{k,n}:n}$ są równe odpowiednio $s, t_1, \dots, t_s$, gdzie $s \in \{n-k+1, \dots, n\}$, $t_{n-k+1} = \ldots = t_s$, a ciąg wartości $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_s$ zawiera m serii remisów o długościach $z_1, z_2, \dots, z_m$ (takich że $z_1 + \ldots + z_m = s$), to znaczy:

$$t_1 = \ldots = t_{z_1} < t_{z_1+1} = \ldots = t_{z_1+z_2} < \ldots < t_{z_1+\ldots+z_{m-1}+1} = \ldots = t_{z_1+\ldots+z_m} (= t_s).$$

Wówczas obserwowana funkcja wiarygodności dla zmiennych $X_{k,n}, T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{X_{k,n}:n}$, dana wyrażeniem:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta;\, s,\, t_1, \dots, t_s) \\ &= P_\theta(X_{k,n} = s, T_{1:n} = t_1, \dots, T_{n-k+1:n} = t_{n-k+1}, \dots, T_{s:n} = t_s) \\ &= P_\theta(X_{k,n} = s, T_{1:n} = t_1, \dots, T_{n-k+1:n} = t_{n-k+1}, \dots, T_{s:n} = t_s, T_{s+1:n} > t_s), \end{aligned}$$

gdzie $T_{n+1:n} = \infty$, ma postać

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-s)! \prod_{i=1}^{m} z_i!} \left(\prod_{i=1}^{m} [p(\theta, t_{z_1+\ldots+z_i})]^{z_i} \right) \left[\overline{F}(\theta, t_s) \right]^{n-s} \tag{4.5.1}$$

jeśli $s \in \{n-k+1, \ldots, n\}$ oraz $t_{n-k+1} = \ldots = t_s$. W przeciwnym razie prawa strona wyrażenia (4.5.1) jest równa 0.

Zauważmy, że jeżeli pochodne $\frac{\partial}{\partial \theta} p(\theta, t)$, dla $t \in \{0, 1, \ldots, V\}$, istnieją, to równanie wiarygodności $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta;\, s,\, t_1, \ldots, t_s) = 0$ można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial \log p(\theta, t_{z_1+\ldots+z_i})}{\partial \theta} + (n-s) \frac{\partial \log \overline{F}(\theta, t_s)}{\partial \theta} = 0,$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial \theta} \log \overline{F}(\theta, t_s)$ definiuje się jako równe 0 jeśli $t_s = V < \infty$.

Mocna zgodność

Przedstawiony wynik odnosi się do przypadku ogólnego, w którym rozkład czasów życia komponentów systemu k-spośród-n spełnia pewne łagodne warunki regularności (W1)–(W3) (zob. Twierdzenie 7). Dowodzimy, że równanie wiarygodności

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta;\, X_{k,n},\, T_{1:n}, \ldots, T_{X_{k,n}:n}) = 0 \tag{4.5.2}$$

ma rozwiązanie $\hat{\theta}_n$ z P_θ-prawdopodobieństwem 1, dla wszystkich wystarczająco dużych wartości n, a ciąg $(\hat{\theta}_n, n \geqslant 1)$ estymatorów parametru θ jest mocno zgodny. Co więcej, przedstawione wyniki mogą być stosowane szerzej tj. gdy nośnik rozkładu jest postaci $\operatorname{supp} F(\theta, \cdot) = \{x_0, x_1, \ldots, x_V\}$, $V \leqslant \infty$ oraz $x_0 < x_1 < \ldots < x_V$, a jeśli $V = \infty$, to gdy ciąg $(x_n, n \geqslant 0)$ nie posiada punktów skupienia (zob. dowód Twierdzenia 7 w Dodatku do pracy [A6]).

Twierdzenie 7 ([A6], Twierdzenie 1) *Przyjmijmy, że rodzina rozkładów $\mathcal{F} = F(\lambda), \lambda \in \Theta$ spełnia następujące trzy warunki:*

(W1) zbiór $\Theta \subset \mathbf{R}$ jest przedziałem otwartym (być może nieograniczonym);

(W2) dla każdego $\lambda \in \Theta$ oraz $j \in \{0, 1, \ldots, V\}$ istnieje pochodna trzeciego rzędu $\frac{\partial^3 p(\lambda, j)}{\partial \lambda^3}$ i jest ona funkcją ciągłą względem parametru $\lambda \in \Theta$;

(W3) $\frac{\partial \log p(\lambda, 0)}{\partial \lambda} \neq 0$ dla każdego $\lambda \in \Theta$.

Niech $T_1, \ldots, T_n$ będą IID zmiennymi losowymi o dystrybuancie $F(\theta, \cdot)$ dla pewnego $\theta \in \Theta$. Jeżeli $k = k(n) = [(1-q)n]$, $n \geqslant 1$, gdzie $q \in (0,1)$, a $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x, to istnieje ciąg estymatorów $(\hat{\theta}_n, n \geqslant 1)$ taki, że z P_θ-prawdopodobieństwem 1

- *dla wszystkich wystarczająco dużych wartości n, $\hat{\theta}_n$ jest rozwiązaniem równania wiarygodności (4.5.2);*

- $\hat{\theta}_n \to \theta$ *gdy* $n \to \infty$.

Zauważmy, że Twierdzenie 7 może być użyteczne w praktyce, ponieważ dla danej rodziny $\mathcal{F} = \{F(\theta, \cdot), \theta \in \Theta\}$ możemy zweryfikować, czy jego założenia są spełnione, nie znając wartości prawdziwego parametru θ. Z kolei w dowodzie Twierdzenia 7 standardowe techniki stosowane w asymptotycznej teorii estymatorów największej wiarygodności, opartych na IID zmiennych losowych, nie znajdują bezpośredniego zastosowania do naszego problemu, ponieważ wnioskujemy na podstawie zmiennych losowych zależnych i o niejednakowych rozkładach, takich jak $X_{k,n}, T_{1:n}, \ldots, T_{n-k+1:n}$. Niemniej jednak, odpowiednio dostosowujemy tę metodologię, aby wykazać mocną zgodność estymatorów w naszym przypadku, przy założeniu spełnienia pewnych warunków regularności.

4.6 Estymatory największej wiarygodności (MLE) dla wybranych rodzin rozkładów

W tym podrozdziale rozważamy rozkłady: Poissona $Poiss(\theta)$, gdzie $\theta > 0$, rozkład dwumianowy $b(w, \theta)$, gdzie $\theta \in (0, 1)$, rozkład dwumianowy ujemny $nb(w, \theta)$, gdzie $\theta \in (0, 1)$, oraz rozkład geometryczny $geo(\theta)$, gdzie $\theta \in (0, 1)$, jako możliwe rozkłady czasów życia komponentów w systemie k-spośród-n. Te cztery rozkłady zostały wymienione w [4] jako typowe dyskretne rozkłady awarii szeroko stosowane w teorii niezawodności. Wykażemy, że dla wszystkich tych dyskretnych rozkładów, jeżeli estymator największej wiarygodności (MLE) parametru θ oparty na obserwowanych wartościach $X_{k,n}, T_{1:n}, \ldots, T_{X_{k,n}:n}$ istnieje, to jest on wyznaczony jednoznacznie. Ponadto Twierdzenie 7 pozwala wywnioskować, że w tych przypadkach estymator MLE parametru θ istnieje prawie na pewno dla dostatecznie dużych n i jest mocno zgodny.

Oczywiście, ponieważ rozkład geometryczny jest szczególnym przypadkiem rozkładu dwumianowego ujemnego, wyniki udowodnione dla czasów życia komponentów o rozkładzie dwumianowym ujemnym mają zastosowanie również w przypadku czasów życia o rozkładzie geometrycznym. Niemniej jednak przypadek geometryczny jest prostszy – w tym przypadku uzyskujemy jawny wzór na estymator największej wiarygodności (MLE) parametru θ. Jest to punkt wyjścia do rozważań nie tylko nad własnościami asymptotycznymi, lecz także nad dokładnym rozkładem tego estymatora. Z tego powodu przypadek geometryczny jest szczegółowo omawiany w osobnym paragrafie. Dokładne własności rozkładu estymatora udało się określić tylko dla systemów szeregowych ($k = n$). W pozostałych przypadkach przeprowadzamy badanie symulacyjne metodą Monte Carlo (zob. [A3]), mające na celu analizę własności estymatorów MLE przy skończonej liczbie obserwacji. Nie będziemy ich cytować tutaj.

Chcąc udowodnić wyniki przedstawione w kolejnych paragrafach poświęconych wybranym rozkładom dyskretnym, wykorzystujemy dwa następujące lematy. Pierwszy z nich pochodzi z książki [66], s. 41.

Lemat 1 *Niech promień zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ *wynosi* $\rho \in (0, \infty]$*, niech liczba jego zer w przedziale* $0 < x < \rho$ *wynosi* Z*, a liczba zmian znaku w ciągu jego współczynników wynosi* C*. Wtedy zachodzi nierówność* $Z \leqslant C$*.*

Drugi lemat dotyczy kombinacji liniowych wielomianów Bernsteina i został po raz pierwszy udowodniony w [71]. Przypomnijmy, że wielomiany Bernsteina stopnia w są definiowane wzorem $B_{j,w}(x) = \binom{w}{j} x^j (1-x)^{w-j}$, gdzie $x \in (0,1)$, a $j = 0, \ldots, w$.

Lemat 2 *Liczba zer danej, niezerowej kombinacji liniowej wielomianów Bernsteina* $B(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i B_{i,n}(x)$*,* $x \in (0,1)$*, nie przekracza liczby zmian znaku w ciągu współczynników* $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$*. Pierwszy i ostatni znak tej sumy są identyczne odpowiednio ze znakami pierwszego i ostatniego niezerowego elementu ciągu współczynników* β*.*

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy dalej oznaczenie:

$$\delta = z_1 t_{z_1} + z_2 t_{z_1+z_2} + \ldots + z_m t_s. \tag{4.6.1}$$

Rozkład Poissona

W tym paragrafie czasy życia komponentów T_i, $i = 1, \ldots, n$, mają rozkład Poissona $Poiss(\theta)$ z funkcją masy prawdopodobieństwa

$$p(\theta, t) = e^{-\theta} \frac{\theta^t}{t!}, \quad t \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{4.6.2}$$

gdzie $\theta > 0$ jest parametrem podlegającym estymacji. Korzystając z (4.5.1) oraz (4.6.1), możemy zapisać funkcję wiarygodności na podstawie zaobserwowanych wartości zmiennych $X_{k,n}, T_{1:n}, \ldots, T_{X_{k,n}:n}$ w postaci

$$L(\theta) = C_1 e^{-\theta n} \theta^{\delta} \left(\sum_{j=t_s+1}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} \right)^{n-s}, \theta > 0,$$

gdzie C_1 nie zależy od θ. Proste przekształcenia pozwalają otrzymać

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\theta) = -n + \frac{\delta}{\theta} + (n-s) \sum_{j=t_s}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} \left(\sum_{j=t_s+1}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} \right)^{-1}, \ \theta > 0. \tag{4.6.3}$$

Rozwijając pochodną funkcji log-wiarygodności, podaną we wzorze (4.6.3), w szereg potęgowy, a następnie analizując znaki współczynników tego rozwinięcia oraz stosując Lemat 1, możemy sformułować główny rezultat w postaci Twierdzenia 2 z pracy [A6].

