

Autoreferat

Anna Gołębiewska

Spis treści

1	Dane osobowe	2
2	Posiadane dyplomy i stopnie naukowe	2
3	Zatrudnienie w jednostkach naukowych	2
4	Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego	2
4.1	Wprowadzenie	3
4.2	Indeks orbity	7
4.3	Spójne zbiory rozwiązań układów eliptycznych	18
4.4	Podsumowanie	34
4.5	Informacja o wkładzie autorów publikacji (A1)-(A6)	35
5	Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych	37
5.1	Rezultaty dotyczące rozwoju teorii stopnia gradientowych odwzorowań współ- zmienniczych	38
5.2	Rezultaty dotyczące rozwiązań okresowych układów newtonowskich i ha- miltonowskich	39
5.3	Rezultaty dotyczące układów eliptycznych	43
6	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej	44
7	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popu- laryzujących naukę	45

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Anna Gołębiewska
Adres służbowy: Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
E-mail: aniar@mat.umk.pl

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 2009 **Doktor nauk matematycznych**
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
rozprawa: „Orbity krytyczne niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych”
promotor: prof. dr hab. Sławomir Rybicki,
- 2003 **Magister matematyki**
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
praca magisterska: „Rozwiązania okresowe asymptotycznie liniowych układów hamiltonowskich z rezonansem w nieskonczonosci”
promotor: prof. dr hab. Sławomir Rybicki

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

- od 2010 Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu,
stanowisko: Adiunkt
- 2003 - 2010 Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu,
stanowisko: Asystent

4 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, wskazuję cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

**Globalne bifurkacje z orbit krytycznych funkcjonałów niezmienniczych
z zastosowaniem do eliptycznych równań różniczkowych**

Lista artykułów składających się na osiągnięcie naukowe:

- (A1) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir, *Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, vol. 6, nr 4, 2013, s. 985–997.

- (A2) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, *Connected sets of solutions for a nonlinear Neumann problem*, Differential and Integral Equations, vol. 30, nr 11-12, 2017, s. 833–852.
- (A3) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, *Bifurcations from the orbit of solutions of the Neumann problem*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, vol. 57, nr 1, 2018, s. 1–23.
- (A4) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, *Global bifurcation from an orbit of solutions to non-cooperative semi-linear Neumann problem*, Journal of Differential Equations, vol. 268, nr 11, 2020, s. 6702–6728.
- (A5) Gołębiewska Anna, Stefaniak Piotr, *Structure of sets of solutions of parametrised semi-linear elliptic systems on spheres*, Nonlinear Analysis - Theory Methods & Applications, vol. 212, 2021, s. 1–20.
- (A6) Gołębiewska Anna, Kluczenko Joanna, Stefaniak Piotr, *Bifurcations from degenerate orbits of solutions of nonlinear elliptic systems*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, vol. 25, nr 1, 2023, s. 1–22.

Tematyka prac składających się na powyższy cykl dotyczy własności zbiorów punktów krytycznych funkcjonałów niezmienniczych. Zaprezentowane rezultaty są wynikiem badań prowadzonych w następujących dwóch kierunkach:

1. rozwoju metod topologii niezmienniczej stosowanych do badania zbioru punktów krytycznych funkcjonału, ze szczególnym uwzględnieniem stopnia gradientowych odwzorowań współzmienniczych oraz niezmienniczego indeksu Conleya,
2. zastosowania rezultatów otrzymanych przy pomocy powyższych metod do opisu własności zbiorów rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych. W szczególności interesuje nas problem istnienia spójnych oraz nieograniczonych podzbiorów takich zbiorów. W przedstawionym cyklu koncentrujemy się na pokazaniu zastosowania omawianych metod do układów równań eliptycznych. Podkreślamy jednak, że metodami takimi badaliśmy również równania hamiltonowskie i newtonowskie.

4.1 Wprowadzenie

Jako punkt wyjścia do omówienia zagadnień rozważanych w cyklu prac (A1)-(A6) można przyjąć badanie zbioru słabych rozwiązań następującego układu równań eliptycznych:

$$\begin{cases} A\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda) & \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

przy założeniu, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest otwartym, ograniczonym zbiorem z brzegiem klasy C^∞ , $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$, $a_i \in \{-1, 1\}$. Stosujemy przy tym następujące oznaczenia: Δu dla funkcji $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ oznacza operator $(\Delta u_1, \dots, \Delta u_p)$, zaś $\nabla_u F$ oznacza gradient funkcji F ze względu na zmienną u .

Dodatkowo zakładamy, że powyższy układ posiada tak zwaną trywialną rodzinę rozwiązań, przyjmując, że istnieje punkt $u_0 \in \mathbb{R}^p$, który jest punktem krytycznym potencjału F dla każdego λ . Oczywiście założenie to spełnione jest na przykład, gdy F jest postaci $F(u, \lambda) = \lambda \tilde{F}(u)$, gdzie $\tilde{F}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ oraz istnieje punkt krytyczny u_0 funkcji $\tilde{F}$. Definiując wtedy $\tilde{u}_0$ jako funkcję stałą o wartości u_0 , otrzymujemy rodzinę rozwiązań postaci $\{\tilde{u}_0\} \times \mathbb{R}$, nazywaną rodziną trywialną.

Interesującym nas problemem jest badanie zbiorów rozwiązań, które nie należą do takiej rodziny, czyli tak zwanych rozwiązań nietrywialnych. W tym celu będziemy stosować podejście wariacyjne, zatem zamienimy rozważany problem na problem szukania punktów krytycznych pewnego funkcjonału. Oznaczmy przez $H^1(\Omega)$ standardową przestrzeń Sobolewa i przyjmijmy $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^p H^1(\Omega)$.

Na przestrzeni $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ zdefiniujemy funkcjonał stowarzyszony z układem (4.1), kładąc:

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_{\Omega} F(u(x), \lambda) dx. \quad (4.2)$$

Zauważmy, że słabe rozwiązania układu (4.1) są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedności z rozwiązaniami równania

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0. \quad (4.3)$$

Oczywiście rodzina $\{\tilde{u}_0\} \times \mathbb{R}$ jest rodziną rozwiązań powyższego równania, która w dalszym ciągu nazywana będzie rodziną trywialną. Wiadomo ponadto, że $\nabla_u \Phi: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ jest pełnociągłym zaburzeniem liniowego, ograniczonego, samosprężonego operatora Fredholma indeksu zero. W szczególnej sytuacji, gdy wszystkie współczynniki a_i układu (4.1) są równe -1 , rozważany operator jest pełnociągłym zaburzeniem identyczności. W pracach z prezentowanego cyklu rozważana była zarówno taka sytuacja, jak i przypadek układu niekooperatywnego, to znaczy takiego, w którym nie wszystkie współczynniki są tego samego znaku. Funkcjonał stowarzyszony z układem jest w takiej sytuacji silnie nieokreślony, tzn nie jest ograniczony z góry ani z dołu nawet modulo skończenie wymiarowe podprzestrzenie.

Zamiana układu równań postaci (4.1) na równanie operatorowe postaci (4.3) pozwala na stosowanie do badania własności zbioru rozwiązań różnego rodzaju metod wariacyjnych oraz topologicznych. Przykładowymi monografiami, w których omawiane są takie metody, są [31], [33], [34], [45]. Podkreślimy, że w przypadku funkcjonału stowarzyszonego z układem niekooperatywnym nie da się stosować metod bezpośrednich rachunku wariacyjnego, polegających na poszukiwaniu ciągów minimalizujących. W sytuacji tej można natomiast używać twierdzeń typu min-max, takich jak twierdzenie o punkcie siodłowym czy twierdzenie o górskiej przełęczy. Analogicznie w przypadku metod topologicznych, narzędzia

stosowane dla układów niekooperatywnych, muszą uwzględniać silną nieokreśloność funkcjonału. W naszych pracach skupiliśmy się na zastosowaniu do badania rozwiązań równań postaci (4.3) metod topologicznych, a w szczególności metod teorii bifurkacji.

Idea tej teorii polega na badaniu zmiany (przy zmianie parametru λ) struktury zbioru rozwiązań równania postaci (4.3) lub, ogólniej, postaci

$$\Psi(u, \lambda) = 0, \quad (4.4)$$

gdzie $\Psi: \mathbb{X} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{X}$ spełnia pewne dodatkowe warunki, $\mathbb{X}$ jest przestrzenią Banacha, zaś Λ jest rodziną parametrów. Dokładniej, dla punktu $(\tilde{u}_0, \lambda_0)$, będącego elementem rodziny trywialnej, rozważa się warunki implikujące fakt, że jest on punktem bifurkacji lokalnej (to znaczy punktem skupienia nietrywialnych rozwiązań równania) lub globalnej (pojęcie to zostanie zdefiniowane w dalszej części tego omówienia). Najbardziej znanym rezultatem dotyczącym tego zjawiska jest Globalne Twierdzenie Bifurkacyjne, udowodnione przez Rabinowitza, vide [37], jako rozwinięcie idei Krasnosielskiego, vide [27].

Twierdzenie Rabinowitza podaje warunki na występowanie zjawiska globalnej bifurkacji rozwiązań równania typu (4.4), gdy operator Ψ jest pełnociągłym zaburzeniem identyczności. Ponadto opisuje ono strukturę emanujących zbiorów rozwiązań. Twierdzenie to posiada wiele uogólnień, przy założeniach różnego rodzaju (uogólnienia te zostały opisane na przykład w przeglądowym artykule [30]). Najczęściej jednak przy takich rezultatach zakłada się, że istnieją wartości $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, dla których $\tilde{u}_0$ jest izolowanym rozwiązaniem równania $\Psi(\cdot, \hat{\lambda}) = 0$.

Z drugiej strony, układy postaci (4.1) posiadają często naturalne symetrie pewnych zwartych grup Liego. W naszych pracach rozważaliśmy dwa rodzaje takich symetrii: symetrie pochodzące od dziedziny oraz od prawej strony układu. Pierwsza z tych sytuacji zachodzi, gdy zbiór Ω jest niezmienniczy ze względu na pewną grupę symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^N$, na przykład grupę $SO(N)$, czyli specjalną ortogonalną grupę N -wymiarową. Przez niezmienniczość zbioru rozumiemy wtedy, że $\alpha x \in \Omega$ dla każdego $\alpha \in SO(N)$ i $x \in \Omega$. Drugi rodzaj symetrii otrzymujemy, gdy F jest odwzorowaniem Γ -niezmienniczym ze względu na zmienną u , dla pewnej zwartej grupy Liego Γ działającej na przestrzeni $\mathbb{R}^p$, czyli spełniony jest warunek $F(\gamma u, \lambda) = F(u, \lambda)$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma, u \in \mathbb{R}^p, \lambda \in \mathbb{R}$. W obu przypadkach symetrie równania powodują, że stowarzyszony funkcjonał jest niezmienniczy, co implikuje, że jego punkty krytyczne tworzą orbity. Wobec tego założenie, że rozwiązania równania (4.3) są izolowane na pewnych poziomach λ często nie jest spełnione.

W naszych badaniach zajęliśmy się opisem własności zbioru rozwiązań (w szczególności występowaniem zjawiska globalnej bifurkacji z rodziny trywialnej) równania typu (4.3) w przypadku z symetriami. Do ich badania zastosowaliśmy niezmienniczy indeks Conleya (vide [24]) i stopień współzmienniczych odwzorowań gradientowych (vide [14], [21], [42]). Z jednej strony, w pracach **(A1)**, **(A4)**, **(A6)** rozwijaliśmy teorię tych niezmienników. Z drugiej strony, w pracach **(A2)**-**(A6)** wykorzystywaliśmy je do badania zbiorów rozwiązań układów postaci (4.1) oraz układów równań eliptycznych na sferze.

Zagadnieniem, od którego rozpoczęliśmy rozważanie układu (4.1) było istnienie nieograniczonych zbiorów rozwiązań. Problem ten badaliśmy w pracy **(A2)**, gdzie dla pewnego szczególnego przypadku takiego układu udowodniliśmy istnienie nieograniczonej składowej spójności zbioru rozwiązań nietrywialnych. Zastosowaną metodą było tutaj badanie bifurkacji z nieskończoności, przy użyciu odpowiednio zdefiniowanego indeksu (wyrażonego w terminach stopnia odwzorowań współmienniczych).

Istotnym ograniczeniem podejścia wykorzystanego w **(A2)** jest to, że może być ono zastosowane tylko do zagadnień z potencjałem, który jest asymptotycznie kwadratowy w nieskończoności. W układach pochodzących z zastosowań często mamy do czynienia z sytuacją, gdy warunek ten nie jest spełniony, natomiast wiadomo, że istnieje orbita rozwiązań stałych, czyli orbita punktów krytycznych stowarzyszonego funkcjonału. W tej sytuacji interesuje nas badanie zbioru rozwiązań w otoczeniu takiej orbity. Wobec tego w dalszych pracach skupiliśmy się na zagadnieniu bifurkacji z orbity. Interesowała nas przy tym zwłaszcza sytuacja, gdy orbita taka jest zbiorem wymiaru większego od 0, na przykład gdy jest ona homeomorficzna z okręgiem.

Pewna metoda pozwalająca dowodzić bifurkacji w takim przypadku została zaproponowana w pracy [35]. Został tam podany sposób obliczania niezmienniczego indeksu Conleya orbity poprzez sprowadzenie do obliczania indeksu izolowanego punktu krytycznego z przestrzeni normalnej do orbity. Wykorzystując tę metodę oraz związek niezmienniczego indeksu Conleya i stopnia gradientowych odwzorowań współmienniczych opisany przez charakterystykę Eulera, który udowodniliśmy w pracy **(A1)**, można wykazać istnienie spójnych zbiorów rozwiązań. W pracy **(A3)** uzasadniliśmy w ten sposób, że dla problemu Neumanna z niezmienniczym potencjałem, rozważanego na kuli, zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji słabych rozwiązań z orbity rozwiązań stałych.

Kolejnym naturalnym celem było połączenie dwóch typów rezultatów, poprzez zaproponowanie metody, która pozwala badać bifurkacje z orbity i jednocześnie opisywać własności bifurkującego zbioru, a zatem uogólniać Globalne Twierdzenie Bifurkacyjne na przypadek bifurkacji z orbity. W tym celu skupiliśmy się na rozwijaniu teorii stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych. W pracy **(A4)** zaproponowaliśmy metodę obliczania, kiedy stopnie dwóch odwzorowań są różne na zbiorze zawierającym orbitę punktów krytycznych. Zakładaliśmy przy tym, że orbita taka jest niezdegenerowana, to znaczy jej wymiar jest równy wymiarowi jądra operatora $\nabla^2\Phi(u_0, \lambda_0)$, gdzie u_0 jest pewnym punktem tej orbity. Założenie to implikuje, że skończenie wymiarowa aproksymacja rozważanego odwzorowania jest współmienniczą funkcją Morse’a, vide [32], zatem do obliczania stopnia można zastosować teorię takich funkcji. Z bardziej skomplikowaną sytuacją mamy do czynienia w przypadku orbity, która nie spełnia powyższego warunku (czyli tak zwanej orbity zdegenerowanej), gdyż skończenie wymiarowa aproksymacja nie jest w tym przypadku współmienniczą funkcją Morse’a, co odpowiada temu, że odwzorowanie obcięte do przestrzeni normalnej do orbity nie jest wtedy izomorfizmem. Przypadek ten rozważaliśmy w pracy **(A6)**. Wyniki uzyskane dla stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych wykorzystaliśmy do pokazania, że zachodzi globalna bifurkacja z orbity punktów krytycznych.

Otrzymane abstrakcyjne rezultaty używane były do badania zbiorów rozwiązań różnego typu równań różniczkowych, zarówno zwyczajnych jak i cząstkowych. Zastosowania prezentowane w omawianym cyklu ograniczamy do układów równań eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna oraz układów równań eliptycznych zdefiniowanych na sferze. W szczególności w pracy **(A4)** rezultaty dotyczące obliczania indeksu bifurkacji przy pomocy stopnia zostały użyte do wykazania globalnej bifurkacji rozwiązań zagadnienia (4.1) przy założeniu, że zbiór Ω jest $SO(N)$ -niezmienniczy, potencjał F jest niezmienniczy oraz orbita punktów krytycznych F jest niezdegenerowana. Ponadto w pracy tej wykazane zostało istnienie nieograniczonych kontinuuów rozwiązań takiego układu. Podobne rezultaty, w przypadku orbity zdegenerowanej, otrzymane zostały w pracy **(A6)**. Badaliśmy w niej również globalną bifurkację rozwiązań układu zdefiniowanego na sferze. Struktura zbiorów rozwiązań takiego układu została opisana w pracy **(A5)**.