Twierdzenie 8 ([A6], Twierdzenie 2) *Zakładamy, że czasy życia komponentów systemu k-spośród-n są z rozkładu Poissona o funkcji masy prawdopodobieństwa podanej we wzorze (4.6.2). Rozważmy przypadek, w którym obserwowano czasy awarii tych komponentów aż do momentu (włącznie), gdy nastąpiła awaria całego systemu uzyskując* $X_{k,n} = s, T_{1:n} = t_1, \ldots, T_{s:n} = t_s$*.*

(1) Wówczas $\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$, estymator największej wiarygodności parametru θ, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie. Dokładniej mamy

- *$\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$ nie istnieje, jeśli $s=n$ oraz $\delta=0$ (tj. jeśli $t_1=t_2=\ldots=t_n=0$),*
- *$\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)=\delta/n$, jeśli $s=n$ oraz $\delta>0$,*
- *$\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$ jest wyznaczony jednoznacznie i należy do przedziału $\left(\frac{\delta}{s},\frac{\delta+(n-s)(t_s+1)}{s}\right)$, a zatem może być łatwo uzyskany przy użyciu metod numerycznych, jeśli $s\in\{n-k+1,\ldots,n-1\}$.*

(2) Ponadto, na mocy Twierdzenia 7, jeśli $k=[np]$, $0<p<1$, to prawie na pewno, dla wszystkich wystarczająco dużych n, estymator $\hat{\theta}_{ML,k,n}=\hat{\theta}_{ML,k,n}(X_{k,n},T_{1:n},\ldots,T_{X_{k,n}:n})$ istnieje oraz $\hat{\theta}_{ML,k,n}$ jest estymatorem mocno zgodnym parametru θ.

Rozkład dwumianowy

W tym paragrafie zakładamy, że czasy życia komponentów T_i, $i=1,\ldots,n$, w systemie k-spośród-n mają rozkład dwumianowy $b(w,\theta)$ z następującą funkcją masy prawdopodobieństwa

$$p(\theta,t)=\binom{w}{t}\theta^t(1-\theta)^{w-t},\quad t\in\{0,1,\ldots,w\},\tag{4.6.4}$$

gdzie $w\in\{1,2,\ldots\}$ jest znane, a $\theta\in(0,1)$ jest parametrem do oszacowania. Stosując notację (4.6.1) funkcję wiarygodności, podaną we wzorze (4.5.1), możemy zapisać jako

$$L(\theta)=C_2\theta^\delta(1-\theta)^{ws-\delta}\left[\sum_{j=t_s+1}^{w}\binom{w}{j}\theta^j(1-\theta)^{w-j}\right]^{n-s},\ \theta\in(0,1),$$

gdzie C_2 nie zależy od θ. Łatwe przekształcenia pokazują, że dla $\theta\in(0,1)$,

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=\frac{\delta}{\theta}-\frac{ws-\delta}{1-\theta}+(n-s)\frac{\sum_{j=t_s+1}^{w}(j-w\theta)\binom{w}{j}\theta^{j-1}(1-\theta)^{w-j-1}}{\sum_{j=t_s+1}^{w}\binom{w}{j}\theta^j(1-\theta)^{w-j}}.\tag{4.6.5}$$

W pracy [A6] wyrażamy pochodną funkcji log-wiarygodności, podaną w (4.6.5), jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina. Analizując znaki jej współczynników oraz stosując Lemat 2, wyprowadzamy główny wniosek, który jest sformułowany jako Twierdzenie 3 w pracy [A6].

Twierdzenie 9 ([A6], Twierdzenie 3) *Przypuśćmy, że czasy życia komponentów systemu k-spośród-n są z rozkładu dwumianowego o funkcji masy prawdopodobieństwa podanej w (4.6.4). Zakładamy, że obserwowano czasy awarii tych komponentów aż do momentu (włącznie), gdy nastąpiła awaria całego systemu uzyskując $X_{k,n}=s,T_{1:n}=t_1,\ldots,T_{s:n}=t_s$.*

(1) Wówczas $\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$, estymator największej wiarygodności parametru θ, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie. Dokładniej mamy

– $\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$ *nie istnieje, jeśli* $s=n$ *oraz* $\delta=0$,

– $\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)=\frac{\delta}{nw}$, *jeśli* $s=n$ *oraz* $\delta>0$,

– $\hat{\theta}_{ML,k,n}(s,t_1,\ldots,t_s)$ *jest wyznaczony jednoznacznie i może być łatwo uzyskany przy użyciu metod numerycznych, jeśli* $s\in\{n-k+1,\ldots,n-1\}$.

(2) Ponadto prawdziwa jest teza (2) z Twierdzenia 8.

Rozkład dwumianowy ujemny

W tym paragrafie rozważamy system k-spośród-n, złożony z n elementów, których czasy życia T_i, dla $i=1,\ldots,n$, mają rozkład dwumianowy ujemny $nb(w,\theta)$ z funkcją masy prawdopodobieństwa

$$p(\theta,t)=\binom{t+w-1}{w-1}\theta^t(1-\theta)^w,\quad t\in\{0,1,2,\ldots\},\tag{4.6.6}$$

gdzie $w\in\{1,2,\ldots\}$ jest znane, a $\theta\in(0,1)$ jest parametrem do oszacowania. Korzystając z (4.6.1), funkcję wiarygodności (4.5.1) można zapisać jako

$$\begin{aligned} L(\theta) &= C_3\theta^\delta(1-\theta)^{sw}\left\{1-\sum_{j=0}^{t_s}\binom{j+w-1}{w-1}\theta^j(1-\theta)^w\right\}^{n-s} \\ &= C_3\theta^\delta(1-\theta)^{nw}\left\{\sum_{j=t_s+1}^{\infty}\binom{j+w-1}{w-1}\theta^j\right\}^{n-s},\theta\in(0,1), \end{aligned}$$

gdzie C_3 nie zależy od θ. Proste przekształcenia pozwalają otrzymać dla $\theta\in(0,1)$ następujące równanie wiarygodności

$$\{\delta(1-\theta)-nw\theta\}\sum_{j=t_s+1}^{\infty}\binom{j+w-1}{w-1}\theta^j+(1-\theta)(n-s)\sum_{j=t_s+1}^{\infty}\binom{j+w-1}{w-1}j\theta^j=0.\tag{4.6.7}$$

Lewą stronę (4.6.7) można przedstawić w postaci szeregu potęgowego. Następnie analizujemy znaki współczynników liczbowych tego szeregu i stosujemy Lemat 1, aby wyprowadzić Twierdzenie 4 z pracy [A6].

Twierdzenie 10 ([A6], Twierdzenie 4) *Rozważmy system k-spośród-n złożony z komponentów, których czasy życia są z rozkładu dwumianowego ujemnego o funkcji masy prawdopodobieństwa podanej w (4.6.6). Przypuśćmy, że obserwowano czasy awarii tych komponentów aż do momentu (włącznie), gdy nastąpiła awaria całego systemu otrzymując* $X_{k,n}=s,T_{1:n}=t_1,\ldots,,T_{s:n}=t_s$.

(1) Teza (1) z Twierdzenia 9 pozostaje prawdziwa po zmianie "$\frac{\delta}{nw}$*" na "*$\frac{\delta}{nw+\delta}$*".*

(2) Ponadto, prawdziwa jest także teza (2) z Twierdzenia 8.

Rozkład geometryczny

Jak zaznaczono na początku tego podrozdziału, wyniki dotyczące rozkładu geometrycznego zostały poszerzone w porównaniu do pozostałych przypadków. Przedstawione rezultaty opierają się na pracy [A3]. Szczegółowo rzecz ujmując, zakładamy, że czasy życia komponentów są IID zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym, określonym przez funkcję masy prawdopodobieństwa

$$p_\theta(t) = \theta(1-\theta)^t, \quad t \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{4.6.8}$$

gdzie θ jest nieznanym parametrem. W pierwszym etapie przedstawiamy wynik dotyczący wyznaczenia estymatora największej wiarygodności parametru θ. Rozważamy prostszy przypadek, w którym obserwowany jest pojedynczy system k-spośród-n, aż do jego awarii przy czym rejestrowane są czasy awarii jego komponentów. Na podstawie zebranych danych podajemy jawną postać estymatora MLE parametru θ. Następnie, koncentrując się na systemach szeregowych ($k = n$), wyprowadzamy jego dokładne własności. W dalszej części uogólniamy nasze wyniki na przypadek, w którym obserwujemy N niezależnie działających systemów typu k-spośród-n, zamiast pojedynczego układu. Dokładne własności rozkładu estymatora udaje się ponownie uzyskać w przypadku N systemów szeregowych. Dodatkowo analizujemy asymptotyczne zachowanie estymatora MLE parametru θ w dwóch granicznych sytuacjach: gdy liczba komponentów n w systemie szeregowym dąży do nieskończoności oraz gdy do nieskończoności dąży liczba obserwowanych systemów N.

Ponieważ rozkład geometryczny jest szczególnym przypadkiem rozkładu dwumianowego ujemnego, na mocy Twierdzenia 10 wiemy, że estymator największej wiarygodności parametru θ jeśli istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie oraz jest mocno zgodny. Chociaż w pracy [A6] udowodniono, że estymator MLE istnieje prawe na pewno w przypadku, gdy czasy życia komponentów podlegają rozkładowi dwumianowemu ujemnemu, to nie uzyskano jawnej postaci tego estymatora. Zamiast tego zaproponowano jedynie metodę numeryczną do jego obliczenia. Niemniej jednak, szczególny przypadek, w którym czasy życia komponentów mają rozkład geometryczny, jest znacznie prostszy, dlatego w tym paragrafie przedstawiamy analityczną postać interesującego nas estymatora MLE.

Stosując (4.6.8), funkcję wiarygodności (4.5.1), dla $s \in \{n-k+1, \ldots, n\}$ oraz $t_{n-k+1} = \ldots = t_s$, można przedstawić w postaci

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-s)! \prod_{i=1}^m z_i!} \theta^{z_1+\ldots+z_m} (1-\theta)^{z_1 t_{z_1} + z_2 t_{z_1+z_2} + \ldots + z_m t_{z_1+\ldots+z_m} + (n-s)(t_s+1)}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\Lambda_{k,n} = T_{1:n} + T_{2:n} + \ldots + T_{X_{k,n}:n} + (n - X_{k,n}) T_{X_{k,n}:n} \tag{4.6.9}$$

oraz

$$\lambda = t_1 + t_2 + \ldots + t_s + (n-s)t_s = \delta + (n-s)t_s$$

(por. (4.6.1)) dla obserwowanej wartości $\Lambda_{k,n}$. Warto podkreślić, że $\Lambda_{k,n}$ stanowi ważną wielkość w teorii niezawodności, gdyż opisuje łączny czas pracy komponentów w systemie (*ang. total time on test*) do momentu, gdy test został przerwany tj. po $(n-k+1)$-szej awarii. Poniżej przedstawiamy Twierdzenie 2.1 zaczerpnięte z pracy [A3].