Przejdziemy teraz do szczegółowego omówienia rezultatów otrzymanych w pracach z cyklu **(A1)-(A6)**. Rozpocznijmy od opisu używanych przez nas metod topologicznych i uzyskanych abstrakcyjnych rezultatów dotyczących tych metod. Następnie omówimy wyniki dotyczące bifurkacji z nieskończoności oraz globalnej bifurkacji słabych rozwiązań układów eliptycznych.

4.2 Indeks orbity

Głównymi narzędziami topologicznymi używanymi w naszych pracach są niezmienniczy indeks Conleya i stopień gradientowych odwzorowań współzmienniczych. Rozpocznijmy od omówienia najistotniejszych własności tych obiektów, niezbędnych do kompletności opisu dalszych wyników.

Niech G będzie zwartą grupą Liego, a $\mathbb{V}$ skończenie wymiarową, ortogonalną, rzeczywistą G -reprezentacją. Przypomnijmy, że odwzorowanie $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywane jest G -niezmienniczym, gdy $f(gv) = f(v)$ dla każdych $g \in G, v \in \mathbb{V}$, zaś odwzorowanie $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ nazywamy G -współzmienniczym, gdy $f(gv) = gf(v)$ dla każdych $g \in G, v \in \mathbb{V}$. Oczywiście gradient odwzorowania G -niezmienniczego jest odwzorowaniem G -współzmienniczym.

Dla pary $(\nabla\phi, \Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest otwartym, ograniczonym, G -niezmienniczym podzbiorem (czyli $gx \in \Omega$ dla każdych $g \in G, x \in \Omega$), zaś $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ jest G -niezmienniczą funkcją Ω -dopuszczalną (czyli spełniającą warunek $(\nabla\phi)^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$) zdefiniowany jest stopień gradientowych odwzorowań współzmienniczych, oznaczany przez $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, \Omega)$. Stopień ten jest elementem tak zwanego pierścienia Eulera (jego opis zostanie podany w dalszej części tego omówienia). Konstrukcja stopnia została opisana przez Gębę w pracy [14]. Ponadto, ponieważ rozważane odwzorowanie jest gradientowe, warunek Ω -dopuszczalności implikuje, że Ω jest otoczeniem izolującym dla potoku η indukowanego przez $-\nabla\phi$. Niech $\mathcal{S}$ będzie maksymalnym izolowanym podzbiorem η -niezmienniczym zbioru Ω . Wówczas określony jest niezmienniczy indeks Conleya $\mathcal{CI}_G(\mathcal{S}, \eta)$, vide [2], [14], [43].

Definicja indeksu w powyższym przypadku jest analogiczna do klasycznej definicji po-

danej przez Conleya, vide [4], w sytuacji bez działania grupy. Wiadomo (vide Propozycja 5.6 [14]), że w sytuacji G -niezmienniczej otrzymany indeks jest G -typem homotopijnym G -CW-kompleksu z wyróżnionym punktem (definicję i własności G -CW-kompleksów można znaleźć w książce [9]). Ważnym zagadnieniem, z punktu widzenia teorii bifurkacji, jest badanie, kiedy takie G -typy homotopijne są różne.

Narzędziami, które mogą być w tym celu wykorzystywane są niezmienniki addytywne, vide [9]. W szczególności w książce [9] można znaleźć konstrukcję tak zwanego uniwersalnego niezmiennika addytywnego $(U(G), u)$, gdzie $(U(G), +)$ jest grupą abelową, która może być rozumiana jako $\mathbb{Z}$ -moduł generowany przez klasy sprzężoności domkniętych podgrup grupy G . Oznaczając klasę sprzężoności domkniętej podgrupy $H \subset G$ przez (H) , a zbiór wszystkich takich klas przez $\text{sub}[G]$ otrzymujemy, że elementy $U(G)$ można zapisać jako $\sum_{(H) \in \text{sub}[G]} n_{(H)} \cdot (H)$, gdzie $n_{(H)} \in \mathbb{Z}$ oraz jedynie skończona liczba współczynników $n_{(H)}$ jest niezerowa. Szczególnie interesującym przypadkiem jest $G = SO(2)$. W tej sytuacji $\text{sub}[SO(2)] = \{(SO(2)), (Z_1), (Z_2), \dots\}$, przy czym wszystkie te klasy sprzężoności są jednoelementowe. Elementy $U(SO(2))$ zapisujemy zatem w postaci $\alpha_0 \cdot (SO(2)) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot (Z_k)$ lub równoważnie, jako ciągi współczynników $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Zauważmy, że każdej domkniętej podgrupie $H \subset G$ odpowiada przestrzeń ilorazowa G/H , która jest jednocześnie G -przestrzenią (vide [25]) oraz, na podstawie definicji, G -CW-kompleksem. Smash produkt takich G -CW-kompleksów indukuje mnożenie w $U(G)$, vide [9]. Trójkę $(U(G), +, *)$ nazywać będziemy pierścieniem Eulera, zaś odwzorowanie u niezmienniczą charakterystyką Eulera.

Z definicji uniwersalnego niezmiennika addytywnego wynika, że niezmiennicza charakterystyka Eulera przyporządkowuje G -typowi homotopijnemu G -CW-kompleksu element pierścienia $U(G)$. W szczególności odwzorowanie, które przyporządkowuje parze $(\nabla\phi, \Omega)$, spełniającej opisane powyżej warunki, niezmienniczą charakterystykę Eulera indeksu $\mathcal{CI}_G(\mathcal{S}, \eta)$, może być rozumiane jako stopień, przyjmujący wartości w $U(G)$. Podkreśmy, że w sytuacji klasycznego indeksu Conleya twierdzenie Poincaré-Hopfa implikuje, że otrzymany w wyniku analogicznej konstrukcji element zbioru liczb całkowitych to stopień Brouwera. Można wobec tego przyjmować takie konstrukcje jako definicje odpowiednich stopni.

Jednak częściej stosuje się podejście polegające na przedstawieniu analitycznej definicji stopnia, a następnie na wykazaniu związku między stopniem a indeksem Conleya. Dla sytuacji niezmienniczej takie podejście zostało zastosowane przez Gębę w pracy [14]. Definicja analityczna stopnia przedstawiona w tym artykule opiera się na przybliżaniu funkcji przez tak zwane odwzorowania generyczne. Ze względu na techniczne aspekty dowodów bardziej praktyczna jest definicja wykorzystująca specjalne współmiennicze funkcje Morse'a (zostały one zdefiniowane w pracy [32], a ich własności, które wykorzystać można do definicji stopnia, opisane zostały w pracy [11]). Szkic takiej definicji zamieściliśmy w pracy **(A1)**. Dodatkowo uzasadniliśmy, że dla tak zdefiniowanego stopnia zachodzi związek z indeksem Conleya, analogiczny do rezultatu otrzymanego dla stopnia zdefiniowanego przez Gębę, wobec czego te dwie definicje są równoważne. Podkreśmy, że stopień gradientowych odwzorowań współmienniczych ma własności analogiczne do

własności stopnia Brouwera, takie jak własność istnienia rozwiązania, addytywności, wycinania, zawieszania, linearyzacji, czy homotopijnej niezmienniczości, vide [42].

Ponadto zachodzi tak zwana formuła produktowa, pozwalająca obliczać stopień odwzorowania produktowego jako iloczyn stopni na poszczególnych współrzędnych odwzorowania. Dokładniej, prawdziwy jest następujący rezultat, udowodniony w pracy **(A1)**:

Twierdzenie 4.1 (*Theorem 3.1 (A1)*) *Niech $\Omega_i \subset \mathbb{V}_i$ będzie otwartym, ograniczonym, G -niezmienniczym podzbiorem G -reprezentacji $\mathbb{V}_i$ oraz niech $\varphi_i \in C^1(\mathbb{V}_i, \mathbb{R})$ będzie G -niezmienniczą, Ω_i -dopuszczalną funkcją dla $i = 1, 2$. Wówczas G -niezmiennicza funkcja $\varphi_1 + \varphi_2 \in C^1(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2, \mathbb{R})$ jest $(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -dopuszczalna oraz zachodzi*

$$\nabla_G\text{-deg}((\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2), \Omega_1 \times \Omega_2) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi_1, \Omega_1) * \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi_2, \Omega_2).$$

Dowód tego twierdzenia przeprowadzony został najpierw dla przypadku, gdy φ_i (dla $i = 1, 2$) jest specjalną niezmienniczą funkcją Morse'a, której zbiór punktów krytycznych składa się z dokładnie jednej orbity. Przypadek dowolnych Ω_i -dopuszczalnych funkcji φ_i wynika z tego przypadku szczególnego oraz z własności stopnia.

Zarówno niezmienniczy indeks Conleya jak i stopień gradientowych odwzorowań współzmienniczych mają swoje odpowiedniki nieskończenie wymiarowe, konstruowane przy różnych założeniach na rozważany operator. W naszych zastosowaniach koncentrowaliśmy się na niezmiennikach dla operatorów postaci pełnociągłe zaburzenie identyczności, lub ogólniejszych, postaci pełnociągłe zaburzenie liniowego operatora Fredholma indeksu 0. Dokładniej, niech $\mathbb{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, która jest jednocześnie ortogonalną reprezentacją grupy G . Rozważmy G -niezmienniczy funkcjonał Φ klasy C^2 określony na $\mathbb{H}$. Załóżmy przy tym, że jest on postaci

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u \rangle - \xi(u), \quad (4.5)$$

gdzie

- (1) $L: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest liniowym, ograniczonym, samosprzężonym, G -współzmienniczym operatorem Fredholma indeksu 0,
- (2) $\nabla\xi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest G -współzmienniczym operatorem pełnociągłym.

Wykorzystując rzutowania na podprzestrzeń własne operatora L tworzymy G -współzmienniczy schemat aproksymacyjny na przestrzeni $\mathbb{H}$, czyli ciąg G -współzmienniczych rzutów $\{\pi_n: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ taki, że ciąg $\mathbb{H}^n = \pi_n(\mathbb{H})$ skończenie wymiarowych podreprezentacji $\mathbb{H}$ spełnia $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}_{n+1}$ dla pewnej podreprezentacji $\mathbb{H}_{n+1} \perp \mathbb{H}^n$ oraz $\mathbb{H} = \text{cl}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}_n)$. Ponadto $\ker L = \mathbb{H}^0$ oraz $\pi_n \circ L = L \circ \pi_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dla funkcjonału Φ spełniającego powyższe warunki oraz otwartego, ograniczonego, G -niezmienniczego podzbioru $\Omega \subset \mathbb{H}$ takiego, że $(\nabla\Phi)^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$, w pracy [21] zdefiniowaliśmy stopień $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\Phi, \Omega)$, będący elementem pierścienia $U(G)$, nazywany stopniem niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych. Ponadto, w sytuacji gdy η

jest lokalnym $\mathcal{G}$ - $\mathcal{LS}$ -potokiem (vide Definicja 2.1 w pracy [24]) generowanym przez $-\nabla\Phi$ zaś $\mathcal{O}$ jest G -otoczeniem η -izolującym, w pracy Izydorka [24] zdefiniowany jest także indeks Conleya $\mathcal{CI}_G(\mathcal{O}, \eta)$, będący G -typem homotopii G -spektrum. Przypomnijmy, że dla ciągu $(\mathbb{V}_n)_{n=0}^\infty$ skończenie wymiarowych G -reprezentacji, G -spektrum typu $(\mathbb{V}_n)_{n=0}^\infty$ rozumiemy jako ciąg $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)$ zwartych i metryzowalnych G -przestrzeni takich, że od pewnego miejsca $S^{\mathbb{V}_n} \wedge \mathcal{E}_n$ i $\mathcal{E}_{n+1}$ są G -homotopijnie równoważne, gdzie $S^{\mathbb{V}} = D(\mathbb{V})/S(\mathbb{V})$, zaś $D(\mathbb{V})$ i $S(\mathbb{V})$ są odpowiednio domkniętą kulą i sferą jednostkową w $\mathbb{V}$.

Podkreślmy, że powyższy indeks zdefiniowany jest dla G -otoczenia η -izolującego, gdyż tak określony indeks posiada własność kontynuacji (vide [24]). Z drugiej strony, istotą zastosowania indeksu Conleya jest badanie zbiorów niezmienniczych. Wiadomo jednak, że dla izolowanego zbioru niezmienniczego $\mathcal{S}$ potoku η generowanego przez $-\nabla\Phi$ istnieje otoczenie η -izolujące $\mathcal{O}$. Dlatego można stosować również zapis $\mathcal{CI}_G(\mathcal{S}, -\nabla\Phi)$, definiując taki indeks jako $\mathcal{CI}_G(\mathcal{O}, \eta)$.

Jeden z głównych rezultatów pracy **(A1)** dotyczy związku między dwoma opisanymi powyżej niezmiennikami. Aby go wykazać, zdefiniowaliśmy uogólnioną niezmienniczą charakterystykę Eulera G -typu homotopijnego G -spektrum $\mathcal{E}$ jako

$$\Upsilon_G([\mathcal{E}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_G(S^{\mathbb{V}_n})^{-1} \star \chi_G(\mathcal{E}_n)).$$

Odwzorowanie to jest poprawnie określone, vide Lemat 2.3 w **(A1)**.

Przy powyższych oznaczeniach, zachodzi następujący związek między stopniem niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych i niezmienniczym indeksem Conleya, będący uogólnieniem twierdzenia Poincaré-Hopfa na przypadek tych niezmienników:

Twierdzenie 4.2 (*Theorem 3.5 (A1)*) *Niech η będzie lokalnym $\mathcal{G}$ - $\mathcal{LS}$ -potokiem generowanym przez $-\nabla\Phi$, zaś $\mathcal{O}$ otoczeniem izolującym dla η . Wówczas*

$$\Upsilon_G(\mathcal{CI}_G(\mathcal{O}, \eta)) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\Phi, \mathcal{O}).$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na własnościach stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych i niezmienniczego indeksu Conleya oraz ich skończenie wymiarowych wersji.

Opisane powyżej niezmienniki mogą być zastosowane do badania zjawiska bifurkacji. Omówimy teraz założenia, przy jakich rozważamy ten problem.

Niech $\mathbb{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, która jest ortogonalną G -reprezentacją oraz posiada G -współmienniczy schemat aproksymacyjny $\{\pi_n: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Ponadto niech $\Phi \in C^2(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie G -niezmiennicznym funkcjonałem postaci

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle - \xi(u, \lambda), \quad (4.6)$$

gdzie

- (1) $L: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest liniowym, ograniczonym, samosprężonym, G -współmienniczym operatorem Fredholma indeksu 0, takim, że $\pi_0(\mathbb{H}) = \ker L$ oraz $\pi_n \circ L = L \circ \pi_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(2) $\nabla_u \xi: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ jest G -współzmienniczym operatorem pełnociągłym.

Założmy, że istnieje $u_0 \in \mathbb{H}$ takie, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u \Phi(u_0, \lambda) = 0$. Ponieważ operator $\nabla_u \Phi$ jest G -współzmienniczy, to dla każdego $g \in G$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi również $\nabla_u \Phi(gu_0, \lambda) = 0$. Otrzymujemy zatem orbitę punktów krytycznych $G(u_0)$ funkcjonału Φ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$. Pozwala to zdefiniować trywialną rodzinę rozwiązań $\mathcal{T} = G(u_0) \times \mathbb{R}$ równania $\nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0$. Naszym celem jest badanie istnienia rozwiązań, które nie należą do tej rodziny, czyli tak zwanych rozwiązań nietrywialnych, zarówno w małym otoczeniu $\mathcal{T}$ (czyli bifurkację z rodziny trywialnej), jak i poza dowolnie dużym otoczeniem $\mathcal{T}$ (czyli bifurkację z nieskończoności). Opiszmy najpierw pierwszą z tych sytuacji. Zdefiniujemy rodzinę rozwiązań nietrywialnych przez $\mathcal{N} = \{(u, \lambda) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} : \nabla_u \Phi(u, \lambda) = 0, (u, \lambda) \notin \mathcal{T}\}$ i przyjmijmy następującą definicję:

Definicja 4.3 *Mówimy, że zachodzi zjawisko lokalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\} \subset \mathcal{T}$, jeżeli $G(u_0) \times \{\lambda_0\} \subset \text{cl}(\mathcal{N})$. Inaczej mówiąc, orbita $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$ składa się z punktów skupienia zbioru $\mathcal{N}$.*

Szczególnie interesować nas będzie problem istnienia kontynuów (czyli spójnych, domkniętych zbiorów) rozwiązań nietrywialnych.