Twierdzenie 11 ([A3], Twierdzenie 2.1) *Załóżmy, że czasy awarii komponentów systemu k-spośród-n zostały zaobserwowane – aż do i łącznie z momentem, w którym cały system uległ awarii. Jeśli czasy życia komponentów $T_1, T_2, \ldots, T_n$ są IID zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym geo(θ), to estymator największej wiarygodności parametru θ jest wyznaczony jednoznaczny i dany jest wzorem:*

$$\hat{\theta}_{ML,k,n} = \frac{X_{k,n}}{\Lambda_{k,n} + n} = \frac{X_{k,n}}{T_{1:n} + T_{2:n} + \ldots + T_{X_{k,n}:n} + (n - X_{k,n})T_{X_{k,n}:n} + n}. \tag{4.6.10}$$

Zauważmy, że estymator $\hat{\theta}_{ML,k,n}$ dany wzorem (4.6.10) może przyjmować wartość 1, gdy $\Lambda_{k,n} = 0$ oraz $X_{k,n} = n$, czyli w sytuacji, gdy $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Oznacza to, że wszystkie n komponentów systemu k-spośród-n uległo awarii w momencie rozpoczęcia eksperymentu. Aby uwzględnić także ten przypadek, można uznać, że estymator wówczas nie istnieje lub rozszerzyć pojęcie rozkładu geometrycznego. Innymi słowy, dopuszczamy wartość $\theta = 1$, przyjmując konwencję, że rozkład geometryczny $geo(\theta)$ dla $\theta = 1$ jest rozkładem zdegenerowanym skoncentrowanym w punkcie 0. Oznacza to, że czas życia komponentu ma rozkład $geo(1)$, jeśli z prawdopodobieństwem 1 komponent ulega awarii dokładnie w chwili rozpoczęcia jego użytkowania.

Korzystając teraz z Twierdzenia 10, natychmiast otrzymujemy, że estymator największej wiarygodności (4.6.10) jest mocno zgodnym estymatorem parametru θ przy $n \to \infty$, a k zmienia się wraz z n w taki sposób, że $k = k_n = [nq]$ dla pewnej wartości $q \in (0,1)$.

Wniosek 2 ([A3], Wniosek 2.1) *Niech spełnione będą założenia Twierdzenia 11, niech $\theta \in (0,1)$ oraz $k = [nq]$, $q \in (0,1)$. Wówczas, P_θ-prawie na pewno, dla wszystkich dostatecznie dużych n, zachodzi $\hat{\theta}_{ML,k,n} \in (0,1)$. Ponadto, estymator $\hat{\theta}_{ML,k,n}$ jest mocno zgodnym estymatorem parametru θ przy $n \to \infty$.*

W pracy [A3] interesują nas również dokładne własności rozkładu estymatora $\hat{\theta}_{ML,k,n}$. W tym celu istotna jest znajomość rozkładu łącznego zmiennych losowych $X_{k,n}, T_{1:n}, \ldots, T_{X_{k,n}:n}$. W ogólnym przypadku rozkład ten ma jednak bardzo złożoną postać, co czyni go mało użytecznym w praktycznych zastosowaniach. Inaczej jest w szczególnym przypadku systemów szeregowych ($k = n$), złożonych z komponentów o niezależnych czasach życia, które mają rozkład geometryczny $geo(\theta)$, $\theta \in (0,1)$. Wówczas zmienne losowe $X_{n,n}$ i $T_{1:n}$ są niezależne. Własność tę po raz pierwszy zaobserwowano w [8], przy słabszych założeniach — gdy czasy życia komponentów $T_1, \ldots, T_n$ są niezależne, a $T_i \sim geo(\theta_i)$, gdzie $\theta_i \in (0,1)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Umożliwia ona wyznaczenie dokładnych własności rozkładu estymatora w tej szczególnej sytuacji, które przedstawia poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 12 ([A3], Twierdzenie 2.2) *Przy założeniach Twierdzenia 11, w którym "system k-spośród-n" zastępujemy "systemem n-spośród-n", estymator największej wiarygodności parametru θ jest dany wzorem*

$$\hat{\theta}_{ML,n,n} = \frac{X_{n,n}}{n(T_{1:n}+1)}$$

oraz dla dowolnego $\theta \in (0,1)$,

(i) $\hat{\theta}_{ML,n,n}$ *jest estymatorem obciążonym parametru θ z*

$$E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n}\right) = \theta \frac{-\ln(1-(1-\theta)^n)}{(1-\theta)^n},$$

(ii) obciążenie estymatora $\hat{\theta}_{ML,n,n}$, dane wzorem

$$E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n} - \theta\right) = \theta\left(\frac{-\ln(1-(1-\theta)^n)}{(1-\theta)^n} - 1\right),$$

jest dodatnie, co oznacza, że estymator $\hat{\theta}_{ML,n,n}$ przeciętnie przeszacowuje wartość parametru θ,

(iii) błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{\theta}_{ML,n,n}$ jest dany wzorem

$$E_\theta\left(\left(\hat{\theta}_{ML,n,n} - \theta\right)^2\right)$$
$$= \theta^2\left(\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\theta}\right)\frac{Li_2((1-\theta)^n)}{(1-\theta)^n} + 2\frac{\ln(1-(1-\theta)^n)}{(1-\theta)^n} + 1\right),$$

gdzie

$$Li_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2}, \quad |x| < 1,$$

jest funkcją specjalną nazywaną funkcją dilogarytmiczną lub funkcją Spenca, którą można przedstawić jako

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-v)}{v} dv, \quad |x| < 1,$$

zob. na przykład [58] oraz [76].

Teraz uogólnimy nasze wyniki na sytuację, w której obserwujemy N niezależnie działających systemów k-spośród-n, a nie tylko jeden taki układ, przy czym $N \in \{1, 2, \ldots\}$ jest ustaloną liczbą. Każdy pojedynczy system składa się z n komponentów o IID dyskretnych czasach życia, o wspólnej dystrybuancie F_θ, gdzie $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}$ jest nieznanym parametrem do oszacowania. Podczas eksperymentu, dla każdego z tych systemów k-spośród-n, zbieramy dane aż do momentu jego awarii włącznie. Oznaczamy przez

$$T_1^{(j)}, \ldots, T_n^{(j)}$$

czasy życia komponentów j-tego systemu k-spośród-n, przy czym zmienne losowe $T_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, N$, są IID i mają wspólną dystrybuantę F_θ. Przez $X_{k,n}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$, oznaczamy liczbę uszkodzonych komponentów w j-tym systemie k-spośród-n w momencie jego awarii. Zatem w trakcie eksperymentu obserwujemy wartości $X_{k,n}^{(j)} = s_j$ oraz $T_{1:n}^{(j)} = t_1^{(j)}, \ldots, T_{s_j:n}^{(j)} = t_{s_j}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$. Oczywiście, dla dowolnego $j = 1, \ldots, N$,

$$s_j \in \{n-k+1, \ldots, n\} \text{ oraz } t_{n-k+1}^{(j)} = \cdots = t_{s_j}^{(j)}.$$

Zaproponujmy analogiczne oznaczenie do (4.6.9)

$$\Lambda_{k,n}^{(j)} = T_{1:n}^{(j)} + T_{2:n}^{(j)} + \ldots + T_{X_{k,n}^{(j)}:n}^{(j)} + (n - X_{k,n}^{(j)}) T_{X_{k,n}^{(j)}:n}^{(j)},$$

a wtedy zaobserwowaną wartość $\Lambda_{k,n}^{(j)}$ będziemy oznaczać przez

$$\lambda_j = t_1^{(j)} + t_2^{(j)} + \cdots + t_{s_j}^{(j)} + (n - s_j) t_{s_j}^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Rozważając funkcję wiarygodności w kontekście przeprowadzonego eksperymentu oraz zakładając, że czasy życia komponentów mają rozkład geometryczny, w [A3] przedstawiamy wyniki dla przypadku N niezależnie działających systemów, odpowiadające analogicznym wynikom uzyskanym dla pojedynczego układu. Pierwszym z nich jest następujące twierdzenie, stanowiące odpowiednik Twierdzenia 11.

Twierdzenie 13 ([A3], Twierdzenie 3.1) *Załóżmy, że zaobserwowano N niezależnie działających systemów k-spośród-n, z których każdy był obserwowany aż do momentu swojej awarii, włącznie. Dla j-tego systemu, gdzie $j = 1, \ldots, N$, zarejestrowano liczbę uszkodzonych komponentów w chwili awarii, oznaczoną przez $X_{k,n}^{(j)}$, oraz czasy życia tych komponentów, które uległy awarii do tego momentu (włącznie), tj. $T_{1:n}^{(j)}, \ldots, T_{X_{k,n}^{(j)}:n}^{(j)}$. Jeżeli czasy życia komponentów w każdym systemie są IID zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym $geo(\theta)$, to estymator największej wiarygodności parametru θ jest wyznaczony jednoznaczny i wyraża się wzorem:*

$$\hat{\theta}_{ML,k,n,N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_{k,n}^{(j)}}{\sum_{j=1}^N \Lambda_{k,n}^{(j)} + nN}.$$

Z tych samych powodów, co w przypadku $N = 1$, a mianowicie dlatego, że dokładny rozkład $\hat{\theta}_{ML,k,n,N}$ jest ogólnie zbyt skomplikowany i nierokujący uzyskania analitycznych wyników, skupimy się na systemach n-spośród-n, czyli systemach szeregowych.

Twierdzenie 14 ([A3], Twierdzenie 3.2) *Przy założeniach Twierdzenia 13 dla $k = n$, estymator największej wiarygodności parametru θ wyraża się wzorem*

$$\hat{\theta}_{ML,n,n,N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_{n,n}^{(j)}}{n \sum_{j=1}^N \left(T_{1:n}^{(j)} + 1 \right)}$$

oraz dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$, *(i)* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest estymatorem obciążonym parametru* θ *z*

$$\begin{aligned}E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}\right) =&\frac{N\theta(1-(1-\theta)^n)^{N-1}}{(1-\theta)^{nN}}\int_0^{(1-\theta)^n}\frac{w^{N-1}}{(1-w)^N}\,dw\\ =&\frac{N\theta(1-(1-\theta)^n)^{N-1}}{(1-\theta)^{nN}}(-1)^N\Bigg[\ln\left(1-(1-\theta)^n\right)\\ &-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j}\left(1-\frac{1}{(1-(1-\theta)^n)}\right)^j\Bigg],\end{aligned}$$

(ii) *obciążenie estymatora* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$*, dane wzorem*

$$E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}-\theta\right)=\theta\left(\frac{N(1-(1-\theta)^n)^{N-1}}{(1-\theta)^{nN}}\int_0^{(1-\theta)^n}\frac{w^{N-1}}{(1-w)^N}\,dw-1\right),$$

jest dodatnie, co oznacza, że estymator $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *przeciętnie przeszacowuje wartość parametru* θ*,*

(iii) *błąd średniokwadratowy estymatora* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest równy*

$$\begin{aligned}E_\theta\left(\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}-\theta\right)^2\right) =&N\theta^2\frac{(1-(1-\theta)^n)^{N-1}}{(1-\theta)^{nN}}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n\theta}+\frac{N-1}{1-(1-\theta)^n}\right)\\ &\cdot\int_0^{(1-\theta)^n}\frac{1}{u}\left(\int_0^u\frac{w^{N-1}}{(1-w)^N}dw\right)du\\ &-2\theta E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,N}\right)+\theta^2,\end{aligned}$$

gdzie $E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}\right)$ *jest podane w części (i).*

Choć Twierdzenie 14 stanowi punkt wyjścia, wyprowadzenie wniosku, że estymator $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ posiada pożądane własności asymptotyczne gdy $n\to\infty$, nie jest natychmiastowe i wymaga istotnego nakładu pracy analitycznej.

Wniosek 3 ([A3], Wniosek 3.1) *Przy założeniach Twierdzenia 14, dla dowolnego* $\theta\in(0,1)$*, gdy* $n\to\infty$*,*

(i) $E_\theta\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}\right)\to\theta$*, co oznacza, że* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym parametru* θ*,*

(ii) $E_\theta\left[\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N}-\theta\right)^2\right]\to 0$*, co oznacza, że* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest estymatorem zgodnym w sensie zbieżności* L_2*, a w konsekwencji, że* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest estymatorem zgodnym.*

Z Twierdzenia 14 widzimy, że w przypadku N systemów n-spośród-n, estymator największej wiarygodności $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ konstruuje się na podstawie IID dwuwymiarowych obserwacji

$$\left(X_{n,n}^{(1)},T_{1:n}^{(1)}\right),\left(X_{n,n}^{(2)},T_{1:n}^{(2)}\right),\ldots,\left(X_{n,n}^{(N)},T_{1:n}^{(N)}\right).$$

Powyższa obserwacja pozwala nam wykorzystać klasyczny wynik, że estymatory największej wiarygodności zbudowane z obserwacji IID są silnie zgodne, asymptotycznie normalne i efektywne, do wykazania asymptotycznych własności $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ gdy $N \to \infty$. Uzyskujemy w ten sposób Twierdzenie 4.1 z [A3]. Wspomniany klasyczny wynik można znaleźć na przykład w [74] i został on także przypomniany w Twierdzeniu A.2 w Dodatku do pracy [A3].

Twierdzenie 15 ([A3], Twierdzenie 4.1) *Przy założeniach Twierdzenia 14, dla dowolnego $\theta \in (0,1)$, gdy $N \to \infty$,*

(i) $\hat{\theta}_{ML,n,n,N} \xrightarrow{\mathrm{P}_\theta\text{-a.s.}} \theta$*, to znaczy, że* $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest mocno zgodnym estymatorem parametru* θ*;*

(ii) $\hat{\theta}_{ML,n,n,N}$ *jest asymptotycznie normalny i efektywny:*

$$\hat{\theta}_{ML,n,n,N} \sim AN\left(\theta, \frac{1}{N \cdot \frac{n}{\theta(1-\theta)} \cdot \frac{1}{1-(1-\theta)^n}}\right)$$

tzn. $\sqrt{N}\left(\hat{\theta}_{ML,n,n,N} - \theta\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{n}{\theta(1-\theta)} \cdot \frac{1}{1-(1-\theta)^n}\right)^{-1}\right).$

4.7 Wnioski

Osiągnięcia opisane w niniejszym autoreferacie stanowią wyniki związane z liczbą uszkodzonych komponentów w systemie, gdy nałożono różne warunki dotyczące jego stanu. Badania koncentrują się głównie na przypadkach, w których czasy życia komponentów są dyskretnymi zmiennymi losowymi. Jak wykazaliśmy, to założenie zyskało na popularności wśród badaczy, szczególnie w ciągu ostatnich sześciu lat. Z jednej strony sprawia ono, że analiza niezawodności systemów staje się bardziej skomplikowana niż w przypadku rozkładów ciągłych. Z drugiej strony, nierzadko jest to bardziej odpowiednie założenie, np. gdy monitorowanie systemu jest ograniczone do dyskretnych punktów czasowych, zamiast ciągłych inspekcji. W wielu przypadkach dążymy również do złagodzenia klasycznego założenia o IID czasach życia komponentów. Staramy się bowiem z jednej strony usunąć założenie o niezależności, a z drugiej uwzględnić możliwość, że system może składać się z komponentów różnych typów.

Interesuje nas rozkład prawdopodobieństwa liczby uszkodzonych komponentów, mając informację o stanie systemu. Znajomość tego rozkładu może okazać się niezwykle przydatna w zapobieganiu nieoczekiwanym awariom, co pozwala uniknąć wysokich kosztów związanych z naprawą elementów systemu. Pokazaliśmy również, że informacja o liczbie uszkodzonych komponentów jest użyteczna we wnioskowaniu statystycznym. Można ją bowiem wykorzystać do konstrukcji estymatora o dobrych własnościach asymptotycznych.

4.8 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, niewchodzące w skład ww. osiągnięcia stanowi 22 artykułów naukowych.

Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora

[B1] JASIŃSKI, K., Rychlik, T. (2013), Maximum variance of order statistics from symmetric populations revisited. *Statistics* 47:2, s. 422–438.

[B2] Beśka, M., JASIŃSKI, K. Rychlik, T., Spryszyński M. (2012), Mixed systems with minimal and maximal lifetime variances. *Metrika* 75:7, s. 877–894.

[B3] JASIŃSKI, K., Rychlik, T. (2012), Bounds on dispersion of order statistics based on dependent symmetrically distributed random variables. *Journal of Statistical Planning and Inference* 142:8, s. 2421–2429.

[B4] JASIŃSKI, K., Navarro, J., Rychlik, T. (2009), Bounds on variances of lifetimes of coherent and mixed systems. *Journal of Applied Probability* 46:3, s. 894–908.

Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora

[C1] Goroncy, A., JASIŃSKI, K., Korejwo, F., Rudzate, M. (2025), Lost capacity of the weighted k-out-of-n system with discrete component lifetimes. *Reliability Engineering and System Safety* 259, s. 1–7, nr art. 110899.

[C2] Dembińska, A., JASIŃSKI, K. (2025), Maximum likelihood inference about parameters of geometric lifetimes of heterogeneous components from data collected till failure of a k-out-of-n:G system. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 454, s. 1–16, nr art. 116195.

[C3] JASIŃSKI, K. (2024), On the number of failed components in a series-parallel system upon system failure when the lifetimes are discretely distributed DNID random variables. *Metrika* 87, s. 183–200.

[C4] Jankowski, M., JASIŃSKI, K., Płocka, M., Goroncy, A. (2024), The aggressive face of melasma: unveiling the influence of upper lip pigmentation on social perception. *Advances in Dermatology and Allergology* 41:2, s. 173–180.

[C5] JASIŃSKI, K. (2023a), On the status of component failures in a working coherent system when the lifetimes are DNID random variables. *Statistics* 57:1, s. 175–194.

[C6] JASIŃSKI, K. (2023b), On conditional residual lifetimes of coherent systems consisting of components with discrete lifetimes. *Metrika* 86, s. 205–218.

[C7] JASIŃSKI, K. (2021a), Some conditional reliability properties of k-out-of-n system composed of different types of components with discrete independent lifetimes. *Metrika* 84:8, s. 1241–1251.

[C8] JASIŃSKI, K. (2021b), Asymptotic properties of the spacings of kth records from discrete distributions. *Communications in Statistics–Theory and Methods* 50:24, s. 5679–5691.

[C9] JASIŃSKI, K. (2020a), Some concept of Markov property of discrete order statistics arising from independent and non-identically distributed variables. *Statistics & Probability Letters* 160, s. 1–6.

[C10] JASIŃSKI, K. (2020b), Asymptotic behavior of the ratio of weak kth records. *Communications in Statistics–Theory and Methods* 49:1, s. 16–26.

[C11] JASIŃSKI, K. (2019a), Weak kth records from geometric distribution and some characterizations. *Communications in Statistics–Theory and Methods* 48:24, s. 6179–6187.

[C12] JASIŃSKI, K. (2019b), Limiting behavior of the ratio of kth records. *Statistics & Probability Letters* 150, s. 29–34.

[C13] JASIŃSKI, K. (2018a), Relations for product moments and covariances of kth records from discrete distributions. *Metrika* 81:2, s. 125–141.

[C14] JASIŃSKI, K. (2018b), Characterizations of geometric distributions based on kth record values. *Statistics* 52:5, s. 1116–1127.

[C15] Dembińska, A., JASIŃSKI, K. (2017), Asymptotic behaviour of proportions of observations in random regions determined by central order statistics from stationary processes. *Statistics* 51:3, s. 591–608.

[C16] JASIŃSKI, K. (2016a), On maximum variance of kth records. *Communications in Statistics–Theory and Methods* 45:8, s. 2392–2401.

[C17] JASIŃSKI, K. (2016b), Asymptotic normality of numbers of observations near order statistics from stationary processes. *Statistics & Probability Letters* 119, s. 259–263.

[C18] JASIŃSKI, K., Rychlik T. (2016), Inequalities for variances of order statistics originating from urn models. *Journal of Applied Probability* 53:1, s. 162–173.

Streszczenie

Moje pozostałe osiągnięcia po uzyskaniu stopnia doktora związane są z szeroko rozumianą analizą danych uporządkowanych. Dotyczą takich modeli próbkowania statystycznego jak statystyki porządkowe i wartości rekordowe wraz z ich uogólnieniami, a przedmiotem badania są ich różne aspekty matematyczne jak i zastosowania praktyczne takie jak własności rozkładów, ich momenty, charakteryzacje oraz asymptotyczne zachowanie ([C1]-[C3] oraz [C5]-[C18]). Dominującym założeniem jest to, że obserwacje pochodzą z rozkładów dyskretnych. Utrudnia to analizę, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem obserwacje mogą przyjmować te same wartości. Ponadto w pracy [C4] stosujemy narzędzia statystyczne w dermatologii.