Definicja 4.4 *Mówimy, że zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\} \subset \mathcal{T}$, jeżeli istnieje niepuste kontinuum $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0) \subset \text{cl}(\mathcal{N})$ zawierające (u_0, λ_0) takie, że albo $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0)$ jest zbiorem nieograniczonym, albo jest zbiorem ograniczonym oraz $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0) \cap (\mathcal{T} \setminus (G(u_0) \times \{\lambda_0\})) \neq \emptyset$.*

Podkreślmy, że jeżeli istnieje kontinuum $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0)$ dane powyższą definicją, to dla każdego $g \in G$ istnieje kontinuum $\mathcal{C}(gu_0, \lambda_0)$, spełniające analogiczne warunki, dlatego w tej definicji mówimy o bifurkacji z orbity.

Zauważmy, że jeżeli zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji, to zachodzi również zjawisko lokalnej bifurkacji. Ponadto, biorąc pod uwagę niezmienniczą wersję twierdzenia o funkcji uwikłanej udowodnioną przez Dancera w pracy [7], można wykazać, że prawdziwy jest następujący warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji:

Fakt 4.5 (*Fact 2.10 (A3)*) *Jeżeli zachodzi zjawisko lokalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\} \subset \mathcal{T}$, to $\dim \ker \nabla_u^2 \Phi(u_0, \lambda_0) > \dim(G(u_0) \times \{\lambda_0\})$.*

Orbitę $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$ spełniającą powyższy warunek nazywamy zdegenerowaną. Podkreślmy, że badając zjawisko bifurkacji, będziemy brać pod uwagę również sytuację, gdy warunek ten jest spełniony dla każdego $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Badając konkretne zagadnienia brzegowe będziemy w takiej sytuacji formułować warunki konieczne bifurkacji w innej postaci, zależnej od prawej strony równania.

Aby sformułować warunki wystarczające istnienia bifurkacji, wykorzystamy opisane powyżej niezmienniki. Założmy, że istnieją $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takie, że na każdym poziomie

$\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \setminus \{\lambda_0\}$ orbita $G(u_0) \times \{\lambda\}$ jest izolowaną orbitą punktów krytycznych funkcjonału $\Phi(\cdot, \lambda): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$. W szczególności oznacza to, że dla odpowiednio małego otoczenia Ω orbity $G(u_0)$ stopnie $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon), \Omega)$ są poprawnie określone. Ponadto, biorąc pod uwagę własności potoków generowanych przez odwzorowania gradientowe, otrzymujemy, że $G(u_0)$ jest izolowanym zbiorem niezmienniczym (w sensie indeksu Conleya) potoków generowanych przez $-\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon)$, zatem poprawnie określone są indeksy Conleya $\mathcal{CI}_G(G(u_0), -\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon))$.

Rozważmy następujące warunki:

$$(W1) \quad \mathcal{CI}_G(G(u_0), -\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon)) \neq \mathcal{CI}_G(G(u_0), -\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon)),$$

$$(W2) \quad \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon), \Omega) \neq \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon), \Omega).$$

Wiadomo, że warunki te implikują zachodzenie bifurkacji, odpowiednio lokalnej i globalnej, z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$. Dokładniej, prawdziwe są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4.6 *Jeżeli spełniony jest warunek (W1), to zachodzi zjawisko lokalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Twierdzenie 4.7 *Jeżeli spełniony jest warunek (W2), to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Pierwsze z powyższych twierdzeń jest natychmiastową konsekwencją własności kontynuacji indeksu Conleya (vide Proposition 2.16 w [24]) oraz faktu, że rozważane odwzorowanie jest gradientowe. Drugie z tych twierdzeń sformułowane zostało w pracy [21] (jako Theorem 3.3). Jest ono współzmienniczą wersją Twierdzenia o Globalnej Bifurkacji udowodnionego przez Rabinowitza (vide [37]) i jego dowód, analogicznie jak w klasycznej sytuacji, opiera się na własności homotopijnej niezmienniczości stopnia, przy czym stopień Leray-Schaudera należy zastąpić stopniem niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych.

Należy podkreślić, że zmiana indeksu Conleya (przy zmianie parametru λ) implikuje jedynie bifurkację lokalną, która nie musi być globalna. Przykłady takiego typu, w sytuacji bez działania grupy, zostały podane w pracach [3], [23]. Okazuje się jednak, że jeżeli zamiast zmiany indeksów Conleya będziemy rozpatrywać zmianę ich niezmienniczych charakterystyk Eulera, to jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 4.2 oraz Twierdzenia 4.7 otrzymamy rezultat o bifurkacji globalnej, mianowicie:

Twierdzenie 4.8 *Jeżeli*

$$\Upsilon_G(\mathcal{CI}_G(G(u_0), -\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon))) \neq \Upsilon_G(\mathcal{CI}_G(G(u_0), -\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon))),$$

to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$.

Biorąc pod uwagę powyższe twierdzenia, interesuje nas badanie, kiedy odpowiednie indeksy orbity są różne, czyli kiedy spełnione są warunki (W1) i (W2). Podkreślimy jednak, że interesuje nas rozważanie tych warunków w sytuacji, gdy funkcjonal Φ jest stowarzyszony z pewnym zagadnieniem brzegowym. W szczególności w pracach z cyklu **(A1)**-**(A6)** rozpatrywaliśmy układy równań eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna oraz układy równań eliptycznych na sferze. W takim przypadku będziemy mieć często do czynienia z sytuacją, gdy punkt krytyczny u_0 nie jest punktem stałym działania grupy G , czyli orbita $G(u_0)$ nie składa się z jednego punktu. Inaczej mówiąc, jego grupa izotropii (czyli grupa $G_{u_0} = \{g \in G; gu_0 = u_0\}$) nie jest całą grupą G .

Warunek (W1) dla takiej sytuacji rozważany był w artykułach [26], [35], [36]. Autorzy tych prac, wykorzystując własności G -CW-kompleksów, uzasadnili, że weryfikację tego warunku można sprowadzić do porównywania indeksów Conleya odwzorowań obciętych do przestrzeni normalnej do orbity. Otwarte pozostawało pytanie, czy analogiczny rezultat prawdziwy jest w przypadku warunku (W2). Biorąc pod uwagę znaczenie tego warunku w badaniu zjawiska globalnej bifurkacji, zaczęliśmy rozważać to pytanie. Uzyskane przez nas wyniki zawarte są w pracach **(A4)** i **(A6)**.

Rezultaty otrzymane w pracy **(A4)** dotyczyły sytuacji, gdy dla $\lambda = \lambda_0 \pm \varepsilon$ orbita $G(u_0) \times \{\lambda\}$ jest niezdegenerowana (czyli $\dim(G(u_0) \times \{\lambda\}) = \dim \ker \nabla^2 \Phi(u_0, \lambda)$), zaś w pracy **(A6)** - również, gdy dla każdego $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ taka orbita jest zdegenerowana. W obu przypadkach udowodniliśmy, że (przy pewnych dodatkowych założeniach) weryfikację warunku (W2) można zredukować do porównywania stopni odwzorowań obciętych do przestrzeni normalnej do orbity. Poniżej omówimy szczegółowo te rezultaty.

Oznaczmy $H = G_{u_0}$ i załóżmy, że para (G, H) jest parą dopuszczalną, to znaczy dla dowolnych domkniętych podgrup $H_1, H_2 \subset H$ jeżeli podgrupy te nie są sprzężone w H , to nie są też sprzężone w G . Pojęcie pary dopuszczalnej wprowadzone zostało w [35]. Przykładem pary dopuszczalnej, który będzie bardzo istotny w naszych rozważaniach, jest $(\Gamma \times SO(N), \{e\} \times SO(N))$, gdzie Γ jest pewną zwartą grupą Liego.

Niech $\mathbb{W}$ oznacza przestrzeń normalną do orbity $G(u_0)$, czyli $\mathbb{W} = (T_{u_0}G(u_0))^\perp$. Zdefiniujmy funkcjonal $\Psi: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ przez $\Psi = \Phi|_{\mathbb{W}}$. Wiadomo wtedy, że przestrzeń $\mathbb{W}$ jest H -reprezentacją, a Ψ funkcjonalem H -niezmienniczym. Co więcej, na przestrzeni tej możemy zdefiniować H -współzmienniczy schemat aproksymacyjny za pomocą rzutowań na przestrzeń $\mathbb{H}^n \cap \mathbb{W}$, a zatem poprawnie określony jest stopień $\nabla_H\text{-deg}(\nabla\Psi, \Omega \cap \mathbb{W})$.

Rozważmy G -niezmiennicze funkcjonały $\Phi_i \in C^2(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ z niezdegenerowanymi orbitami krytycznymi $G(v_i) \subset (\nabla\Phi_i)^{-1}(0)$ dla $i = 1, 2$. Załóżmy, że funkcjonały Φ_i są postaci (4.5) oraz $G_{v_1} = G_{v_2} = H$. Połóżmy $\mathbb{W}_i = (T_{v_i}G(v_i))^\perp$ oraz zdefiniujmy $\Psi_i: \mathbb{W}_i \rightarrow \mathbb{R}$ przez $\Psi_i = \Phi_i|_{\mathbb{W}_i}$. Ustalmy $\Omega_i = G \cdot B_\epsilon(v_i, \mathbb{W}_i)$ takie, że $(\nabla\Phi_i)^{-1}(0) \cap \Omega_i = G(v_i)$, zaś ϵ jest odpowiednio małe.

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.9 (*Theorem 2.8 (A4)*) *Jeżeli para (G, H) jest parą dopuszczalną, to warunek*

$$\nabla_H\text{-deg}(\nabla\Psi_1, \Omega_1 \cap \mathbb{W}_1) \neq \nabla_H\text{-deg}(\nabla\Psi_2, \Omega_2 \cap \mathbb{W}_2)$$

implikuje warunek

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\Phi_1, \Omega_1) \neq \nabla_G\text{-deg}(\nabla\Phi_2, \Omega_2).$$

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia uzasadniliśmy najpierw jego skończenie wymiarowy odpowiednik, rozważając G -niezmienniczą funkcję ϕ określoną na skończenie wymiarowej G -reprezentacji $\mathbb{V}$, jej orbitę krytyczną $G(v_0)$ oraz funkcję ψ będącą obcięciem ϕ do przestrzeni $(T_{v_0}G(v_0))^\perp$. W takim przypadku, korzystając z definicji stopnia, zarówno stopień odwzorowania $\nabla\phi$, jak i odwzorowania $\nabla\psi$ można obliczać korzystając z aproksymacji funkcji ϕ i ψ przez specjalne niezmiennicze funkcje Morse'a. Ponadto specjalna funkcja Morse'a aproksymująca ϕ może być otrzymana ze specjalnej funkcji Morse'a aproksymującej ψ , co wykazaliśmy w Lemacie 2.3 pracy (A4). Pozwala to podać formułę na stopień odwzorowania $\nabla\phi$ w zależności od stopnia odwzorowania $\nabla\psi$, vide Twierdzenie 2.5 pracy (A4). Pokreślmy, że w dowolnej sytuacji porównywanie takich stopni wymaga informacji, jakie podgrupy grupy G są ze sobą sprzężone. Jednak przy założeniu, że para (G, H) jest dopuszczalna, otrzymujemy pełną informację o współrzędnych stopnia w zależności od współrzędnych stopnia odwzorowania obciętego, co opisaliśmy w Twierdzeniu 2.6 pracy (A4). Z rezultatu tego wynika skończenie wymiarowa wersja Twierdzenia 4.9 (vide Wniosek 2.7 (A4)). Z wersji tej, wykorzystując definicję stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych oraz odwracalność $\nabla_G\text{-deg}(L, B(\mathbb{H}^n \ominus \mathbb{H}^0))^{-1}$ w pierścieniu $U(G)$ otrzymujemy Twierdzenie 4.9.

Analogiczne wyniki zostały uzyskane w pracy (A6) w przypadku, gdy $G(v_0)$ może być zdegenerowaną orbitą punktów krytycznych funkcjonałów Φ_1, Φ_2 . Zauważmy, że w przypadku skończenia wymiarowym założenie, że orbita jest niezdegenerowana implikowało, że dla pewnego małego otoczenia Ω orbity $G(u_0)$ rozważana funkcja jest Ω -funkcją Morse'a. Gdy założymy, że orbita taka jest zdegenerowana i izolowana, to wiadomo jedynie, że jest to funkcja Ω -dopuszczalna. Aby wykazać, że stopień odwzorowania jest zależny od stopnia odwzorowania obciętego do przestrzeni normalnej do orbity, ponownie zastosowaliśmy definicję stopnia oraz fakt istnienia aproksymacji funkcji Ω -dopuszczalnej przez Ω -funkcję Morse'a, a następnie przez specjalną Ω -funkcję Morse'a, przy czym ponownie, funkcja, która aproksymuje ϕ , może być otrzymana z funkcji aproksymującej ψ , co wykazaliśmy w Lemacie 2.3 pracy (A6). Jako rezultat otrzymaliśmy następujący skończenie wymiarowy analog Twierdzenia 4.9 dla sytuacji orbity zdegenerowanej.

Twierdzenie 4.10 (*Corollary 2.5 (A6)*) *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową G -reprezentacją. Rozważmy G -niezmiennicze funkcje $\phi_i \in C^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ z orbitami krytycznymi $G(v_i)$, izolowanymi w $(\nabla\phi_i)^{-1}(0)$ dla $i = 1, 2$. Załóżmy, że $G_{v_1} = G_{v_2} = H$ i połóżmy $\mathbb{W}_i = (T_{v_i}G(v_i))^\perp$. Ustalmy $\Omega_i = G \cdot B_\epsilon(v_i, \mathbb{W}_i)$ takie, że $(\nabla\phi_i)^{-1}(0) \cap \Omega_i = G(v_i)$ oraz ϵ jest odpowiednio małe. Zdefiniujmy $\psi_i: B_\epsilon(v_i, \mathbb{W}_i) \rightarrow \mathbb{R}$ przez $\psi_i = \phi_i|_{B_\epsilon(v_i, \mathbb{W}_i)}$. Jeżeli para (G, H) jest dopuszczalna oraz*

$$\nabla_H\text{-deg}(\nabla\psi_1, B_\epsilon(v_1, \mathbb{W}_1)) \neq \nabla_H\text{-deg}(\nabla\psi_2, B_\epsilon(v_2, \mathbb{W}_2))$$

to

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi_1, \Omega_1) \neq \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi_2, \Omega_2).$$

Wynik ten został podany w pracy **(A6)** wyłącznie w sytuacji skończenie wymiarowej, gdyż metody stosowane w tej pracy nie wymagały nieskończenie wymiarowej wersji. Podkreślny jednak, że wersja taka może być otrzymana jako prosty wniosek z przypadku skończenie wymiarowego, co opisaliśmy w Uwadze 2.6 pracy **(A6)**.

Podsumowując, Twierdzenia 4.9 i 4.10 pozwalają uprościć porównywanie stopni w otoczeniu orbit punktów krytycznych. W szczególności wykorzystywać je będziemy do weryfikacji, czy zachodzi warunek (W2). Warunek ten będziemy czasem zapisywać w postaci

$$\mathcal{BIF}_G(G(u_0), \lambda_0) \neq 0 \in U(G),$$

gdzie

$$\mathcal{BIF}_G(G(u_0), \lambda_0) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon), \Omega) - \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u\Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon), \Omega) \quad (4.7)$$

nazywany jest indeksem bifurkacji.

Tak zdefiniowany indeks może być wykorzystany nie tylko do wykazania, że globalna bifurkacja zachodzi z danej orbity, ale też do badania własności bifurkującego zbioru rozwiązań. Dokładniej, Twierdzenie 4.7 może być uzupełnione informacją, że bifurkujące kontinuum jest nieograniczone, albo jest ograniczone i przecina rodzinę rozwiązań trywialnych w pewnych punktach, dla których suma indeksów bifurkacji wynosi zero. Poniżej przedstawimy precyzyjne sformułowanie tego rezultatu w większej ogólności. W szczególności, ponieważ w naszych pracach rozpatrywaliśmy również rodziny rozwiązań trywialnych odpowiadające więcej niż jednej orbicie, rozważymy rodzinę $\mathcal{T}$ w innej postaci. Załóżmy, że istnieją $u_0, u_1, \dots, u_q \in \mathbb{H}$ takie, że $\nabla_u\Phi(u_i, \lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, q$ oraz $G(u_i) \cap G(u_j) = \emptyset$ i połóżmy $\mathcal{T} = (G(u_0) \cup \dots \cup G(u_q)) \times \mathbb{R}$. Zdefiniujmy indeksy bifurkacji dla orbit $G(u_1), \dots, G(u_q)$ analogicznie jak w formule (4.7). Przypomnijmy, że przez $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0) \subset \text{cl}(\mathcal{N})$ oznaczamy kontinuum zawierające punkt (u_0, λ_0) . Zachodzi wówczas następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.11 *Niech $\Phi \in C^2(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie G -niezmienniczym funkcjonałem postaci (4.6). Jeżeli $\mathcal{BIF}_G(G(u_0), \lambda_0) \neq 0$, to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $G(u_0) \times \{\lambda_0\}$. Ponadto*

- (1) *albo kontinuum $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0)$ jest nieograniczone,*
- (2) *albo jest ono ograniczone i istnieje skończony zbiór orbit $\{G(u_{i_1}) \times \{\lambda_1\}, \dots, G(u_{i_s}) \times \{\lambda_s\}\}$ taki, że $\mathcal{C}(u_0, \lambda_0) \cap \mathcal{T} = \bigcup_{j=1}^s G(u_{i_j}) \times \{\lambda_j\}$ oraz*

$$\sum_{j=1}^s \mathcal{BIF}_G(G(u_{i_j}), \lambda_j) = 0 \in U(G). \quad (4.8)$$

Mniej ogólne wersje tego twierdzenia zostały sformułowane jako Theorem 3.3 w pracy [21] oraz jako Theorem 2.11 w pracy **(A4)**. Jednocześnie jest ono uogólnieniem Globalnego Twierdzenia Bifurkacyjnego na przypadek bifurkacji z orbity. Zauważmy, że pozwala ono

w pewnych sytuacjach wykazać, że bifurkujące kontinuum jest nieograniczone. Rzeczywiście, jeżeli wykazemy, że warunek (4.8) nie może być spełniony dla żadnych podzbiorów postaci $\{G(u_{i_1}) \times \{\lambda_1\}, \dots, G(u_{i_s}) \times \{\lambda_s\}\} \subset \mathcal{T}$, to w rezultacie otrzymamy, że musi być spełniony punkt (1) powyższego twierdzenia.

Ponieważ warunek (4.8) zapisany jest za pomocą indeksów bifurkacji, to jego weryfikacja wymaga obliczania stopni na otoczeniu orbity. Analogicznie jak w przypadku warunku (W2), obliczenia takie mogą być sprowadzone do obliczania stopni odwzorowań obciętych do przestrzeni normalnej do orbity. Omówimy to dokładniej dla rodziny trywialnej odpowiadającej jednej orbicie, czyli dla $\mathcal{T} = G(u_0) \times \mathbb{R}$. Połóżmy $\mathbb{W} = (T_{u_0}G(u_0))^\perp$, $H = G_{u_0}$, $\Psi = \Phi|_{\mathbb{W}}$ oraz

$$\mathcal{BLF}_H(u_0, \lambda_0) = \nabla_H\text{-deg}(\nabla_u\Psi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon), \Omega \cap \mathbb{W}) - \nabla_H\text{-deg}(\nabla_u\Psi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon), \Omega \cap \mathbb{W}).$$

Rozumując analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.9, otrzymujemy następujący rezultat:

Fakt 4.12 (*Remark 2.13 (A4)*) *Jeżeli para (G, H) jest dopuszczalna oraz*

$$\sum_{j=1}^s \mathcal{BLF}_G(G(u_0), \lambda_j) = 0 \in U(G)$$

$$\text{to } \sum_{j=1}^s \mathcal{BLF}_H(u_0, \lambda_j) = 0 \in U(H).$$

Analogiczny rezultat można sformułować w przypadku, gdy rodzina trywialna jest ogólniejszej postaci, to znaczy $\mathcal{T} = (G(u_1) \cup \dots \cup G(u_q)) \times \mathbb{R}$. Sytuację taką rozważaliśmy w pracy (A5). Zakładaliśmy przy tym, że grupy izotropii wszystkich elementów rodziny trywialnej są sprzężonymi podgrupami grupy G , tzn. $(G_{u_1}) = \dots = (G_{u_q}) = (H)$, gdzie (K) oznacza klasę sprzężoności podgrupy K w G . Zakładając dodatkowo, że para (G, H) jest parą dopuszczalną, analogicznie jak w Fakcie 4.12 otrzymaliśmy, że jeżeli $\sum_{j=1}^s \mathcal{BLF}_G(G(u_{i_j}), \lambda_j) = 0 \in U(G)$, to również $\sum_{j=1}^s \mathcal{BLF}_H(u_{i_j}, \lambda_j) = 0 \in U(H)$.

Podkreślmy jednak, że opisana powyżej redukcja obliczeń do indeksu $\mathcal{BLF}_H$ często nie wystarcza do weryfikacji warunku (4.8). Wynika to z faktu, że struktura multiplikatywna pierścienia Eulera $U(G)$, która okazuje się potrzebna do obliczenia indeksu bifurkacji, nie jest opisana dla dowolnej grupy Liego. Taki opis znany jest w pewnych przypadkach, vide [10], [13], [16], [40]. Szczególnie istotny okazuje się opis dla $G = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, gdyż dla każdej grupy Liego G takiej, że $\dim G > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $T^n \subset G$. Wiadomo, że takie włożenie grup indukuje homomorfizm pierścieni Eulera $i^*: U(G) \rightarrow U(T^n)$. Homomorfizm ten przeprowadza indeks bifurkacji $\mathcal{BLF}_G$ na analogicznie zdefiniowany indeks $\mathcal{BLF}_{T^n}$ (związek ten wynika z własności $U(G)$ -homomorfizmu stopnia gradientowych odwzorowań współmienniczych podanej w pracy [1]), zatem warunek (4.8) implikuje warunek

$$\sum_{j=1}^s \mathcal{BLF}_{T^n}(T^n(u_{i_j}), \lambda_j) = 0 \in U(T^n). \quad (4.9)$$

W konsekwencji, dowodzenie, że bifurkujące kontinua są nieograniczone, może być zredukowane do sprawdzania, że warunek (4.9) nie może być spełniony dla żadnych podzbiorów $(G(u_{i_1}) \times \{\lambda_1\}) \cup \dots \cup (G(u_{i_s}) \times \{\lambda_s\}) \subset \mathcal{T}$.

Na zakończenie omawiania zjawiska bifurkacji opiszemy tak zwaną bifurkację z nieskończoności. Zagadnienie to rozważaliśmy dla funkcjonałów asymptotycznie kwadratowych w nieskończoności. Dokładniej, zakładaliśmy, że G -niezmienniczy funkcjonał $\Phi \in C^2(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ jest postaci

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle K_{\infty}(\lambda)u, u \rangle_{\mathbb{H}} - \eta_{\infty}(u, \lambda), \quad (4.10)$$

gdzie L jest jak powyżej, a ponadto $K_{\infty}(\lambda): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jest liniowym, G -współzmienniczym, samosprężonym operatorem dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz odwzorowanie $(u, \lambda) \mapsto K_{\infty}(\lambda)u$ jest pełnociągłe. Dodatkowo $\nabla_u \eta_{\infty}: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest G -współzmienniczym, pełnociągłym operatorem takim, że $\nabla_u \eta_{\infty}(u, \lambda) = o(|u|)$, gdy $|u| \rightarrow \infty$ jednostajnie na ograniczonych λ -przedziałach.

Założmy, że istnieją $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ oraz $\gamma > 0$ takie, że $(\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon))^{-1}(0) \subset B_{\gamma}(\mathbb{H})$. Przy powyższych założeniach możemy zdefiniować indeks bifurkacji z nieskończoności, kładąc

$$\mathcal{BIF}(\infty, \lambda_0) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon), B_{\gamma}(\mathbb{H})) - \nabla_G\text{-deg}(\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon), B_{\gamma}(\mathbb{H})).$$

Oznaczmy $\nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda) = L - K_{\infty}(\lambda)$. Oczywiście gdy $\nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda)$ jest izomorfizmem dla każdego $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, to własność homotopijnej niezmienniczości stopnia implikuje, że $\mathcal{BIF}(\infty, \lambda_0) = 0$. Z drugiej strony, tak jak w przypadku globalnej bifurkacji, nietrywialność zdefiniowanego powyżej indeksu implikuje bifurkację rozwiązań. Jednak w tym przypadku, bifurkacja ta nie zachodzi z rodziny trywialnej, ale z nieskończoności. Rozumiemy przez to, że kontinuum rozwiązań przecina zbiór $(\mathbb{H} \setminus B_r(\mathbb{H})) \times [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ dla dowolnie małej wartości $\delta > 0$ oraz dowolnie dużej wartości $r > 0$. Dokładniej, z własności stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych, wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.13 (*Theorem 2.5 (A2)*) *Niech funkcjonał Φ spełnia opisane powyżej warunki. Ponadto, założmy, że $\ker \nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda_0) \neq \{0\}$ i dla pewnego $\varepsilon > 0$ spełnione jest założenie*

$$\{\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] : \nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda) \text{ nie jest izomorfizmem}\} = \{\lambda_0\}.$$

Jeżeli $\mathcal{BIF}(\infty, \lambda_0) \neq 0$, to istnieje $\varepsilon > 0$ oraz nieograniczony, domknięty, spójny podzbiór $\mathcal{C}$ zbioru $(\nabla_u \Phi)^{-1}(0) \cap (\mathbb{H} \times [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$ takie, że $\mathcal{C} \cap (B_{\gamma}(\mathbb{H}) \times \{\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon\}) \neq \emptyset$. Ponadto, kontinuum $\mathcal{C}$ dotyka (∞, λ_0) , to znaczy $\mathcal{C} \cap ((\mathbb{H} \setminus B_r(\mathbb{H})) \times [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]) \neq \emptyset$ dla dowolnie małej wartości $\delta > 0$ oraz dowolnie dużej wartości $r > 0$.

4.3 Spójne zbiory rozwiązań układów eliptycznych

Przejdziemy teraz do opisanie wyników dotyczących układów eliptycznych. W pracach z omawianego cyklu badaliśmy układy równań z warunkiem brzegowym Neumanna, określone na ograniczonym zbiorze niezmienniczym oraz układy na sferze. Opiszemy najpierw pierwsze z tych zagadnień. Przypomnijmy, że interesuje nas badanie spójnych zbiorów słabych rozwiązań takich układów, co jest równoważne problemowi badania spójnych zbiorów rozwiązań równania postaci (4.3). Do rozważania tego zagadnienia zastosujemy abstrakcyjne metody omówione w poprzednim rozdziale, w szczególności Twierdzenia 4.6, 4.7, 4.8, 4.11, 4.13.

Rozważać będziemy układy postaci (4.1), którą można również zapisać jako

$$\begin{cases} a_1 \Delta u_1 &= \nabla_{u_1} F(u, \lambda) & \text{w } \Omega \\ a_2 \Delta u_2 &= \nabla_{u_2} F(u, \lambda) & \text{w } \Omega \\ &\vdots & \\ a_p \Delta u_p &= \nabla_{u_p} F(u, \lambda) & \text{w } \Omega \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial u_p}{\partial \nu} &= 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.11)$$

Przyjmujemy przy tym następujące założenia:

- (a1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest otwartym, ograniczonym podzbiorem, z brzegiem klasy C^∞ ,
- (a2) $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz F spełnia następujący warunek wzrostu: istnieją stałe $C > 0$ oraz $0 \leq s < \frac{4}{N-2}$ (przy czym dla $N = 2$ przyjmujemy $s < \infty$) takie, że $|\nabla_u^2 F(u, \lambda)| \leq C(1 + |u|^s)$,
- (a3) u_0 jest punktem krytycznym funkcji F dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz istnieje macierz symetryczna B taka, że $\nabla_u^2 F(u_0, \lambda) = \lambda B$,
- (a4) istnieją liczby $0 \leq p_1 \leq p$ oraz $p_2 = p - p_1$ takie, że $a_1 = a_2 = \dots = a_{p_1} = -1$ oraz $a_{p_1+1} = \dots = a_p = 1$. Ponadto $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, gdzie B_1 oraz B_2 są symetrycznymi, rzeczywistymi macierzami wymiarów odpowiednio $p_1 \times p_1$ oraz $p_2 \times p_2$.

Zauważmy, że powyższe założenia implikują, że istnieje funkcja $\xi \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ taka, że $F(u, \lambda) = \frac{\lambda}{2}(Bu, u) - \lambda(Bu_0, u) + \xi(u - u_0, \lambda)$ oraz dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $\nabla_u \xi(0, \lambda) = 0$ i $\nabla_u^2 \xi(0, \lambda) = 0$.

Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^p H^1(\Omega)$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym przez $\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^p \langle u_i, v_i \rangle_{H^1(\Omega)}$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ jest iloczynem skalarnym na standardowej przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$ danym przez

$$\langle u_i, v_i \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u_i(x), \nabla v_i(x)) + u_i(x) \cdot v_i(x) dx.$$

Niech Φ będzie funkcjonałem zdefiniowanym wzorem (4.2). Założenie (a2) implikuje, że Φ jest klasy C^2 (vide np. [38]). Ponadto słabe rozwiązania układu (4.11) są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z punktami krytycznymi funkcjonału Φ .

Oznaczmy przez $\tilde{u}_0$ funkcję stałą o wartości u_0 . Zauważmy, że funkcjonał Φ ma następujące własności:

$$\nabla_u \Phi(u, \lambda) = L(u - \tilde{u}_0) + L_{\lambda B}(u - \tilde{u}_0) - \nabla_u \eta_0(u - \tilde{u}_0, \lambda), \quad (4.12)$$

gdzie

- 1) $L: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dany jest formułą $L(u_1, \dots, u_p) = (-a_1 u_1, \dots, -a_p u_p)$. Operator taki jest samosprężonym, ograniczonym operatorem Fredholma indeksu 0.
- 2) $L_{\lambda B}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ dany jest przez $\langle L_{\lambda B} u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} (Au(x) - \lambda Bu(x), v(x)) dx$ dla dowolnego $v \in \mathbb{H}$. Operator ten jest samosprężonym, ograniczonym operatorem pełnociągłym.
- 3) $\eta_0: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany jest przez $\eta_0(u, \lambda) = \int_{\Omega} \xi(u(x), \lambda) dx$. Wówczas operator $\nabla_u \eta_0: \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ jest pełnociągły oraz spełnia warunki $\nabla_u \eta_0(0, \lambda) = 0$, $\nabla_u^2 \eta_0(0, \lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Z powyższych własności wynika, że operator $L + L_{\lambda B}$ jest linearyzacją operatora $\nabla_u \Phi$. Opiszmy teraz spektrum tej linearyzacji.

Oznaczmy przez $\sigma(-\Delta; \Omega) = \{0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \dots\}$ zbiór wartości własnych operatora $-\Delta$ (z warunkami brzegowymi Neumanna) na Ω . Niech $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)$ będzie przestrzenią własną odpowiadającą $\beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega)$. Przypomnijmy, że $H^1(\Omega) = \text{cl}(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k))$, zatem dla każdego $u \in \mathbb{H}$ istnieje ciąg $\{u^k\}$ taki, że $u^k \in \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)$ oraz $u = \sum_{k=1}^{\infty} u^k$. Ponadto niech $b_1, \dots, b_{p_1}$ oraz $b_{p_1+1}, \dots, b_p$ będą wartościami własnymi (niekoniecznie różnymi) odpowiednio macierzy B_1 i B_2 z odpowiadającymi wektorami własnymi $f_1, \dots, f_p$.