Pierwsza grupa artykułów, złożona z [C1], [C3], [C5], [C6], [C7], dotyczy pewnych zagadnień z teorii niezawodności systemów technicznych. W [C1], [C3] i [C5] zakładamy, że czasy życia komponentów, składających się na system, reprezentowane są za pomocą dowolnie zależnych zmiennych losowych o niekoniecznie jednakowym, dyskretnym rozkładzie. Z kolei w [C6] obowiązuje założenie, że są to zmienne losowe niezależne, o jednakowym rozkładzie. Natomiast w [C7] istnieje założenie o niezależności, ale dopuszczamy ponownie sytuację, gdy rozkłady mogą być różne.

W pracy [C1] rozpatrujemy ważone systemy k-spośród-n. Zakładamy, że system złożony z n komponentów podobnie jak one może występować tylko w dwóch stanach: kompletnej awarii lub perfekcyjnego funkcjonowania. Poszczególnym komponentom przypisujemy wagi $\omega_1, \dots, \omega_n$, będące dodatnimi liczbami całkowitymi. Można je interpretować jako pojemności odpowiednich komponentów. Powiemy, że taki ważony system k-spośród-n działa, o ile suma wag działających komponentów nie spadnie poniżej ustalonego poziomu k. W sytuacji, gdyby wszystkie wagi byłyby równe 1, to otrzymalibyśmy klasyczny system k-spośród-n, który funkcjonuje dopóki działa co najmniej k spośród jego n komponentów. Model ważonych systemów k-spośród-n znajduje zastosowanie np. przy modelowaniu systemów klimatyzacyjnych, chłodzących i grzewczych, zob. [29]. W pracy [C1] otrzymujemy wzór na funkcję masy prawdopodobieństwa całkowitej pojemności utraconej przez system w chwili jego awarii. Zakładamy przy tym, że czasy życia komponentów mogą być zależnymi zmiennymi losowymi o niejednakowych, dyskretnych rozkładach. Jest to rozszerzenie wyniku uzyskanego w [32] dla przypadku ciągłego. Następnie wynik ten wykorzystujemy do sformułowania problemu optymalizacji liczby zapasowych komponentów każdego typu. Warto zaznaczyć, że według wiedzy autorów [C1] do chwili napisania pracy tylko w [26] dopuszczono założenie dyskretności w kontekście systemów ważonych. Możliwym rozszerzeniem uzyskanych wyników jest rozważenie wersji wielo-stanowych systemów ważonych przy niezmiennym założeniu dyskretności rozkładów czasów życia komponentów.

W pracy [C5] badamy ogólną liczbę popsutych komponentów w systemie koherentnym rozpatrując dwa scenariusze przeglądów, którym poddawany jest taki system. Dopuszczamy sytuację gdy czasy życia komponentów mają rozkłady o niekoniecznie ciągłej dystrybuancie. W pierwszym scenariuszu dokonując przeglądu w chwili t patrzymy na liczbę popsutych komponentów pod warunkiem, że system wciąż działa, ale już co najmniej k jego elementów uległo awarii (zob. Twierdzenie 2.1). Scenariusz z $k = 0$ rozważono w pracy [A5]. W drugim scenariuszu system koherentny poddajemy dwóm przeglądom odpowiednio w chwilach t_1 i t_2 ($t_2 > t_1$). Badamy liczbę popsutych komponentów w chwili t_2, a więc podczas drugiego przeglądu, pod warunkiem, że system wciąż działa i w czasie pierwszego przeglądu w chwili t_1 stwierdzono awarię k komponentów (zob. Twierdzenie 2.4). Rozważane scenariusze są ważne z punktu widzenia praktycznego, bo pozwalają operatorom systemów w lepszym planowaniu działań i gospodarowaniu dostępnymi zasobami sprzętowymi. Uzyskane w [C5] wyniki teoretyczne ilustrujemy przykładami systemów, w których istnieje różna struktura zależności między komponentami, a których czasy życia pochodzą z różnych rozkładów. Rezultaty z pracy [C5] stanowią uogólnienie wyników uzyskanych wcześniej w [41]. Wykorzystujemy jednak w tym celu inne narzędzie, jakim jest reprezentacja czasu życia systemu za pomocą tzw. minimalnych ścieżek, zaproponowana w [4]. Wartym podkreślenia jest to, że z jednej strony rozpatrując oba scenariusze opuszczamy założenie o niezależności czasów przeżycia komponentów, a z drugiej strony dopuszczamy sytuację, że ich rozkłady są dyskretne o nośniku skończonym bądź też nie, który stanowi podzbiór zbioru liczb całkowitych nieujemnych.

W pracy [C3] rozpatrujemy tzw. systemy szeregowo-równoległe (ang. *series-parallel systems*). Systemy te zbudowane są z rozłącznych modułów połączonych szeregowo. Pojedynczy moduł tworzą natomiast komponenty połączone równolegle. Systemy te mają szerokie zastosowanie np. służą do modelowania systemu nawęglania (zob. [55]) lub systemu transportowania paliw rurociągami w porcie (zob. [52]). W [C3] podajemy jawny wzór opisujący funkcję masy prawdopodobieństwa ogólnej liczby popsutych komponentów w chwili awarii systemu szeregowo-równoległego (zob. Twierdzenie 1). Do jego otrzymania używamy reprezentacji czasu życia systemu koherentnego za pomocą minimalnych cięć. Otrzymane wyniki stanowią rozwiązanie otwartego problemu postawionego w pracy [15], gdzie zaproponowano porzucenie założenia o niezależności czasów życia komponentów. Dokładniej w [C3] rozpatrujemy systemy szeregowo-równoległe o czasach życia komponentów będących dowolnie zależnymi zmiennymi losowymi o niejednakowych, dyskretnych rozkładach. Z kolei przypadek systemów szeregowo-równoległych, gdzie niezależne czasy życia komponentów mają rozkłady o ciągłej dystrybuancie rozpatrzono w [30]. Podobny problem w kontekście klasycznych systemów k-spośród-n rozwiązano w pracy [8]. W [C3] podejmujemy też kwestię praktycznego wykorzystania otrzymanych wyników w przypadku, gdy nośniki rozkładów czasów życia komponentów są nieskończone. Proponujemy metodę przycinania prowadzącą do otrzymania przybliżonych wartości.

Praca [C6] stanowi rozszerzenie wyników uzyskanych w [39] oraz [65] na przypadek dyskretny. Precyzując, rozważamy systemy koherentne o n komponentach, których czasy życia są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym dyskretnym rozkładzie. Dla $k = 2, \ldots, n$, zakładamy, że nawet $k - 1$ awarii wśród komponentów nie powoduje defektu całego systemu. Dopiero każda kolejna niesprawność komponentu może spowodować popsucie całej struktury. Interesują nas własności żywotności takiego systemu po chwili t, gdy wiemy, że do tego momentu stwierdzono awarię określonej liczby komponentów, ale k-ta awaria wciąż nie nastąpiła, a więc system wciąż działa (zob. Twierdzenie 1 i jego rozszerzenie na dowolny system koherentny - zob. Twierdzenie 2). Z kolei Twierdzenie 3 dotyczy podobnego zagadnienia ale w szczególnej sytuacji, gdy czasy życia komponentów należą do rodziny rozkładów o rosnącej intensywności awarii (ang. *increasing failure rate*, IFR). Porównano też dwa systemy koherentne o opisanej wyżej żywotności, zbudowane z identycznych komponentów biorąc pod uwagę zwykły porządek stochastyczny oraz porządek hazardowy pomiędzy odpowiadającymi im sygnaturami Samaniego (zob. Twierdzenie 5).

W pracy [C7] badamy pewne warunkowe własności niezawodnościowe klasycznych systemów k-spośród-n. Zakładamy, że czasy życia komponentów reprezentowane są przez niezależne zmienne losowe o różnych, dyskretnych rozkładach. W przypadku, gdy ten rozkład jest taki sam, to odpowiednie wyniki można znaleźć w [12]. W [C7] podajemy wzory na prawdopodobieństwo, że system k-spośród-n ulegnie popsuciu dokładnie w chwili t_j pod warunkiem, że posiadamy częściową informację o liczbie i rodzaju popsutych komponentów oraz o czasie ich awarii oraz że ta wiedza pochodzi z przeglądu, który nastąpił w chwili t_i, $t_i < t_j$, zob. Twierdzenia 1 i 2.

Praca [C2] także nawiązuje swoją tematyką do teorii niezawodności systemów. Stanowi kontynuację rozważań podjętych w [A3] oraz [A6]. Celem tej serii prac była parametryczna estymacja metodą największej wiarygodności na podstawie czasów awarii komponentów systemu k-spośród-n z zastrzeżeniem, że dane te były rejestrowane jedynie do momentu awarii całego systemu. W [C2] rozważane są systemy k-spośród-n, których czasy życia komponentów to niezależne zmienne losowe ale o niejednakowych rozkładach geometrycznych. Powiemy zatem, że system taki składa się z komponentów różnego typu. Przypadek niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie geometrycznym został zbadany w [A3]. W [C2] wyznaczamy estymatory największej wiarygodności parametrów czasów życia komponentów poszczególnych typów, zob. Twierdzenie 3.1. Następnie przedyskutujemy ich istnienie. Proponujemy dwa podejścia w przypadku, gdyby taki estymator nie istniał. Uwzględniając te podejścia w Twierdzeniach 4.1 i 4.2 podajemy jawne wzory na wartość oczekiwaną i błąd średniokwadratowy otrzymanych estymatorów gdy analizowaną strukturą był system szeregowy. Ponadto w obu przypadkach estymatory są asymptotycznie nieobciążone. W przypadku, gdy nie są to systemy szeregowe, z powodu trudności analitycznych w otrzymaniu podobnych formuł, używamy metody Monte-Carlo do numerycznego wyznaczenia pewnych charakterystyk dla otrzymanych estymatorów.

W pracy [C9] badamy popularną własność Markowa dla statystyk porządkowych. W ogólności nie jest ona spełniona, gdy statystyki porządkowe pochodzą od zmiennych losowych o dyskretnym rozkładzie. Jednakże znane są w literaturze pewne koncepcje uogólnienia własności Markowa tak, aby pod pewnymi dodatkowymi warunkami zachodziła dla statystyk porządkowych pochodzących od niezależnych zmiennych losowych o tym samym dyskretnym rozkładzie. W Twierdzeniu 1 z [C9] uogólniamy jeden z takich wyników opisanych w pracy [68] poprzez rozpatrzenie statystyk porządkowych od zmiennych losowych niezależnych, ale o niejednakowych dyskretnych rozkładach.

Kolejna grupa prac, złożona z [C8], [C10], [C11], [C12], [C13] i [C14], poświęcona jest k-tym rekordom pochodzącym z rozkładów dyskretnych. Od 2005 roku i pracy [16] wiadomo, że funkcjonujące w literaturze definicje k-tych rekordów, uznawane do tej pory za równoważne, w rzeczywistości w przypadku dyskretnym równoważne *nie* są. Aby uporządkować terminologię wprowadzono różne nazwy dla k-tych rekordów generowanych przez trzy nierównoważne definicje: mocne k-te rekordy, k-te rekordy, słabe k-te rekordy.