Niech $\tau_j: \mathbb{H} \rightarrow H^1(\Omega)$ będzie rzutowaniem danym przez $\tau_j(u)(x) = (u(x), f_j)$ dla $j = 1, \dots, p$. Oczywiście, jeżeli $u^k \in \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)$, to $\tau_j(u^k) \in \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)$.

W Lemacie 3.4 pracy **(A4)**, opierając się na obliczeniach z dowodu Lematu 3.2 z pracy **(A2)**, sformułowaliśmy następujący opis operatora $L_{\lambda B}$:

Fakt 4.14 *Przy powyższych oznaczeniach, jeżeli $u = \sum_{k=1}^{\infty} u^k$, to*

$$L_{\lambda B} u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^p \frac{a_j - \lambda b_j}{1 + \beta_k} \tau_j(u^k) \cdot f_j.$$

Powyższy fakt pozwala na sformułowanie następującego opisu spektrum operatora $L + L_{\lambda B}$:

$$\begin{aligned} \sigma(L + L_{\lambda B}) &= \\ &= \left\{ \frac{\beta_k - \lambda b_j}{1 + \beta_k}; b_j \in \sigma(B_1), \beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega) \right\} \cup \left\{ \frac{-\beta_k - \lambda b_j}{1 + \beta_k}; b_j \in \sigma(B_2), \beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

W naszych pracach, oprócz warunków (a1)–(a4), zakładaliśmy dodatkowo, że układ ma pewne symetrie. Rozważmy następujące założenia:

- (S1) $\mathbb{R}^N$ jest ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G oraz Ω jest zbiorem G -niezmienniczym.
- (S2) $\mathbb{R}^p$ jest ortogonalną Γ -reprezentacją i funkcja F jest Γ -niezmiennicza dla pewnej zwartej grupy Liego Γ .

Zauważmy, że jeśli spełnione jest założenie (S1), to przestrzeń $\mathbb{H}$ jest ortogonalną reprezentacją grupy G z działaniem danym wzorem

$$(gu)(x) = u(g^{-1}x),$$

gdzie $g \in G, u \in \mathbb{H}, x \in \Omega$. Przy tak zdefiniowanym działaniu Φ jest funkcjonałem G -niezmienniczym.

Z drugiej strony, gdy spełnione jest założenie (S2), to możemy określić Γ -działanie na $\mathbb{H}$ przez

$$(\gamma u)(x) = \gamma \cdot u(x),$$

dla $\gamma \in \Gamma, u \in \mathbb{H}, x \in \Omega$. Przy tak określonym działaniu przestrzeń $\mathbb{H}$ jest ortogonalną Γ -reprezentacją oraz funkcjonal Φ jest Γ -niezmienniczy.

Ponadto, gdy spełnione są jednocześnie założenia (S1) i (S2), to na przestrzeni $\mathbb{H}$ możemy zdefiniować działanie grupy $\Gamma \times G$, kładąc

$$((\gamma, g)u)(x) = \gamma \cdot u(g^{-1}x).$$

Otrzymujemy wtedy, że przestrzeń $\mathbb{H}$ jest ortogonalną $\Gamma \times G$ -reprezentacją oraz funkcjonal Φ jest $\Gamma \times G$ -niezmienniczy.

Podsumowując, przy opisanych powyżej założeniach dla układu (4.11), przestrzeń $\mathbb{H}$ oraz stowarzyszony z układem funkcjonal spełniają warunki, przy których badaliśmy zachodzenie zjawiska bifurkacji. Poniżej opiszemy wyniki dotyczące układu (4.11) otrzymane przez zastosowanie Twierdzeń 4.6, 4.7, 4.8, 4.11, 4.13.

Rozpocznijmy od omówienia sytuacji, gdy spełnione jest założenie (S1). Układ (4.11) z tym założeniem rozpatrywaliśmy w pracy **(A2)**. Badaliśmy w niej istnienie nieograczonych zbiorów rozwiązań takiego układu, rozważając zachodzenie zjawiska bifurkacji z nieskończoności. Wobec tego w pracy tej nie zakładaliśmy istnienia punktu krytycznego funkcji F , zastępując założenie (a3) następującym warunkiem asymptotycznej kwadratości:

(a3') $F(u, \lambda) = \frac{\lambda}{2}(Bu, u) + \xi(u, \lambda)$, przy czym $\nabla_u \xi(u, \lambda) = o(|u|)$ dla $|u| \rightarrow \infty$.

Podkreślmy, że powyższe założenie również implikuje, że $\nabla_u \Phi$ dany jest formułą (4.12) (przy czym w tym przypadku przyjmujemy, że $\tilde{u}_0 = 0$) oraz, że operator $\nabla_u \eta_0$ spełnia warunek $\nabla_u \eta_0(u, \lambda) = o(|u|_{\mathbb{H}})$ dla $|u|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$. Używając standardowych oznaczeń, definiujemy operator $\nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda)$ poprzez $\nabla_u^2 \Phi(\infty, \lambda)u = Lu + L_{\lambda B}u$, nazywając ten operator linearyzacją $\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda)$ w nieskończoności.

Aby zastosować Twierdzenie 4.13 do operatora $\nabla_u \Phi$ opiszemy najpierw zbiór parametrów, z których może zachodzić bifurkacja. Połóżmy $\sigma^-(-\Delta; \Omega) = \{-\beta_k; \beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega)\}$. Biorąc pod uwagę formułę (4.13) otrzymujemy, że operator $\nabla^2 \Phi(\infty, \lambda)$ nie jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sigma(-\Delta; \Omega) \cap \sigma(\lambda B_1) \neq \emptyset \text{ lub } \sigma^-(-\Delta; \Omega) \cap \sigma(\lambda B_2) \neq \emptyset.$$

Oznaczmy przez Λ zbiór parametrów λ spełniających powyższy warunek. Z własności spektrum operatora $-\Delta$ wynika, że dla $\lambda_0 \in \Lambda$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$. Oznacza to, że poprawnie określony jest w tym przypadku indeks $\mathcal{BIF}(\infty, \lambda_0)$. Na mocy Twierdzenia 4.13, nietrywialność tego indeksu implikuje bifurkację z nieskończoności. Wobec tego naszym celem było podanie formuł na ten indeks, pozwalających badać, kiedy jest on różny od zera. Wykorzystując własności stopnia oraz opis spektrum operatora $L + L_{\lambda B}$ dany wzorem (4.13), wyznaczyliśmy takie formuły w Twierdzeniu 3.7 (dla $\lambda_0 \neq 0$) oraz Twierdzeniu 3.10 (dla $\lambda_0 = 0$) pracy **(A2)**. Rezultaty te, w połączeniu z Twierdzeniem 4.13 pozwalają opisać warunki, przy których zachodzi bifurkacja z nieskończoności. Aby je sformułować, oznaczmy

$$J_{B_1}(\lambda_0) = \left\{ (\beta_k, b_j) \in \sigma(-\Delta; \Omega) \times (\sigma(B_1) \setminus \{0\}); \lambda_0 = \frac{\beta_k}{b_j} \right\},$$

$$J_{B_2}(\lambda_0) = \left\{ (\beta_k, b_j) \in \sigma^-(-\Delta; \Omega) \times (\sigma(B_2) \setminus \{0\}); \lambda_0 = \frac{\beta_k}{b_j} \right\}.$$

Ponadto dla $i = 1, 2$ oraz $b \in \sigma(B_i)$ połóżmy $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)^{\mu_{B_i}(b)} = \text{span}\{h \cdot f; h \in \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k), f \in \mathbb{V}_{B_i}(b)\} \subset \mathbb{H}$, gdzie $\mu_{B_i}(b)$ oznacza krotność b jako wartości własnej macierzy B_i .

Twierdzenie 4.15 (*Theorem 3.12 (A2)*) *Niech G będzie zwartą i spójną grupą Liego oraz załóżmy, że $\lambda_0 \in \Lambda$. Jeżeli spełniony jest co najmniej jeden z warunków:*

(C1) *istnieje para $(\beta_k, b_j) \in J_{B_1}(\lambda_0)$ taka, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)^{\mu_{B_1}(b_j)}$ jest nietrywialną G -reprezentacją,*

(C2) *istnieje para $(\beta_k, b_j) \in J_{B_2}(\lambda_0)$ taka, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)^{\mu_{B_2}(b_j)}$ jest nietrywialną G -reprezentacją,*

(C3) *liczba $\sum_{(\beta_k, b_j) \in J_{B_1}(\lambda_0)} \mu_{-\Delta}(\beta_k) \cdot \mu_{B_1}(b_j) + \sum_{(\beta_k, b_j) \in J_{B_2}(\lambda_0)} \mu_{-\Delta}(\beta_k) \cdot \mu_{B_2}(b_j)$ jest nieparzysta,*

to istnieje $\varepsilon > 0$ i nieograniczony, domknięty, spójny zbiór $\mathcal{C} \subset (\mathbb{H} \times [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$ słabych rozwiązań układu (4.11) taki, że $\mathcal{C} \cap (B_\gamma(\mathbb{H}) \times \{\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon\}) \neq \emptyset$ dla dostatecznie dużych γ . Ponadto, $\mathcal{C}$ dotyka (∞, λ_0) , to znaczy $\mathcal{C} \cap ((\mathbb{H} \setminus B_r(\mathbb{H})) \times [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]) \neq \emptyset$ dla wszystkich $\delta, r > 0$.

Powyższy rezultat został zilustrowany w pracy **(A2)** układem zdefiniowanym na $\Omega = B^N$. W tym przypadku znany jest opis podprzestrzeni własnych operatora $-\Delta$ jako reprezentacji grupy $SO(N)$. Ponadto w pewnych sytuacjach wiadomo, kiedy takie podprzestrzenie są reprezentacjami nietrywialnymi, co pozwala na weryfikację warunków (C1), (C2) oraz (C3). Przykłady takie zostały opisane w rozdziale 4 pracy **(A2)**. W szczególności rozważaliśmy tam przypadek $N = 2$, czyli układu zdefiniowanego na dwuwymiarowej kuli. Oznaczmy, dla $k, n \in \mathbb{N}$, przez x_{kn} n -te rozwiązanie równania $J'_k(x) = 0$ w $(0, \infty)$ oraz (dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) przez x_{0n} n -te rozwiązanie równania $J'_0(x) = 0$ w $[0, \infty)$, gdzie J_k jest k -tą funkcją Bessela. Wiadomo wtedy, że $\sigma(-\Delta; B^2) = \{\lambda_{kn} = x_{kn}^2\}_{k,n=1}^\infty \cup \{\lambda_{0n} = x_{0n}^2\}_{n=0}^\infty$. Ponadto, gdy $k > 0$, reprezentacje $\mathbb{V}_{-\Delta}(\lambda_{kn})$ są nietrywialnymi $SO(2)$ -reprezentacjami. Zatem, jeśli $\lambda_{kn} \in \sigma(\lambda_0 B_1)$ dla $k > 0$, to spełnione są założenia Twierdzenia 4.15 i w konsekwencji otrzymujemy istnienie kontinuum $\mathcal{C} \subset (\mathbb{H} \times [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$ słabych rozwiązań układu (4.11) opisanego w tym twierdzeniu.

Przejdźmy teraz do układów, dla których spełnione są jednocześnie założenia (S1) i (S2). Układy takie badaliśmy w pracach **(A3)**, **(A4)**, **(A6)**.

W pracy **(A3)** rozważaliśmy układ kooperatywny, to znaczy taki, w którym wszystkie znaki po lewej stronie równania są takie same. Dokładniej, przyjmowaliśmy, że $a_i = -1$ dla $i = 1, \dots, p$, a zatem $p_1 = p$, gdzie p_1 dane jest w założeniu (a4). Ponadto w pracy tej zakładaliśmy, że $\Omega = B^N$, $\mathbb{R}^p$ jest ortogonalną reprezentacją pewnej zwartej grupy Liego Γ oraz potencjał F jest postaci $F(u, \lambda) = \lambda \tilde{F}(u)$ dla pewnej Γ -niezmienniczej funkcji $\tilde{F} \in C^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Rozważane zagadnienie było wobec tego postaci:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \nabla \tilde{F}(u) & \text{w } B^N \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{na } S^{N-1}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Dodatkowo, dla u_0 danego w założeniu (a3), przyjmowaliśmy, że spełnione są następujące warunki:

(a5) orbita $\Gamma(u_0)$ jest niezdegenerowana, to znaczy $\dim \ker \nabla^2 \tilde{F}(u_0) = \dim \Gamma(u_0)$,

(a6) $\Gamma_{u_0} = \{e\}$.

Zauważmy, że przyjęte założenia oznaczają, że układ spełnia warunki (S1) (dla $G = SO(N)$) oraz (S2). W szczególności przestrzeń $\mathbb{H}$ jest w tej sytuacji $\mathcal{G}$ -reprezentacją, dla $\mathcal{G} = \Gamma \times SO(N)$, oraz funkcjonal Φ jest $\mathcal{G}$ -niezmienniczy. Ponadto założenie (a6) implikuje, że $\mathcal{G}_{\tilde{u}_0} = \{e\} \times SO(N)$, gdzie, jak poprzednio, $\tilde{u}_0$ oznacza funkcję stałą o wartości u_0 . Problemem, który rozważaliśmy w tej pracy było zagadnienie globalnej bifurkacji słabych rozwiązań układu (4.14), czyli globalnej bifurkacji punktów krytycznych stowarzyszonego funkcjonału z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.

Położmy $\Lambda = \bigcup_{\alpha_j \in \sigma(B) \setminus \{0\}} \bigcup_{\beta_k \in \sigma(-\Delta; B^N)} \left\{ \frac{\beta_k}{\alpha_j} \right\}$. Wówczas, przy przyjętych dla układu (4.14) założeniach, z Faktu 4.5 oraz ze wzoru (4.13) wynika następujący warunek konieczny lokalnej bifurkacji:

Fakt 4.16 (*Lemma 3.1 (A3)*) *Jeżeli orbita $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$ jest orbitą lokalnej bifurkacji, to $\lambda_0 \in \Lambda$.*

Zauważmy, że z definicji zbioru Λ wynika, że dla $\lambda_0 \in \Lambda$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\Lambda \cap [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] = \{\lambda_0\}$. W rezultacie $\mathcal{G}(\tilde{u}_0)$ jest izolowaną orbitą krytyczną funkcjonałów $\Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, zatem, biorąc pod uwagę własności potoków indukowanych przez operatory gradientowe, poprawnie określone są niezmiennicze indeksy Conleya $\mathcal{CI}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}(\tilde{u}_0), -\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon))$. Możemy zatem do rozważanego układu stosować Twierdzenia 4.6 oraz 4.8. Rozważmy, kiedy spełnione są ich założenia. W pracy (A3) udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.17 (*Theorem 3.3 (A3)*) *Niech $\lambda_0 \in \Lambda$. Położmy $\sigma(\lambda_0 B) \cap \sigma(-\Delta; B^N) = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}\}$. Jeżeli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (C1) $\lambda_0 \neq 0$ i istnieje $i \in \{1, \dots, s\}$ takie, że $\dim \mathbb{V}_{-\Delta}(\alpha_{j_i}) > 1$,
- (C2) $\lambda_0 \neq 0$, $\dim \mathbb{V}_{-\Delta}(\alpha_{j_i}) = 1$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, s\}$ oraz $\dim \ker(Id + L_{\lambda_0 B}) - \dim \ker B$ jest liczbą nieparzystą,
- (C3) $\lambda_0 = 0$ oraz $\sum_{\alpha \in \sigma_+(B)} \mu_B(\alpha) - \sum_{\alpha \in \sigma_-(B)} \mu_B(\alpha)$ jest liczbą nieparzystą,

to

$$\mathcal{CI}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}(\tilde{u}_0), -\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon)) \neq \mathcal{CI}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}(\tilde{u}_0), -\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon)).$$

Biorąc pod uwagę własności podprzestrzeni własnych operatora $-\Delta$ na kuli oraz wzór (4.13), warunki (C1)-(C3) w powyższym twierdzeniu mogą być zastąpione przez:

- (C1') $\lambda_0 \neq 0$ i istnieje $i \in \{1, \dots, s\}$ takie, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\alpha_{j_i})$ jest nietrywialną $SO(N)$ -reprezentacją,
- (C2') $\lambda_0 \neq 0$, $\dim \mathbb{V}_{-\Delta}(\alpha_{j_i}) = 1$ dla każdego $i \in \{1, \dots, s\}$ oraz $\sum_{i=1}^s \mu_{\lambda_0 B}(\alpha_{j_i}) - \mu_B(0)$ jest liczbą nieparzystą,
- (C3') $\lambda_0 = 0$ oraz liczba $p - \dim \ker B$ jest nieparzysta.

Aby udowodnić Twierdzenie 4.17, redukujemy porównywanie indeksów Conleya potoków generowanych przez $-\nabla_u \Phi(\cdot, \lambda_0 \pm \varepsilon)$ do porównywania indeksów potoków generowanych przez skończenie wymiarowe aproksymacje tych operatorów. Wiadomo, że indeksy te są różne, jeżeli różne są ich współzmiennicze charakterystyki Eulera. Wykorzystując fakt, że para $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_{\tilde{u}_0})$ jest dopuszczalna oraz pewne fakty dotyczące charakterystyk Eulera G -CW-kompleksów udowodnione w [35], porównywanie takich charakterystyk można

sprowadzić do porównywania charakterystyk indeksów odwzorowań określonych na przestrzeni normalnej do orbity. Wiadomo, że przestrzeń taka jest $\mathcal{G}_{\tilde{u}_0}$ -reprezentacją. Ponieważ $\mathcal{G}_{\tilde{u}_0} = \{e\} \times SO(N)$, ostatecznie nasze zagadnienie sprowadza się do porównywania $SO(N)$ -charakterystyk Eulera $SO(N)$ -CW-kompleksów postaci $\mathcal{S}^{\mathcal{W}(\lambda_o \pm \varepsilon)}$, gdzie $\mathcal{W}(\lambda_o \pm \varepsilon)$ są pewnymi $SO(N)$ -reprezentacjami. Do ich opisu wykorzystujemy charakterystykę podprzestrzeni własnych operatora Laplace'a (z warunkami brzegowymi Neumanna) na kuli (zamieszczoną w pracy **(A3)** jako Appendix 5.4).

Łatwo zauważyć, że w opisanym powyżej dowodzie uzasadniamy nie tylko, że przy założeniach Twierdzenia 4.17 spełniony jest warunek (W1), ale także, biorąc pod uwagę definicję uogólnionej niezmienniczej charakterystyki Eulera, że spełnione są założenia Twierdzenia 4.8. Wobec tego otrzymujemy następujący rezultat o globalnej bifurkacji:

Twierdzenie 4.18 (*Theorem 3.5 (A3)*) *Rozważmy układ (4.14) z potencjałem $\tilde{F}$ oraz punktem krytycznym $u_0 \in \nabla \tilde{F}^{-1}(0)$ spełniającymi założenia (a1)-(a6) (dla $F(u, \lambda) = \lambda \tilde{F}(u)$). Załóżmy, że $\lambda_0 \in \Lambda$ jest takie, że spełniony jest jeden z warunków (C1)-(C3) danych w Twierdzeniu 4.17. Wtedy zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.14) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Szczególnym przypadkiem parametru bifurkacji opisanym przez powyższe twierdzenie jest $\lambda_0 = 0$. Wykazaliśmy, że gdy spełniony jest warunek (C3), to z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{0\}$ zachodzi globalna bifurkacja. Z drugiej strony, gdy $\sum_{\alpha \in \sigma_+(B)} \mu_B(\alpha) - \sum_{\alpha \in \sigma_-(B)} \mu_B(\alpha)$ jest liczbą parzystą, to odpowiednie charakterystyki Eulera są równe, zatem stosując opisane metody, nie można badać globalnej bifurkacji z takiej orbity. Okazuje się jednak, że w niektórych przypadkach, przy założeniu słabszym niż (C3), można wykazać zachodzenie bifurkacji lokalnej. Dokładniej, udowodniliśmy następujący rezultat:

Twierdzenie 4.19 (*Theorem 3.8 (A3)*) *Rozważmy układ (4.14) z potencjałem $\tilde{F}$ i punktem krytycznym $u_0 \in \nabla \tilde{F}^{-1}(0)$ spełniającymi założenia (a1)-(a6). Przypuśćmy, że $\lambda_0 = 0$ oraz $\sum_{\alpha \in \sigma_+(B)} \mu_B(\alpha) \neq \sum_{\alpha \in \sigma_-(B)} \mu_B(\alpha)$. Wtedy z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{0\}$ zachodzi zjawisko lokalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.14).*

Zagadnieniem związanym z rozważaniem globalnej bifurkacji w sytuacji współzmienniczej jest badanie grup izotropii elementów bifurkującej rodziny. W szczególności interesuje nas, kiedy zachodzi zjawisko globalnego łamania symetrii. Przyjmujemy przy tym następującą definicję:

Definicja 4.20 *Mówimy, że zachodzi zjawisko globalnego łamania symetrii z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$ jeżeli $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$ jest orbitą globalnej bifurkacji oraz istnieje zbiór $U \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ taki, że $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\} \subset U$ oraz $\mathcal{G}_{(u, \lambda)} \neq \mathcal{G}_{(\tilde{u}_0, \lambda_0)}$ dla wszystkich $(u, \lambda) \in (U \cap (\nabla_u \Phi)^{-1}(0)) \setminus \mathcal{T}$.*

Zagadnienie to badaliśmy w pracy **(A3)** dla układu (4.14), otrzymując następujący rezultat:

Twierdzenie 4.21 (*Theorem 3.10 (A3)*) *Rozważmy układ (4.14) z potencjałem $\tilde{F}$ oraz punktem krytycznym $u_0 \in \nabla \tilde{F}^{-1}(0)$ spełniającymi założenia (a1)-(a6). Ustalmy $\lambda_0 \in \Lambda$ i założymy, że $\sigma(\lambda_0 B) \cap \sigma(-\Delta; B^N) \setminus \{0\} = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s}\}$ oraz $\mathbb{V}_{-\Delta}(\alpha_{j_i})^{SO(N)} = \{0\}$ dla każdego $i = 1, \dots, s$. Wtedy zachodzi zjawisko globalnego łamania symetrii z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, uogólniliśmy lemat uzasadniony przez Dancera w pracy [6]. Mówi on, że jeżeli jądro drugiej pochodnej funkcjonau w punkcie bifurkacji nie zawiera niezerowych elementów radialnie symetrycznych, to w otoczeniu tego punktu wszystkie nietrywialne rozwiązania nie są radialne. Przypomnijmy, że rozwiązaniem radialnym nazywamy rozwiązanie u spełniające warunek $SO(N)_u = SO(N)$. Łatwo zauważyć, że rezultatu Dancera nie można użyć w przypadku $\dim \mathcal{G}(\tilde{u}_0) > 0$, ponieważ wtedy $\ker \nabla_u^2 \Phi(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ zawiera stałe, a zatem radialnie symetryczne, funkcje z przestrzeni stycznej do orbity. Wobec tego w dowodzie Twierdzenia 4.21 użyliśmy ogólniejszego rezultatu (vide Lemma 3.11 (A3)), mówiącego, że grupy izotropii nietrywialnych rozwiązań z otoczenia $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$ zawierają się w grupie $\mathcal{G}_{\bar{u}}$ dla pewnego $\bar{u} \in \ker \nabla_u^2 \Phi_{|\mathbb{H}_+^1}(\tilde{u}_0, \lambda_0) \setminus \{0\}$. Wykorzystując formułę (4.13) do opisu powyższego jądra, otrzymujemy dowód Twierdzenia 4.21. Przykłady układów, dla których zachodzi zjawisko globalnego łamania symetrii, zostały podane w rozdziale 4 pracy (A3). Ponownie wykorzystaliśmy przy tym opis przestrzeni własnych operatora $-\Delta$ jako reprezentacji grupy $SO(N)$.

Kolejnym etapem naszych badań było rozważenie układu niekooperatywnego. Zajmowaliśmy się tym w pracy (A4). Dokładniej, w pracy tej rozpatrywaliśmy układ postaci (4.11), przy założeniach (a1)-(a4). Ponadto przyjęliśmy, że:

(S1') Ω jest zbiorem $SO(N)$ -niezmienniczym,

czyli założyliśmy, że spełnione jest (S1) dla $G = SO(N)$ oraz, że spełniona jest następująca wersja założenia (S2):

(S2') $\mathbb{R}^{p_1}$ oraz $\mathbb{R}^{p_2}$ są ortogonalnymi Γ -reprezentacjami i funkcja F jest Γ -niezmiennicza, gdzie Γ jest pewną zwartą grupą Liego.

Dodatkowo w artykule tym przyjęliśmy, że spełniony jest warunek:

(a5') orbita $\Gamma(u_0)$ jest niezdegenerowana dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, to znaczy $\dim \Gamma(u_0) = \dim \ker \nabla_u^2 F(u_0, \lambda)$.

Ponadto ponownie założyliśmy, że zachodzi

(a6) $\Gamma_{u_0} = \{e\}$.

Przy takich założeniach badaliśmy zagadnienie globalnej bifurkacji z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$. Niech

$$\Lambda = \bigcup_{b_j \in \sigma(B_1) \setminus \{0\}} \bigcup_{\beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega)} \left\{ \frac{\beta_k}{b_j} \right\} \cup \bigcup_{b_j \in \sigma(B_2) \setminus \{0\}} \bigcup_{\beta_k \in \sigma(-\Delta; \Omega)} \left\{ -\frac{\beta_k}{b_j} \right\}.$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, korzystając z Faktu 4.5 oraz ze wzoru (4.13) otrzymujemy, że bifurkacja lokalna, a zatem również globalna, może zachodzić jedynie dla $\lambda_0 \in \Lambda$.

Warunek wystarczający bifurkacji globalnej sformułujemy osobno dla przypadku $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \{0\}$ oraz $\lambda_0 = 0$. Połóżmy

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1(\lambda) &= \bigoplus_{\substack{(\beta_k, b_j) \in \sigma(-\Delta; \Omega) \times \sigma(B_1) \setminus \{0\} \\ \lambda b_j = \beta_k}} \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)^{\mu_{B_1}(b_j)}, \\ \mathbb{V}_2(\lambda) &= \bigoplus_{\substack{(\beta_k, b_j) \in \sigma(-\Delta; \Omega) \times \sigma(B_2) \setminus \{0\} \\ \lambda b_j = -\beta_k}} \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_k)^{\mu_{B_2}(b_j)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Zachodzą wówczas następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4.22 (*Theorem 3.9 (A4)*) *Rozważmy układ (4.11) z potencjałem F oraz punktem krytycznym u_0 spełniającymi założenia (a1)-(a4), (a5'), (a6), (S1'), (S2'). Ustalmy $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \{0\}$ i załóżmy, że $SO(N)$ -reprezentacja $\mathbb{V}_1(\lambda_0) \oplus \mathbb{R}^{2m}$ nie jest równoważna z $\mathbb{V}_2(\lambda_0) \oplus \mathbb{R}^{2n}$ dla żadnych wartości $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gdzie $\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{R}^{2n}$ są trywialnymi $SO(N)$ -reprezentacjami. Wtedy zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.11) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Oznaczmy przez $m^+(B)$ dodatni indeks Morse'a, czyli sumę krotności dodatnich wartości własnych macierzy B .

Twierdzenie 4.23 (*Theorem 3.10 (A4)*) *Rozważmy układ (4.11) z potencjałem F oraz punktem krytycznym u_0 spełniającymi założenia (a1)-(a4), (a5'), (a6), (S1'), (S2'). Niech $\lambda_0 = 0$ i załóżmy, że $(-1)^{m^+(B)} \neq (-1)^{m^-(B)}$. Wtedy zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.11) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.*

Dowód obu powyższych twierdzeń opiera się na wykazaniu, że spełniony jest warunek (W2). Zauważmy najpierw, że z definicji zbioru Λ wynika, że dla $\lambda_0 \in \Lambda$ istnieje ε takie, że $\Lambda \cap [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] = \{\lambda_0\}$, co oznacza, że stopnie w warunku (W2) są poprawnie określone. Ponadto z Twierdzenia 4.9 oraz z faktu, że para $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_{\tilde{u}_0})$ jest dopuszczalna wynika, że sprawdzenie, że warunek ten jest spełniony redukuje się do wykazania, że

$$\nabla_{\mathcal{G}_{\tilde{u}_0}}\text{-deg}(\nabla_u \Psi(\cdot, \lambda_0 + \varepsilon), B_\delta(\tilde{u}_0, \mathbb{W})) \neq \nabla_{\mathcal{G}_{\tilde{u}_0}}\text{-deg}(\nabla_u \Psi(\cdot, \lambda_0 - \varepsilon), B_\delta(\tilde{u}_0, \mathbb{W})),$$

gdzie $\mathbb{W} = (T_{\tilde{u}_0} \mathcal{G}(\tilde{u}_0))^\perp$ oraz $\Psi = \Phi|_{\mathbb{W}}$. Obliczając stopnie w powyższej formule wykorzystaliśmy własności stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych, formułę (4.13) oraz pochodzący z pracy [13] fakt opisujący, kiedy stopnie minus identyczności na pewnych reprezentacjach mogą być równe.

Opisane powyżej rezultaty dotyczyły globalnej bifurkacji z orbity rozwiązań stałych $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$, otrzymanej z niezdegenerowanej orbity $\Gamma(u_0) \subset \mathbb{R}^p$. Rozważmy teraz sytuację, gdy taka orbita jest zdegenerowana, czyli nie jest spełnione założenie (a5'). Przypadek taki rozważaliśmy w pracy (A6). Badaliśmy w niej układ (4.11) określony na zbiorze

$\Omega = B^N$, co implikuje, że spełniony jest warunek (S1) dla $G = SO(N)$. Dla uproszczenia obliczeń przyjęliśmy, że wszystkie znaki po lewej stronie równania są takie same i równe -1 , zatem rozważany układ jest postaci

$$\begin{cases} -\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda) & \text{w } B^N \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{na } S^{N-1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Przyjmowaliśmy przy tym, że spełnione są założenia (a2), (a3), (a6) oraz (S2). Dodatkowo zakładaliśmy, że

- (a7) orbita $\Gamma(u_0)$ jest izolowana w zbiorze $(\nabla_u F(\cdot, \lambda))^{-1}(0)$, czyli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\nabla_u F(\cdot, \lambda))^{-1}(0) \cap \Gamma(u_0)_\varepsilon = \Gamma(u_0)$, gdzie $\Gamma(u_0)_\varepsilon$ jest ε -otoczeniem $\Gamma(u_0)$ w $\mathbb{R}^p$,
- (a8) $\deg_B(\nabla_u F|_{(T_{u_0}\Gamma(u_0))^\perp}(\cdot, \lambda), B_\varepsilon(T_{u_0}\Gamma(u_0))^\perp, 0) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz odpowiednio małego ε , gdzie $\deg_B$ oznacza stopień Brouwera.

Zauważmy, że ponieważ zakładamy, że orbita jest zdegenerowana, to warunek konieczny lokalnej bifurkacji spełniony jest dla każdego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$. Może się wobec tego zdarzyć, że rozważana orbita punktów krytycznych stowarzyszonego funkcjonału nie jest izolowana dla żadnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Uwzględniając taką sytuację, udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.24 (*Theorem 3.8 (A6)*) *Rozważmy układ (4.16) z potencjałem F oraz punktem u_0 spełniającymi warunki (a2), (a3), (a6)-(a8) oraz (S2). Niech $\alpha_0 \in \sigma(B) \setminus \{0\}$ oraz $\beta_0 \in \sigma(-\Delta; B^n) \setminus \{0\}$ będzie takie, że $\dim \mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_0) > 1$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ takiego, że $0 \notin (\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \varepsilon, \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \varepsilon)$, zachodzi co najmniej jedna z możliwości:*

- (i) *zachodzi lokalna bifurkacja rozwiązań układu (4.16) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda\}$ dla każdego $\lambda \in (\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \varepsilon, \frac{\beta_0}{\alpha_0})$ lub dla każdego $\lambda \in (\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \varepsilon)$,*
- (ii) *zachodzi globalna bifurkacja rozwiązań układu (4.16) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\hat{\lambda}\}$ dla pewnego $\hat{\lambda} \in (\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \varepsilon, \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \varepsilon)$.*

Ponieważ teza powyższego twierdzenia jest alternatywą, do jego dowodu zakładaliśmy, że nie jest spełniony warunek (i) i pokazaliśmy, że zachodzi wtedy (ii). Dokładniej, gdy (i) nie zachodzi, to istnieją wartości $\lambda_-, \lambda_+ \in (\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \varepsilon, \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \varepsilon)$, dla których możemy badać odpowiednik warunku (W2). Aby zweryfikować ten warunek, korzystaliśmy z Twierdzenia 4.10. Następnie porównywaliśmy stopnie zdegenerowanych punktów krytycznych. W tym celu stosowaliśmy tak zwany lemat o rozszczepianiu, udowodniony w pracy [12].