W artykułach [C10] i [C12] podejmujemy problem granicznego zachowania się słabych k-tych rekordów i k-tych rekordów, gdzie $k \geqslant 1$. Opisujemy zbieżność według prawdopodobieństwa (patrz Wnioski 1, 2 w [C10] oraz Wnioski 1, 2 w [C12]) oraz zbieżność prawie wszędzie (patrz Twierdzenie 2 w [C10] oraz Twierdzenie 3 w [C12]) ilorazu niekoniecznie sąsiednich odpowiednio słabych k-tych rekordów i k-tych rekordów. Wyniki te stanowią uogólnienie własności, które znane są w literaturze dla zwykłych słabych rekordów i zwykłych rekordów tj. dla $k = 1$, zob. odpowiednio [72] oraz [18]. Pokazujemy, że graniczne zachowanie się takiego ilorazu zależy od granicznego zachowania się dystrybuanty F wyjściowego rozkładu, a ściślej mówiąc od tego, czy jest funkcją wolno, regularnie czy szybko zmieniającą się.

W pracy [C8] zbadano graniczne zachowanie się spacji, czyli różnic niekoniecznie sąsiednich słabych k-tych rekordów i k-tych rekordów. Wyniki otrzymane dla k-tych rekordów nie były znane wcześniej w literaturze. Z kolei rezultaty dotyczące słabych k-tych rekordów są uogólnieniem tych uzyskanych w [45], a które dotyczyły tylko zwykłych słabych rekordów, tj. dla $k = 1$. W [C8] pokazano, że w obu badanych przypadkach spacje nie zbiegają do 0 z prawdopodobieństwem jeden dla dowolnego wyboru dystrybuanty F dyskretnego wyjściowego rozkładu, której prawy koniec nośnika jest nieskończony (zob. Twierdzenia 1 i 3). Dokładając pewne dodatkowe założenie o asymptotycznym zachowaniu się dystrybuanty F udowodniono również, że spacje te nie zbiegają do nieskończoności z prawdopodobieństwem jeden (zob. Twierdzenia 2 i 4).

W pracy [C13] wykorzystujemy wyniki uzyskane w [14] do wyprowadzenia rekurencyjnych wzorów opisujących wartość oczekiwaną iloczynu oraz kowariancję dowolnych słabych k-tych rekordów, k-tych rekordów oraz mocnych k-tych rekordów (zob. Twierdzenia 1 i 3). Uzyskujemy ich uproszczenie w przypadku obserwacji o rozkładzie geometrycznym (zob. Twierdzenia 2, 4 i 5).

W pracy [C11] pokazujemy, że rozkład geometryczny jest jedynym rozkładem dyskretnym, dla którego regresja dowolnego słabego k-tego rekordu względem zerowego słabego k-tego rekordu jest funkcją liniową warunku ze współczynnikiem kierunkowym równym jeden (zob. Twierdzenie 1). Ponadto otrzymujemy charakteryzację rozkładu geometrycznego, dla której nie jest potrzebna pełna niezależność pomiędzy zerowym słabym k-tym rekordem a różnicą dowolnego i zerowego słabego k-tego rekordu (zob. Twierdzenia 2 i 3). W pracy [C14] podobne wyniki uzyskujemy dla k-tych rekordów (zob. Twierdzenia 2.3, 3.1 i 3.3). Prace [C11] i [C14] stanowią kontynuację rozważań z artykułów [1], [7], [9], [17], [49].

Prace [C15] i [C17] stanowią kolejną grupę bliskich tematycznie artykułów. Podejmują problem analizy zachowania liczby obserwacji znajdujących się w otoczeniu pewnej statystyki porządkowej. Ten problem został zapoczątkowany w pracy [63], gdzie rozważano otoczenie największej statystyki porządkowej czyli otoczenie maksimum z próby. Od tego momentu tematyka ta sukcesywnie rozwijała się w literaturze. Liczby obserwacji w otoczeniu statystyki porządkowej pojawiają się w różnych problemach praktycznych. Na przykład znajdują zastosowanie w matematyce ubezpieczeniowej, zob. [13], [42], [56]. Wykorzystywane są też do konstrukcji estymatorów różnych wielkości opisujących dystrybunatę F rozkładu, z którego pochodzą obserwacje, zob. [42], [43], [44] oraz [48].

W pracy [C15] badamy zbieżność prawie wszędzie dla proporcji liczby obserwacji w otoczeniu centralnej statystyki porządkowej, tzn. k_n-tej statystyki porządkowej, gdzie k_n jest ciągiem dodatnich liczb takim, że k_n/n zbiega do pewnej liczby λ z przedziału $(0, 1)$. Większość prezentowanych w literaturze wyników dotyczy sytuacji, gdy obserwacje wchodzące w skład próbki są niezależne o tym samym rozkładzie. Wśród wyjątków są prace [3], [10], [42], [44], w których podjęto próbę odejścia od założenia niezależności obserwacji. W pracy [C15] także odrzucamy te restrykcyjne założenie na rzecz bardziej realistycznego, że obserwacje tworzą ciąg ściśle stacjonarny i ergodyczny (zob. Twierdzenie 2.1). Ponadto rezygnujemy z złożenia, że kwantyl rzędu λ dystrybuanty F rozkładu, z którego pochodzą obserwacje, jest wyznaczony jednoznacznie (zob. Twierdzenia 3.1 i 3.2).

W pracy [C17] pokazujemy, że właściwie wystandaryzowana proporcja liczby obserwacji w otoczeniu statystyki porządkowej: centralnej (odpowiada sytuacji, gdy $k_n/n \to \lambda \in (0, 1)$), skrajnej (gdzie k_n albo $n - k_n$ nie zależą od n) oraz asymptotycznie skrajnej (gdzie $k_n/n \to \lambda \in \{0, 1\}$, $k_n \to \infty$ oraz $n - k_n \to \infty$) ma rozkład normalny (zob. Twierdzenie 1). Zakładamy, że obserwacje tworzą ciąg ściśle stacjonarny i spełniony jest dla nich warunek α–mieszania oraz że dystrybuanta F jest nieciągła. Nieciągłość rozumiemy tu w ten sposób, że odpowiedni kwantyl rzędu λ dystrybuanty F nie jest punktem skupienia jej nośnika. Uzyskane wyniki stanowią uogólnienie rezultatów z pracy [11].

Prace [C16] i [C18] są w tym samym nurcie badań, w którym znalazły się wszystkie pozycje ujęte w doktoracie. Ich wspólnym mianownikiem jest poszukiwanie górnych optymalnych oszacowań dla ważnego z punktu widzenia praktyki parametru jakim jest wariancja odpowiednio statystyk porządkowych w modelu losowania ze zwracaniem i bez zwracania oraz k-tych rekordów z populacji ciągłych. Uzyskane oszacowania są wyrażone w jednostkach wariancji pojedynczej zmiennej losowej. Wraz z warunkami osiągalności możemy je znaleźć w Twierdzeniu 1 dla modelu ze zwracaniem i w Twierdzeniu 2 dla modelu bez zwracania w pracy [C18]. Z kolei w Twierdzeniu 2.1 z pracy [C16] znajdziemy oszacowania dla wariancji k-tych rekordów. W [C16] na uwagę zasługuje również Propozycja 2.1, która mówi o tym, że jeśli dla skończonej liniowej kombinacji pewnych funkcji prawdziwa jest znana w literaturze własność zmniejszania zmienności (ang. *variation diminishing property*, VDP), to można ją rozszerzyć na przypadek, gdy ta kombinacja jest nieskończona. W szczególności propozycję tę w [C16] stosuje się do skończonej liniowej kombinacji funkcji potęgowych, dla której prawdziwa jest własność VDP (zob. [50]).

Wyniki przedstawione w pracy [C4] dotyczą analizy danych w dermatologii. Analizujemy jak obecność melasmy (ostudy) na twarzy modelki wpływa na postrzeganie jej przez inne osoby. Badamy jak zmienia się jej ocena społeczna oraz atrakcyjność. Zwracamy przy tym uwagę na położenie anatomiczne tych zmian skórnych na twarzy. Ponadto przedmiotem zainteresowania jest ocena tatuaży na twarzy pod względem ich atrakcyjności wizualnej dla innych osób. Postrzeganie osób z melasmą lub tatuażem badamy zarówno poprzez analizę fiksacji gałki ocznej oglądającego zdjęcie jak i wypełniany przez niego kwestionariusz dotyczący wybranych cech osobowościowych modelki ze zdjęcia ocenianych w pięciostopniowej skali Likerta. Moje obowiązki polegały na restrukturyzacji i agregacji danych. Następnym zadaniem było dobranie i przeprowadzenie odpowiednich analiz statystycznych. W badaniach wykorzystano dwuczynnikową analizę wariancji (ANOVA) z powtarzanymi pomiarami wraz z testami post hoc. Wśród wybranych dwóch czynników były rodzaj zmiany i jej położenie na twarzy a zmienną zależną liczba fiksacji gałki ocznej. Innym razem czynnikami były położenie zmiany oraz wybrane cechy osobowościowe a zmienną zależną wynik punktowy z kwestionariusza. Analiza została wykonana z wykorzystaniem oprogramowania IBM SPSS Statistics (v28) oraz środowiska R (v4.2.2).

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

1. Tygodniowa wizyta naukowa 15.11–19.11.2021, na zaproszenie dr. hab. inż. Wojciecha Domitrza, prof. PW, Dziekana Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. W czasie tej wizyty współpracowałem z dr hab. Anną Dembińską, prof. PW. (Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska). W wyniku tej współpracy powstał zarys artykułu [A3] i pomysł na kolejny artykuł [C2].

2. Współpraca z prof. dr. hab. Tomaszem Rychlikiem (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk), pięć wspólnych publikacji naukowych: [C18], [B1], [B2], [B3], [B4].

3. Współpraca z dr. hab. Agnieszką Goroncy, prof. UMK (Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu), dwie wspólne publikacje naukowe: [C1], [A1].

4. Współpraca z dr. Markiem Jankowskim (Wydział Lekarski w Collegium Medicum w Bydgoszczy, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu) oraz dr. hab. Agnieszką Goroncy, prof. UMK (Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu) w ramach analizy danych statystycznych w dermatologii, jedna wspólna publikacja naukowa: [C4].

5. Udział w spotkaniach międzynarodowej grupy badawczej *Ordered Statistical Data Meeting* w Matematycznym Centrum Konferencyjnym IMPAN w Będlewie koło Poznania, 28.05–02.06.2017 r. oraz 12.05–17.05.2019 r. Wynikiem tych spotkań i nawiązanej w ich ramach współpracy z dr hab. Anną Dembińską, prof. PW (Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska), są dwie wspólne publikacje naukowe: [A6], [C15].