W opisanych powyżej rezultatach skupiliśmy się na wykazywaniu, że pewna orbita jest orbitą globalnej bifurkacji. Przypomnijmy, że oznacza to, że bifurkujący zbiór słabych rozwiązań jest nieograniczony albo jest ograniczony oraz jego przecięcie z rodziną

trywialną nie składa się z tylko jednej orbity. Naturalne jest wobec tego pytanie, czy możemy stwierdzić, która z możliwości tej alternatywy zachodzi w danej sytuacji. Aby odpowiedzieć na to pytanie, będziemy dowodzić, że w pewnych sytuacjach jedna z tych możliwości nie może zachodzić. W tym celu wykorzystamy Twierdzenie 4.11, w którym zawarliśmy dodatkową charakteryzację ograniczonej rodziny rozwiązań.

Rozważmy ponownie układ (4.11), dla którego spełnione są założenia (a1)-(a4), (a5'), (a6), (S1') oraz (S2'). Ponadto dla uniknięcia technicznych obliczeń przyjmijmy dodatkowe założenie:

$$(a9) \quad B_1 = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1), B_2 = Id.$$

W szczególności z założenia tego wynika, że $\mu_B(0) = \mu_{B_1}(0) = \dim \Gamma(u_0)$.

Przy takich założeniach sformułowaliśmy warunki na istnienie nieograniczonych kontinuumów rozwiązań. Przypomnijmy, że przez $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ oznaczamy składową spójności zbioru $\text{cl}(\mathcal{N})$ zawierającą $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$. Zachodzi wówczas następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.25 (*Proposition 3.14, Proposition 3.16 oraz Theorem 3.17 (A4)*) *Rozważmy układ (4.11) z potencjałem F oraz punktem krytycznym u_0 spełniającymi warunki (a1)-(a4), (a5'), (a6), (a9), (S1') oraz (S2'). Ustalmy $\beta_{k_0} \in \sigma(-\Delta; \Omega)$ takie, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_{k_0})$ jest nietrywialną $SO(N)$ -reprezentacją. Wówczas*

- 1) *jeżeli $p_1 - \mu_B(0) > 0$ to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.11) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\beta_{k_0}\}$,*
- 2) *jeżeli $p_2 > 0$ to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.11) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{-\beta_{k_0}\}$.*

Ponadto

1. *jeżeli $p_2 - \mu_B(0) > 0$ oraz $p_2 \geq 0$ są liczbami parzystymi to kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \beta_{k_0})$ jest nieograniczone,*
2. *jeżeli $p_2 - \mu_B(0) \geq 0$ oraz $p_2 > 0$ są liczbami parzystymi to kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, -\beta_{k_0})$ jest nieograniczone.*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na wykazaniu, że warunek (4.8) nie może być spełniony dla żadnego podzbioru zbioru $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \beta_{k_0}) \cap \mathcal{T}$. Biorąc pod uwagę Fakt 4.12 zamiast indeksów $\mathcal{BLF}_{\mathcal{G}}$ możemy w tym warunku rozważać indeksy $\mathcal{BLF}_H$, gdzie H jest grupą izotropii $\tilde{u}_0$. Ponieważ z przyjętych założeń wynika, że $H = \{e\} \times SO(N)$, indeksy te mogą być zastąpione przez indeksy $\mathcal{BLF}_{SO(N)}$. Założenie, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_{k_0})$ jest nietrywialną $SO(N)$ -reprezentacją implikuje, że istnieje włożenie $i: SO(2) \rightarrow SO(N)$ takie, że $\mathbb{V}_{-\Delta}(\beta_{k_0})$ jest również nietrywialną $SO(2)$ -reprezentacją. Następnie, rozważając homomorfizm $i^*: U(SO(N)) \rightarrow U(SO(2))$ indukowany przez to włożenie, badamy, czy może być spełniony odpowiednik warunku (4.8) dla indeksów $\mathcal{BLF}_{SO(2)}$. Biorąc pod uwagę formuły na iloczyn generatorów w pierścieniu $U(SO(2))$ można wywnioskować, że kontinua

ograniczone mogą istnieć tylko dla pewnych wartości p_1, p_2 . W szczególności przy założeniach Twierdzenia 4.25 takie kontinua ograniczone nie mogą istnieć.

Przejdziemy teraz do omówienia rezultatów dotyczących układów zdefiniowanych na sferze. Zagadnienia takie rozważaliśmy w pracach **(A5)** i **(A6)**. Rozpoczniemy od omówienia zjawiska globalnej bifurkacji z orbity dla takich układów. Dopuszczamy przy tym sytuację, gdy orbita taka otrzymana jest ze zdegenerowanej orbity punktów krytycznych potencjału.

W pracy **(A6)** rozważaliśmy układ następującej postaci:

$$-\Delta u = \nabla_u F(u, \lambda) \text{ na } S^{N-1}, \quad (4.17)$$

przy czym $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_p)$ oraz Δ jest w tym przypadku operatorem Laplace'a-Beltramiego na sferze. Dla takiego układu założyliśmy, że spełnione są warunki (a2), (a3), (a6)-(a8) oraz warunek (S2). Ponadto w tej sytuacji w naturalny sposób spełniony jest warunek (S1) dla $G = SO(N)$.

Łatwo zauważyć że przyjęte założenia są analogiczne jak dla układu (4.16). Również metody stosowane do badania obu tych układów są analogiczne. Dokładniej, słabe rozwiązania układu (4.17) są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z punktami krytycznymi funkcjonału

$$\Phi(u, \lambda) = \int_{S^{N-1}} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - F(u(x), \lambda) d\sigma, \quad (4.18)$$

określonego na przestrzeni $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^p H^1(S^{N-1})$. Ponownie, jak w przypadku funkcjonału (4.2), otrzymujemy, że funkcjonał (4.18) jest klasy C^2 oraz jego gradient jest postaci (4.12). Jednak w odróżnieniu od sytuacji opisanej w Twierdzeniu 4.24, dla układu (4.17) można sformułować warunek konieczny bifurkacji lokalnej.

$$\text{Połóżmy } \Lambda = \bigcup_{\alpha_j \in \sigma(B) \setminus \{0\}} \bigcup_{\beta_k \in \sigma(-\Delta; S^{N-1}) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\beta_k}{\alpha_j} \right\}.$$

Fakt 4.26 (*Lemma 3.5 (A6)*) *Jeżeli $(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ jest punktem skupienia nietrywialnych rozwiązań układu (4.17), to $\lambda_0 \in \Lambda$.*

W dowodzie powyższego faktu wykorzystujemy współmiennicze twierdzenie o funkcji uwikłanej z pracy [12] oraz informację, że jedyną przestrzenią własną operatora $-\Delta$, która jest trywialną $SO(N)$ -reprezentacją, jest przestrzeń $\mathbb{V}_{-\Delta}(0)$ odpowiadająca zerowej wartości własnej. Pozwala to wywnioskować, że $\ker \nabla_u^2 \Phi(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ musi zawierać podprzestrzeń własną operatora $-\Delta$ odpowiadającą niezerowej wartości własnej, co w połączeniu z odpowiednikiem wzoru (4.13) implikuje tezę. Podkreślmy, że argument taki nie mógł być zastosowany przy rozważaniu układu (4.16), gdyż dla laplasjanu rozważanego na kuli istnieją radialne funkcje własne inne niż stałe.

Okazuje się, że w przypadku układu (4.17), warunek konieczny jest jednocześnie warunkiem wystarczającym, gdyż globalna bifurkacja zachodzi dla każdego parametru $\lambda \in \Lambda$. Dokładniej, wykazaliśmy następujący rezultat:

Twierdzenie 4.27 (*Theorem 3.7 (A6)*) Rozważmy układ (4.17) z potencjałem F i punktem krytycznym u_0 spełniającymi warunki (a2), (a3), (a6)-(a8) oraz warunek (S2) i niech $\lambda_0 \in \Lambda$. Wówczas zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu (4.17) z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$.

Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.24 i opiera się na lemacie o rozszczepianiu oraz Twierdzeniu 4.10. Jednak w przypadku sfery wiadomo, że dla dowolnej niezerowej wartości własnej operatora $-\Delta$ odpowiadająca podprzestrzeń własna jest nieprzywiedlną i nietrywialną $SO(N)$ -reprezentacją, co pozwala wykazać, że dla λ_0 spełniony jest warunek (W2).

Analogicznie jak w przypadku układów określonych na kuli, również dla układów zdefiniowanych na sferze badaliśmy strukturę bifurkującego kontinuum, rozważając, kiedy można wykluczyć jedną z możliwości w Twierdzeniu 4.11. Zagadnienie takie rozważane było w pracy (A5). Pierwszym z problemów, którymi zajmowaliśmy się w tej pracy było istnienie kontinuumów nieograniczonych bifurkujących z rodziny trywialnej odpowiadającej jednej niezdegenerowanej orbicie krytycznej. Dokładniej, rozważaliśmy następujący układ:

$$\begin{cases} a_1 \Delta u_1 &= \nabla_{u_1} F(u, \lambda) \\ a_2 \Delta u_2 &= \nabla_{u_2} F(u, \lambda) \\ &\vdots \\ a_p \Delta u_p &= \nabla_{u_p} F(u, \lambda) \end{cases} \quad \text{na } S^{N-1} \quad (4.19)$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a-Beltramiego na sferze. Przyjmowaliśmy przy tym, że spełnione są założenia podobne do założeń (a2)-(a6) i (S2) w przypadku układu zdefiniowanego na kuli, a dokładniej zakładaliśmy, że :

- (b1) $F \in C^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz F spełnia następujący warunek wzrostu: istnieją stałe $C > 0$ oraz $0 \leq s < \frac{4}{N-2}$ takie, że $|\nabla_u^2 F(u, \lambda)| \leq C(1 + |u|^s)$,
- (b2) u_0 jest punktem krytycznym potencjału F dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $\nabla_u^2 F(u_0, \lambda) = \lambda B$, gdzie $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_p)$, $b_i \in \{0, 1\}$,
- (b3) $\mathbb{R}^p$ jest ortogonalną reprezentacją grupy Liego Γ oraz F jest funkcją Γ -niezmienniczą ze względu na pierwszą zmienną,
- (b4) $a_i \in \{-1, 1\}$ oraz $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ jest Γ -automorfizmem, to znaczy $A\gamma = \gamma A$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$,
- (b5) $\Gamma_{u_0} = \{e\}$,
- (b6) orbita $\Gamma(u_0) \subset (\nabla_u F(\cdot, \lambda))^{-1}(0)$ jest niezdegenerowana dla każdego $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zagadnienie to badaliśmy metodami analogicznymi jak w przypadku układu (4.11), rozważając funkcjonal

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{S^{N-1}} \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) d\sigma - \int_{S^{N-1}} F(u(x), \lambda) d\sigma,$$

zdefiniowany na przestrzeni $\mathbb{H} = \bigoplus_{i=1}^p H^1(S^{N-1})$. Biorąc pod uwagę, że sfera jest zbiorem $SO(2)$ -niezmienniczym oraz uwzględniając założenie (b3), rozważaliśmy przestrzeń $\mathbb{H}$ z działaniem grupy $\mathcal{G} = \Gamma \times SO(2)$ danym przez $(\gamma, \alpha)(u)(x) = \gamma u(\alpha x)$, dla $\gamma \in \Gamma, \alpha \in SO(2)$.

Przestrzeń $\mathbb{H}$ z tak zdefiniowanym działaniem jest ortogonalną $\mathcal{G}$ -reprezentacją, a funkcjonal Φ jest $\mathcal{G}$ -niezmienniczy. Ponadto funkcjonal ten ma własności analogiczne jak funkcjonal określony dla układu (4.11). W szczególności jego gradient również jest postaci (4.12), gdzie operatory L oraz $L_{\lambda B}$ zdefiniowane są jak poprzednio. Zachodzi także odpowiednik wzoru (4.13). Dokładniej, vide Lemma 3.2 w pracy **(A5)**, wartościami własnymi operatora $L + L_{\lambda B}$ mogą być wyłącznie liczby $\frac{\beta_m - \lambda}{1 + \beta_m}, \frac{-\beta_m - \lambda}{1 + \beta_m}, \frac{\beta_m}{1 + \beta_m}, \frac{-\beta_m}{1 + \beta_m}$, dla $\beta_m \in \sigma(-\Delta, S^{N-1})$, z krotnościami odpowiednio

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\beta_m - \lambda}{1 + \beta_m}\right) &= n_-, \quad \mu\left(\frac{-\beta_m - \lambda}{1 + \beta_m}\right) = n_+, \\ \mu\left(\frac{\beta_m}{1 + \beta_m}\right) &= n_-^0, \quad \mu\left(\frac{-\beta_m}{1 + \beta_m}\right) = n_+^0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

gdzie n_- oznacza liczbę współczynników k w układzie (4.19) takich, że $a_k = -1, b_k = 1$, n_+ takich, że $a_k = 1, b_k = 1$, n_-^0 takich, że $a_k = -1, b_k = 0$ oraz n_+^0 takich, że $a_k = 1, b_k = 0$. W szczególności, w zależności od postaci układu, niektóre z powyższych krotności mogą wynosić 0.