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

6.1 Działalność dydaktyczna

- Prowadzący seminaria inżynierskie dla 17 studentów 3 roku matematyki stosowanej (od semestru letniego 2023 r.). Promotor 1 pracy inżynierskiej w 2024 r. oraz 7 prac inżynierskich w 2025 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

- Prowadzący zajęcia dydaktyczne na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, m.in. ze statystyki opisowej, statystyki matematycznej, eksploracji danych, rachunku prawdopodobieństwa, analizy matematycznej, ze wstępu do statystycznej analizy danych, z wprowadzenia do R w formie ćwiczeń i zajęć laboratoryjnych, dla studentów studiów stacjonarnych z informatyki, matematyki, matematyki i ekonomii, matematyki stosowanej. Niektóre zajęcia były realizowane częściowo zdalnie, z wykorzystaniem nowoczesnych metod nauczania, m.in. platformy obsługi nauki Moodle oraz MS Teams. Narzędzia wykorzystywane do pracy w laboratoriach komputerowych: środowisko R, KNIME, Python, Microsoft Excel 2019 oraz oprogramowanie PS IMAGO (IBM SPSS Statistics) na zajęciach akredytowanych przez firmę Predictive Solutions Sp. z o.o. (certyfikaty akredytacji nr AKR002/W4/09_2012, AKR002/W5/09_2013, AKR002/W7/09_2015, AKR002/W9/09_2017, AKR002/W13/09_2021,AKR002/W14/09_2022, AKR002/W15/09_2023, AKR002/W16/09_2024).

- Przygotowanie programu szkolenia i scenariuszy zajęć "W kółko o matematyce" oraz prowadzenie tychże zajęć w ramach projektu "Lubimy ścisłe! – opracowanie programów kształcenia i realizacja innowacyjnych pozaszkolnych zajęć edukacyjnych z matematyki i informatyki dla dzieci i młodzieży w wieku od 6 do 16 lat na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu" realizowanego w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój (projekt nr POWR.03.01.00-00-U157/17), 2019 r.–2021 r.

- Prowadzący "Zajęcia wyrównawcze – prawdopodobieństwo" w ramach projektu pn. "IKS – Inwestycja w Kierunki Strategiczne na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK" realizowanego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, 2013 r.–2014 r.

- Prowadzący zajęcia dydaktyczne na Wydziale Nauk o Ziemi Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu z podstaw statystyki w formie ćwiczeń dla studentów kierunku turystyka i rekreacja, 2011 r.–2012 r.

6.2 Działalność organizacyjna

- Członek komisji do przeprowadzenia rozmów kwalifikacyjnych na studia II stopnia na kierunku analiza danych na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, luty 2024 r.

- Udział w pracach nad powstaniem bloku kompetencyjnego *Statystyczna analiza danych* obejmującego przedmioty: *Data mining dla niezaawansowanych, Statystyka opisowa, Wprowadzenie do R, Podstawy statystycznej analizy danych*, przewidzianego dla wszystkich studentów UMK w Toruniu, jesień 2023 r. Blok wystartował w semestrze letnim roku akademickiego 2024/2025. Koordynator i prowadzący przedmiot ogólnouniwersytecki *Wprowadzenie do R* oraz koordynator przedmiotu ogólnouniwersyteckiego *Statystyka opisowa.*

- Członek Komitetu Organizacyjnego *XLIV Konferencji Statystyka Matematyczna*, 3 − 7 grudnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.

- Udział w pracach nad tworzeniem nowego kierunku studiów: matematyka stosowana na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK, 2016 r.

- Opieka naukowa nad Indywidualnym Programem Studiów dla studentki Zuzanny Kwiatkowskiej, studentki II roku studiów I stopnia na kierunku matematyka i ekonomia na Wydziale Matematyki i Informatyki, UMK w Toruniu, w roku akademickim 2016/2017.

- Członek Komitetu Organizacyjnego *11th International Conference on Ordered Statistical Data (OSD* 2014*)*, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie, 2 − 6 czerwca 2014 r.

6.3 Działalność popularyzująca naukę

- Udział w Dniu Otwartym Kierunków Ścisłych, Przyrodniczych i Technicznych na UMK w Toruniu. Przeprowadzenie zajęć pt. „Czy kawa łagodzi obyczaje? Regresja liniowa w praktyce” dla uczniów szkół średnich z Torunia i okolic na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu: grudzień 2023 r.

- Udział w seminarium naukowym na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu dla studentów z uczelni zagranicznych odbywających czterotygodniowy staż naukowy w ramach programu ”Toruń Students Summer Program in Exact Sciences” oraz wygłoszenie w jego ramach wykładu ”Introduction to Reliability Theory”: lipiec 2023 r.

- Wykład ”Kłamstwo a statystyka” w ramach obchodów ”Dzień liczby Π” na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu: marzec 2016 r.

- Wykład popularyzujący naukę pt. ”Prawdopodobieństwo geometryczne” wygłoszony w:
  - Liceum Ogólnokształcące im. Władysława Jagiełły w Płocku: styczeń 2014 r.
  - V Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II w Toruniu: marzec 2014 r.
  - Liceum Ogólnokształcące SOP im. Ks. Poety Jana Twardowskiego w Płocku: marzec 2014 r.
- Wykład pt. ”Wzory Viete'a dla wielomianów” w ramach Regionalnego Koła Matematycznego w I Liceum Ogólnokształcącym w Świeciu: marzec 2010 r.

7 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i inna działalność

7.1 Granty i projekty badawcze

1. Projekt badawczy *Applications of Probability in Reliability Theory* zrealizowany w ramach ”Inicjatywy Doskonałości–Uczelnia Badawcza”, program Toruń Students Summer Program in Exact Sciences (TSSP ExSci) na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, zastępca kierownika, 24.06–21.07.2024 r. W projekcie uczestniczyły studentki: Marta Rudzate z Wydział Nauki i Technologii Uniwersytetu Łotewskiego w Rydze i Faustyna Korejwo z Wydziału Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu. Kierownikiem projektu była dr hab. Agnieszka Goroncy, prof. UMK. Rezultatem tego projektu jest publikacja [C1].
2. Grant Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, nr 1218–M pt. *Asymptotyka liczby obserwacji w otoczeniu statystyk pozycyjnych* - główny wykonawca, październik 2018 r. – luty 2019 r.
3. Grant Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, nr 2515–M pt. *Oszacowania miar położenia i rozproszenia uporządkowanych rozkładów – M. Zastosowania do statystyki bayesowskiej i ubezpieczeniowej* - główny wykonawca, kwiecień 2016 r. – grudzień 2016 r.
4. Grant Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, nr 1776–M pt. *Oszacowania wariancji statystyk pozycyjnych i czasu pracy systemów niezawodnościowych* - główny wykonawca, maj 2014 r. – grudzień 2014 r.
5. Grant Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, nr 192–M pt. *Oszacowania wariancji statystyk pozycyjnych i czasu pracy systemów niezawodnościowych* - główny wykonawca, grudzień 2011 r. – grudzień 2012 r.

6. Stypendysta projektu "Stypendia dla doktorantów 2008/2009 – ZPORR" współfinansowanego przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego oraz Budżetu Państwa w ramach Zintegrowanego Programu Operacyjnego Rozwoju Regionalnego, 2008 r. – 2009 r.

7.2 Nagrody i wyróżnienia

- Medal Brązowy za Długoletnią Służbę przyznany przez Prezydenta Rzeczypospolitej Polskiej w 2024 roku.
- Indywidualne wyróżnienie rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia uzyskane w dziedzinie naukowej w 2021 roku.
- Indywidualne wyróżnienie rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia uzyskane w dziedzinie naukowo – badawczej w 2016 roku.
- Laureat konkursu na najlepsze dydaktyczne materiały autorskie w ramach projektu "Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno – przyrodniczych" - przygotowano wykład i ćwiczenia w języku polskim i angielskim do przedmiotu *Statystyki porządkowe* - termin realizacji: maj 2015 r. – wrzesień 2015 r.
- Laureat konkursu na najlepsze dydaktyczne materiały autorskie w ramach projektu "Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno – przyrodniczych" - przygotowano wykład i ćwiczenia w języku polskim i angielskim do przedmiotu *Teoria niezawodności* - termin realizacji: styczeń 2015 r. – lipiec 2015 r.
- Zajęcie I miejsca w konkursie "Najlepszy Ćwiczeniowiec w roku akademickim 2012/2013" na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu.

7.3 Inna działalność

- Artykuły na zaproszenie opublikowane w specjalnym tomie "Computational Methods in System Reliability" (SI-CMSR) czasopisma *Journal of Computational and Applied Mathematics*, wydawanaego przez Elsevier. Publikacje: [A2] oraz [A3].
- Poza referatami przedstawionymi na konferencjach, umieszczonymi w *Wykazie osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny*, wygłosiłem również 13 referatów na seminariach Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu (w latach 2011 – 2025), 5 referatów na seminarium *Statystyka matematyczna i inne zastosowania probabilistyczne*, IM PAN w Warszawie (w 2015 r., 2017 r., 2018 r., 2021 r., 2022 r. i 2023 r.), 1 referatu na *Seminarium Probabilistycznym* Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (w 2019 r.).

- Byłem recenzentem 10 prac magisterskich, 9 inżynierskich z matematyki stosowanej oraz 7 licencjackich z matematyki.
- Kursy i szkolenia
  - Udział w webinariach "Po pierwsze jakość danych! – zobacz, jak przygotować dane do analizy" oraz "Porządkowanie zmienności – analiza wariancji" organizowanych przez firmę Predictive Solutions /// Know-How, listopad 2022 r, marzec 2024 r.
  - Ukończone czterosemestralne Studium Pedagogiczne na UMK w Toruniu - uzyskane kwalifikacje pedagogiczne, 2007 r.

Literatura

[1] Ahsanullah, M., Aliev, F. (2011), A characterization of geometric distribution based on weak records. *Stat. Probab. Lett.* 52, 651–655.

[2] Asadi, M., Berred, A. (2012), On the number of failed components in a coherent operating system. *Statist. Probab. Lett.* 82, 2156–2163.

[3] Balakrishnan, N., Hashorva, E., Hüsler, J. (2009), Near-extremes and related point processes. *Albanian J. Math.* 3, 63–74.

[4] Barlow, R.E., Proschan, F. (1975), Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. Holt, Rinehart and Winston, New York.

[5] Bhattacharyya, G.K. (1985), The asymptotics of maximum likelihood and related estimators based on Type II censored data. *J. Amer. Statist. Assoc.* 80, 398–404.

[6] Chien, Y.H. (2008), A general age-replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty. *Eur. J. Oper. Res.* 186, 1046–1058.

[7] Danielak, K., Dembińska, A. (2007), Some characterizations of discrete distributions based on weak records. *Statist. Papers* 48, 479–489.

[8] Davies, K., Dembińska, A. (2019), On the number of failed components in a k-out-of-n system upon system failure when the lifetimes are discretely distributed. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 188, 47–61.

[9] Dembińska, A. (2008), kth records from geometric distribution. *Stat. Probab. Lett.* 78, 1662–1670.

[10] Dembińska, A. (2012), Limit theorems for proportions of observations falling into random regions determined by order statistics. *Aust. N. Z. J. Stat.* 54, 199–210.

[11] Dembińska, A. (2014), Asymptotic normality of numbers of observations in random regions determined by order statistics. *Statistics* 48, 508–523.

[12] Dembińska, A. (2018), On reliability analysis of k-out-of-n systems consisting of heterogeneous components with discrete lifetimes. *IEEE Trans. Rel.* 67, 1071–1083.

[13] Dembińska, A., Buraczyńska, A. (2019), The long-term behavior of number near-maximum insurance claims. *Insurance Math. Econom.* 88, 226–237.

[14] Dembińska, A., Danielak, K. (2008), On moments of k-Records from Discrete Distributions. *Comm. Statist.–Theory Meth.* 37, 2516–2531.

[15] Dembińska, A., Eryilmaz, S. (2021), Discrete time series–parallel system and its optimal configuration. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 215, 107832.

[16] Dembińska, A., López-Blázquez, F. (2005a), kth records from discrete distributions. *Stat. Probab. Lett.* 71, 203–214.

[17] Dembińska, A., López-Blázquez, F. (2005b), A characterization of geometric distribution through kth weak records. *Comm. Statist.–Theory Meth.* 34, 2345–2351.

[18] Dembińska, A., Stepanov, A. (2006), Limit theorems for the ratio of weak records. *Stat. Probab. Lett.* 76, 1454–1464.

[19] Eryilmaz, S. (2010), Number of working components in consecutive k-out-of-n system while it is working. *Commun. Stat. Simul. Comput.* 39, 683—692.

[20] Eryilmaz, S. (2012), The number of failed components in a coherent system with exchangeable components. *IEEE Trans. Reliab.* 61, 203–207.

[21] Eryilmaz, S. (2014), Lifetime of multi-state k-out-f-n systems *Qual. Reliab. Eng. Int.* 30, 1015–1022.

[22] Eryilmaz, S. (2015), On the mean number of remaining components in three-state k-out-of-n system. *Oper. Res. Lett.* 43, 616–621.

[23] Eryilmaz, S. (2018), The number of failed components in a k-out-of-n system consisting of multiple types of components. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 175, 246–250.

[24] Eryilmaz, S. (2020), Age-based preventive maintenance for coherent systems with applications to consecutive k-out-of-n and related systems. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 204, 107143.

[25] Eryilmaz, S. (2022), Discrete stochastic models and applications for realiability engineering and statistical quality control. CRC Press, London.

[26] Eryilmaz, S. (2024), Reliability and performance evaluation of weighted k-out-of-n:G system consisting of components with discrete lifetimes. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 252, 110484.

[27] Eryilmaz, S., Bozbulut, A.R. (2014), An algorithm approach for the dynamic reliability analysis of non-repairable multi-state weighted k-out-of-n system. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 131, 61–65.

[28] Eryilmaz, S., Bozbulut, A.R. (2019), Reliability analysis of weighted-k-out-of-n system consisting of three-state components. *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. O J. Risk Reliab.* 233, 972–977.

[29] Eryilmaz, S., Kan, C. (2020), Reliability based on modeling and analysis for a wind power system integrated by two wind farms considering wind speed dependence. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 203, 107077.

[30] Eryilmaz, S., Özkurt, F.Y., Erkan, E.T. (2020), The number of failed components in series-parallel system and its application to optimal design. *Comp. Ind. Eng.* 150, 106879.

[31] Eryilmaz, S., Pekalp, H.M. (2020), On optimal age replacement policy for a class of coherent systems. *J. Comput. Appl. Math.* 377, 112888.

[32] Eryilmaz, S., Ucum, K.A. (2021), The lost capacity by the weighted k-out-of-n system upon system failure. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 216, 107914.

[33] Eryilmaz, S., Tank, F. (2023), Optimal age replacement policy for discrete time parallel systems. *Metrika* 31, 475–490.

[34] Erylimaz, S., Xie, M. (2014), Dynamic modeling of general three-state k-out-of-n:G systems: Permanent based computational results. *J. Comput. Appl. Math.* 272, 97–106.

[35] Faghih-Roohi, S., Xie, M., Ng, K.M., Yam, R.C.M. (2014), Dynamic availability assessment and optimal component design of multi-state weighted k-out-of-n systems. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 123, 57–62.

[36] Finkelstein, M., Gertsbakh, I. (2015), 'Time free' preventive maintenance of systems with structures described by signatures. *Appl. Stoch. Models. Bus. Ind.* 31, 836–845.

[37] Fu, J.C., Koutras, M.V. (1994), Distribution theory of runs: a Markov chain approach. *J. Am. Stat. Assoc.* 89, 1050–1058.

[38] Gan, G., Bain, L.J. (1995), Distribution of order statistics for discrete parents with applications to censored sampling. *J. Statist. Plann. Inference* 44, 37-46.

[39] Goliforushani, S., Asadi, M., Balakrishnan, N. (2012), On the residual and inactivity times of the components of used coherent systems. *J. Appl. Probab.* 49, 385–404.

[40] Halperin, M. (1952), Maximum Likelihood Estimation in Truncated Samples. *Ann. Math. Stat.* 23, 226–238.

[41] Hashemi, M., Asadi, M. (2020), On component failure systems with applications to maintenance strategies. *Adv. Appl. Prob.* 52, 1197–1223.

[42] Hashorva, E. (2003), On the number of near-maximum insurance claim under dependence. *Insurance Math. Econom.* 32, 37–49.

[43] Hashorva, E. (2004), Bivariate maximum insurence claim and related point processes. *Stat. Probab. Lett.* 69, 117–128.

[44] Hashorva, E., Hüsler, J. (2004), Estimation of tails and related quantities using the number of near-extremes. *Comm. Statist.–Theory Meth.* 34, 337–349.

[45] Hashorva, E., Stepanov, A. (2012), Limit theorems for the spacings of weak records. *Metrika* 75, 163–180.

[46] Hermanns, M., Cramer, E. (2018), Inference with progressively censored k-out-of-n system lifetime data. *TEST* 27, 787–810.

[47] Huang, J., Zuo, M.J., Wu, Y. (2000), Generalized multi-state k-out-of-n:G systems. *IEEE Trans. Reliab.* 49, 105–111.

[48] Iliopoulos, G., Dembińska, A., Balakrishnan, A. (2012), Asymptotic properties of numbers of observations near sample quantiles. *Statistics* 46, 85–97.

[49] Karczewski, R., Wesołowski, J. (2017), Linearity of Regression for weak records, revisited. *Statistics* 51, 878–887.

[50] Karlin, S., Studden, W.J. (1966), Tchebyshev Systems: With Apllications in Analysis and Statistics. Wiley-Interscience, New York.

[51] Khorshidi, H.A., Indra, G., Yousef, I. (2016), A dynamic unreliability assessment and optimal maintenance strategies for multistate weighted k-out-of-n:f systems. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* 32, 485–493.

[52] Kołowrocki, K. (2003), Asymptotic approacch to reliability evaluation of large multistate systems with appliccation to piping transportation. *Int. J. Press. Ves. Pip.* 80, 59–73.

[53] Kong, F., Fei H. (1996), Limit theorems for the maximum likelihood estimate under general multiply Type II censoring. *Ann. Inst. Statist. Math.* 48, 731–755.

[54] Koutras, M.V. (1996), On a Markov chain approach for the study of reliability structures. *J. Appl. Probab.* 33, 357–367.

[55] Levitin, G., Amari, S.V. (2009), Optimal load distribution in series-parallel systems. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 94, 254–260.

[56] Li, Y., Pakes, A. (2001), On the number of near-maximum insurance claims. *Insurance Math. Econom.* 28, 309–323.

[57] Lin, C.T., Balakrishnan, N. (2011), Asymptotic properties of maximum likelihood estimators based on progressive Type-II censoring. *Metrika* 74, 349–360.

[58] Morris, R. (1979), The dilogarithm function of a real argument. *Math. Comp.* 33, 778–787.

[59] Nakagawa, T., Osaki, S. (1977), Discrete time age replacement policies. *Oper. Res. Quar.* 28, 881–885.

[60] Nakagawa, T. (1984), A summary of discrete replacement policies. *Eur. J. Oper. Res.* 17, 382–392.

[61] Navarro, J., Ng, H.K.T., Balakrishnan, N. (2012), Parametric inference for component distributions from lifetimes of systems with dependent components. *Naval. Res. Logist.* 59, 487–496.

[62] Ng, H.K.T., Navarro, J., Balakrishnan, N. (2012), Parametric inference from system lifetime data with signatures available under a proportional hazard rate model. *Metrika* 75, 367–388.

[63] Pakes, A., Steutel, F.W. (1997), On the number of records near the maximum. *Austral. J. Statist.* 39, 179–193.

[64] Papastavridis, S. (1989), The number of failed components in a consecutive k-out-of-n:F system. *IEEE Trans. Reliab.* 38, 338–340.

[65] Parvardeh, A., Balakrishnan, N. (2013), Conditional residual lifetimes of coherent systems. *Stat. Probab. Lett.* 83, 2664–2672.

[66] Pólya, G., Szegö, G. (1998), Problems and Theorems in Analysis. Springer-Verlag, Berlin.

[67] Ross, S.M., Shahshahani, M., Weiss, G. (1980), On the number of component failures in systems whose component lives are exchangeable. *Math. Oper. Res.* 5, 358–365.

[68] Rűschendorf, L. (1985), Two remarks on order statistics. *J. Statist. Plann. Inference* 11, 71–74.

[69] Samaniego, F.J. (1985), On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Trans. Reliab.* 34, 69–72.

[70] Samaniego, F.J. (2007), System Signatures an their Applications in Engineering Reliability. International Series in Operations Research and Management Science, vol. 110, Springer, New York.

[71] Schoenberg, I.J. (1959), On variation diminishing approximation methods. In: Langer RE (ed) On Numerical Approximation, Univeristy of Wisconsin Press, Madison Press, Madison.

[72] Shorrock, R.W. (1972), On record values and record times. *J. Appl. Probab.* 9, 316–326.

[73] Tian, Z., Zuo, M.J., Yam, R.C.M. (2009), Multi-state k-out-of-n systems and their performance evaluation. *IIE Trans.* 41, 32–44.

[74] Van der Vaart, A.W. (2007), Asymptotic Statistics. Cambridge University Press, Amsterdam.

[75] Yu, X., Hu, L., Ma, M. (2023), Reliability measures of discrete time k-out-of-n:G retrial systems based on Bernoulli shocks. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 239, 109491.

[76] Zagier, D. (2007), The dilogarithm function, in: P.E. Cartier et al. (Eds.), Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II: On Conformed Field Theories, Discrete Groups and Renormalization, Springer-Verlag, Berlin, p. 3–65.

[77] Zhao, X., Mizutani, S., Nakagawa, T. (2015), When is better for replacement policies with continuous or discrete scheduled times? *Eur. J. Oper. Res.* 242, 477–486.