Przy powyższych założeniach orbita $\mathcal{G}(\tilde{u}_0)$ jest orbitą krytyczną funkcjonału Φ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, zatem definiując w tym przypadku rodzinę trywialną jako $\mathcal{T} = \mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \mathbb{R}$, badamy zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda\} \subset \mathcal{T}$. Zauważmy, że bifurkacja może wystąpić tylko w przypadku, gdy $\lambda \in \mathbb{R}$ jest takie, że orbita $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda\}$ jest zdegenerowana. Ponadto, oznaczając przez Λ zbiór takich parametrów, otrzymujemy, vide Lemma 3.3 pracy **(A5)**, że

$$\Lambda = \begin{cases} \sigma(-\Delta, S^{N-1}) & \text{gdy } n_- > 0, n_+ = 0 \\ \sigma^-(-\Delta, S^{N-1}) & \text{gdy } n_- > 0, n_+ = 0 \\ \sigma(-\Delta, S^{N-1}) \cup \sigma^-(-\Delta, S^{N-1}) & \text{gdy } n_- n_+ > 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Warunek wystarczający globalnej bifurkacji dany jest przez Twierdzenie 4.7, zatem do jego badania używamy indeksu $\mathcal{BLF}_{\mathcal{G}}$. Korzystając z Twierdzenia 4.9, zamiast tego indeksu można rozważać indeks $\mathcal{BLF}_H$, gdzie $H = \mathcal{G}_{\tilde{u}_0}$. Jednak ponieważ $H = \{e\} \times SO(2)$, ten ostatni indeks jest we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z analogicznie zdefiniowanym indeksem $\mathcal{BLF}_{SO(2)}$. Aby wyznaczyć taki indeks, przeanalizowaliśmy strukturę $SO(2)$ -reprezentacji dla przestrzeni własnych operatora $-\Delta$, oznaczanych przez $\mathcal{H}_m^N$, czyli przestrzeni harmonicznych, jednorodnych wielomianów N zmiennych stopnia m . W szczególności w Dodatku A.1 pracy **(A5)** wyznaczyliśmy pełny opis $SO(2)$ -reprezentacji $\mathcal{H}_m^N$ jako sumy prostej reprezentacji nieprzywiedlnych. W rezultacie, biorąc

pod uwagę wzory na mnożenie w pierścieniu $U(SO(2))$ oraz formuły (4.20), wyznaczyliśmy indeksy $\mathcal{BIF}_{SO(2)}$, vide Lemma 3.4 w pracy (A5) oraz dokładne wzory na wartości ich współrzędnych, vide Lemma 3.5 tej pracy. Pozwoliło to na udowodnienie następujących warunków wystarczających globalnej bifurkacji:

Fakt 4.28 (*Corollary 3.6 (A5)*) *Rozważmy układ (4.19) z potencjałem F i punktem krytycznym u_0 spełniającymi założenia (b1)-(b6). Ustalmy $\beta_{m_0} \in \sigma(-\Delta, S^{N-1}) \setminus \{0\}$. Wówczas*

1. *jeżeli $n_- > 0$, to $\mathcal{BIF}_{SO(2)}(\mathcal{G}(\tilde{u}_0), \beta_m) \neq 0 \in U(SO(2))$, a zatem zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\beta_m\}$,*
2. *jeżeli $n_+ > 0$, to $\mathcal{BIF}_{SO(2)}(\mathcal{G}(\tilde{u}_0), -\beta_m) \neq 0 \in U(SO(2))$, a zatem zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{-\beta_m\}$.*

Ponadto opisane powyżej obliczenia pozwoliły sformułować warunki na istnienie nieograniczonych kontynuów rozwiązań. W tym celu użyliśmy Twierdzenia 4.11. Biorąc pod uwagę Fakt 4.12, weryfikacja warunku (4.8) może być sprowadzona do weryfikacji analogicznego warunku dla indeksów $\mathcal{BIF}_{SO(2)}$. Wykorzystując wyznaczone formuły na te indeksy możemy wykazać, że w pewnych sytuacjach warunek (4.8) nie może być spełniony, a zatem bifurkujące kontinua muszą być nieograniczone. Dokładniej, oznaczając przez $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \beta)$ kontinuum słabych rozwiązań układu (4.19) bifurkujące z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\beta\}$, otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.29 (*Theorem 3.7 i Theorem 3.8 (A5)*) *Rozważmy układ (4.19) z potencjałem F i punktem krytycznym u_0 spełniającymi założenia (b1)-(b6). Ustalmy $\beta_{m_0} \in \sigma(-\Delta, S^{N-1})$. Wówczas*

1. *jeżeli $n_- > 0$, to kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \beta_{m_0}) \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ jest nieograniczone,*
2. *jeżeli $n_+ > 0$, to kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, -\beta_{m_0}) \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ jest nieograniczone,*
3. *jeżeli n_-, n_+ są różnej parzystości, to kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, 0) \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ jest nieograniczone.*

Przypomnijmy, że otrzymane za pomocą twierdzenia o globalnej bifurkacji kontinuum rozwiązań jest podzbiorem zbioru $\text{cl}(\mathcal{N})$ (vide Definicja 4.4), przy czym zbiór $\mathcal{N}$ był definiowany jako zbiór rozwiązań, które nie należą do rodziny $\mathcal{T}$. W powyższych rozważaniach przyjęliśmy $\mathcal{T} = \mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \mathbb{R}$, co oznacza, że jeżeli układ (4.19) ma rozwiązania stałe, które nie należą do $\mathcal{G}(\tilde{u}_0)$, to nie są one traktowane jako rozwiązania trywialne. W szczególności, jeżeli istnieje rodzina postaci $\mathcal{G}(\tilde{u}) \times \mathbb{R}$, różna od $\mathcal{T}$, rozwiązań układu (4.19), to jest ona nieograniczona, a zatem może zdarzyć się sytuacja, gdy otrzymane w Twierdzeniu 4.29 nieograniczone kontinuum zawiera taką rodzinę. W konsekwencji kontinuum takie może zawierać jedynie ograniczony zbiór rozwiązań innych niż stałe. Żeby wykluczyć taką sytuację, należy rozważyć rodzinę trywialną odpowiadającą wszystkim rozwiązaniom stałym

układu (4.19). W pracy **(A5)** badaliśmy również taką sytuację. Dla uproszczenia obliczeń opisaliśmy jedynie przypadek, gdy funkcja F ma dwie orbity krytyczne.

Rozważaliśmy zatem ponownie układ (4.19), zastępując założenia (b2) oraz (b6) założeniami:

(b2') u_1 oraz u_2 są punktami krytycznymi funkcji F dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, gdzie $\Gamma(u_1) \cap \Gamma(u_2) = \emptyset$ oraz $\nabla^2 F(u_1, \lambda) = \nabla^2 F(u_2, \lambda) = \lambda B$, gdzie $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_p)$, $b_i \in \{0, 1\}$,

(b6') orbity $\Gamma(u_1)$ i $\Gamma(u_2)$ są niezdegenerowane dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Przy powyższych założeniach definiujemy rodzinę trywialną $\mathcal{T}$ jako $(\mathcal{G}(\tilde{u}_1) \cup \mathcal{G}(\tilde{u}_2)) \times \mathbb{R}$ i rozważamy globalną bifurkację rozwiązań układu (4.19) z orbit tej rodziny. Rozumując jak poprzednio, otrzymujemy, że gdy $n_- > 0$ (odpowiednio $n_+ > 0$), to globalna bifurkacja zachodzi z orbit $\mathcal{G}(\tilde{u}_i) \times \{\beta_m\}$ (odpowiednio $\mathcal{G}(\tilde{u}_i) \times \{-\beta_m\}$) dla $i = 1, 2$ oraz z orbit $\mathcal{G}(\tilde{u}_i) \times \{0\}$, gdy n_-, n_+ są różnej parzystości, vide Lemma 4.1 pracy **(A5)**. Ponadto w niektórych sytuacjach możemy udowodnić, że bifurkujące kontinua są nieograniczone. Analogicznie jak poprzednio przez $\mathcal{C}(\tilde{u}_i, \lambda_0)$ oznaczać będziemy kontinuum bifurkujące z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_i) \times \{\lambda_0\}$.

Twierdzenie 4.30 (*Theorem 4.3 (A5)*) *Rozważmy układ (4.19) z potencjałem F oraz punktami krytycznymi u_1, u_2 spełniającymi założenia (b1), (b2'), (b3)-(b5) oraz (b6'). Ustalmy $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \{0\}$, gdzie Λ zdefiniowane jest wzorem (4.21). Jeżeli spełniony jest jeden z warunków:*

(1) n_+, n_- są tej samej parzystości,

(2) $n_- \neq 2n_+$ oraz $n_+ \neq 2n_-$,

to, dla $i = 1, 2$, kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_i, \lambda_0)$ jest nieograniczone.

Idea dowodu powyższego twierdzenia opiera się na rozważeniu wartości własnej $\beta_\mu \in \sigma(-\Delta; S^{N-1})$ takiej, że β_μ jest maksymalnym lub $-\beta_\mu$ jest minimalnym poziomem, na którym kontinuum $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ przecina rodzinę $\mathcal{T}$. Inaczej mówiąc, jeżeli $\mathcal{G}(\tilde{u}_i) \times \{\lambda_1\} \subset \mathcal{C}(\tilde{u}, \lambda_0) \cap \mathcal{T}$, to $|\lambda_1| \leq \beta_\mu$. Obliczając sumę indeksów bifurkacji daną w formule (4.8), a dokładniej współrzędną odpowiadającą $\mathbb{Z}_\mu$ tej sumy dla μ określonego powyżej, otrzymujemy, że warunek (4.8) nie może być spełniony, zatem bifurkujące kontinuum jest nieograniczone.

W szczególności z powyższego twierdzenia wynika, że dla układu kooperatywnego, czyli takiego dla którego $n_- \cdot n_+ = 0$, wszystkie bifurkujące kontinua $\mathcal{C}(\tilde{u}_0, \lambda_0)$ dla $\lambda_0 \neq 0$ są nieograniczone, vide Corollary 4.4 pracy **(A5)**.

W ogólniejszej sytuacji, gdy nie przyjmujemy dodatkowych założeń takich jak warunki (1) lub (2) w Twierdzeniu 4.30, nadal możemy udowodnić, że istnieją nieograniczone kontinua, jednak bez konkretnego określania, z jakiej orbity one bifurkują. Dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.31 (*Theorem 4.5 (A5)*) *Rozważmy układ (4.19) z potencjałem F oraz punktami krytycznymi u_1, u_2 spełniającymi założenia (b1), (b2'), (b3)-(b5) oraz (b6'). Ustalmy $\beta_m \in \sigma(-\Delta; S^{N-1}) \setminus \{0\}$. Wtedy co najmniej jedno z czterech kontynuów $\mathcal{C}(\tilde{u}_i, \pm\beta_m)$, $i = 1, 2$, jest nieograniczone.*

Idea dowodu polega w tym przypadku na wykazaniu, że również gdy założenia Twierdzenia 4.30 nie są spełnione, to warunek (4.8) nie może zachodzić dla pewnych kontynuów $\mathcal{C}(\tilde{u}_i, \pm\beta_m)$. Aby to uzasadnić, ponownie używaliśmy formuł na wartości współrzędnych indeksów $\mathcal{BIF}_{SO(2)}$.

Powyższe twierdzenia dotyczyły bifurkacji z orbity $\mathcal{G}(\tilde{u}_0) \times \{\lambda_0\}$, dla $\lambda_0 \neq 0$. Dla $\lambda_0 = 0$, wykorzystując analogiczne podejście, udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.32 (*Theorem 4.6 (A5)*) *Rozważmy układ (4.19) z potencjałem F oraz punktami krytycznymi u_1, u_2 spełniającymi założenia (b1), (b2'), (b3)-(b5) oraz (b6'). Jeżeli n_-, n_+ są różnej parzystości, to kontinua $\mathcal{C}(\tilde{u}_i, 0)$ dla $i = 1, 2$ są nieograniczone.*

4.4 Podsumowanie

Podsumowując, w pracach z cyklu (A1)-(A6) otrzymaliśmy rezultaty dotyczące globalnej bifurkacji z orbit punktów krytycznych funkcjonałów niezmienniczych. Z jednej strony rozwijaliśmy abstrakcyjne metody pozwalające dowodzić globalnej bifurkacji. W rezultacie otrzymaliśmy uogólnienie Globalnego Twierdzenia Bifurkacyjnego Rabinowitza dla pewnej klasy problemów. Podkreśliśmy, że przedstawione w drugiej części omówienia twierdzenia dotyczące układów eliptycznych pokazują, że wybór tej klasy jest naturalny. Z drugiej strony, wykazaliśmy, że zastosowanie tych metod pozwala uzyskać nowe wyniki dotyczące zbiorów rozwiązań sparametryzowanych układów równań eliptycznych, w szczególności twierdzenia o globalnej bifurkacji rozwiązań nietrywialnych oraz twierdzenia o istnieniu nieograniczonych kontynuów rozwiązań układu.

Za najważniejsze rezultaty cyklu (A1)-(A6) można uznać wyniki będące rozwinięciem nowych metod obliczania niezmienników topologicznych w sytuacji z symetriami (Twierdzenia 4.9 i 4.10) oraz twierdzenia dotyczące globalnej bifurkacji rozwiązań układów eliptycznych (Twierdzenia 4.15, 4.18, 4.19, 4.22, 4.24, 4.25, 4.27, 4.29, 4.30). Podkreśliśmy, że udowodnienie Twierdzeń 4.9 i 4.10 wymagało połączenia metod teorii stopnia współzmienniczych odwzorowań gradientowych i niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych, teorii niezmienniczych funkcji Morse'a oraz teorii reprezentacji zwartych grup Liego. Do dowodzenia rezultatów dotyczących układów eliptycznych używaliśmy teorii stopnia współzmienniczych odwzorowań gradientowych i niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych oraz niezmienniczego indeksu Conleya. Dodatkowo opisaliśmy pewne przestrzenie jako reprezentacje zwartych grup Liego oraz stosowaliśmy własności pierścieni Eulera takich grup.

4.5 Informacja o wkładzie autorów publikacji (A1)-(A6)

We wszystkich pracach w wymienionym cyklu byłam głównym autorem, wykonującym istotną część pracy. Ponadto w każdym przypadku brałam udział w redagowaniu rezultatów. Dla poszczególnych prac mój udział można określić następująco:

- W pracy **(A1)** mój wkład polegał na udowodnieniu głównego rezultatu abstrakcyjnego tego artykułu, czyli związku stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych z niezmienniczym indeksem Conleya (w powyższym omówieniu rezultat ten podany jest jako Twierdzenie 4.2). Na podstawie tego twierdzenia sformułowałam warunki na to, aby różnica indeksów Conleya implikowała globalną bifurkację rozwiązań równania. Ponadto zaproponowałam pewne elementy dowodu formuły produktowej. Swój udział w tej pracy oceniam na 70%.
- W pracy **(A2)** jestem autorem większości dowodów rezultatów sformułowanych w tym artykule. W szczególności przeprowadziłam obliczenia niezbędne do wyznaczenia indeksów bifurkacji, co pozwoliło na udowodnienie głównych wyników (vide Twierdzenie 4.15 w powyższym omówieniu). Swój udział w tej pracy oceniam na 70%.
- W pracy **(A3)** udowodniłam główny rezultat artykułu (vide Twierdzenie 4.18), w którym podane są warunki wystarczające bifurkacji rozwiązań rozważanego układu. Dla dowodu tego rezultatu uzasadniłam, że przy tych warunkach odpowiednie indeksy Conleya są różne (Twierdzenie 4.17). Ponadto wspólnie z pozostałymi autorami tej pracy sformułowałam przykłady ilustrujące otrzymane rezultaty. Swój udział w tej pracy oceniam na 35%.
- W pracy **(A4)** udowodniłam główny rezultat abstrakcyjny artykułu, pozwalający sprowadzić porównywanie stopni w otoczeniu orbity do porównywania stopni odwzorowań obciętych do przestrzeni normalnej do orbity w przypadku skończonego wymiarowym (Twierdzenie 4.9). Rezultat ten pozwolił na badanie globalnej bifurkacji rozwiązań układu równań eliptycznych. Moim wkładem było również udowodnienie twierdzenia dotyczącego tego zagadnienia. Swój udział w tej pracy oceniam na 60%.
- W pracy **(A5)** badane było zagadnienie istnienia globalnej bifurkacji w przypadku rodziny trywialnej pochodzącej od jednej orbity lub od dwóch orbit. Moim wkładem było zbadanie przypadku jednej orbity (Twierdzenie 4.29), który pozwolił potem sformułować również rezultaty dla przypadku dwóch orbit. Swój udział w pracy oceniam na 60%.
- W pracy **(A6)**, podobnie jak w przypadku pracy **(A4)**, mój wkład polegał na udowodnieniu głównego rezultatu abstrakcyjnego tej pracy, pozwalającego na po-

równywanie stopni w otoczeniu orbity, o której tym razem nie zakłada się, że jest niezdegenerowana (Twierdzenie 4.10). Swoj udział w pracy oceniam na 40%.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

Dorobek naukowy, który nie jest uwzględniony w cyklu (A1)-(A6) składa się z następujących jedenastu prac:

- (P1) Fura Justyna, Ratajczak (Gołębiewska) Anna, Rybicki Sławomir: Existence and continuation of periodic solutions of autonomous Newtonian systems, *Journal of Differential Equations*, vol. 218, nr 1, 2005, s. 216–252.
- (P2) Fura Justyna, Gołębiewska Anna, Ruan Haibo: Existence of nonstationary periodic solutions of Γ -symmetric asymptotically linear autonomous Newtonian systems with degeneracy, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 40, nr 3, 2010, s. 873–911.
- (P3) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir: Global bifurcations of critical orbits of G -invariant strongly indefinite functionals, *Nonlinear Analysis : theory, methods and applications*, vol. 74, nr 5, 2011, s. 1823–1834.
- (P4) Gołębiewska Anna: Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 400, nr 1, 2013, s. 254–265.
- (P5) Błaszczak Zbigniew, Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir: Conley index in Hilbert spaces versus the generalized topological degree, *Advances in Differential Equations*, vol. 22, nr 11-12, 2017, s. 963–982.
- (P6) Gołębiewska Anna: Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian Systems with resonance, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 30, nr 4, 2018, s. 1509–1524.
- (P7) Gołębiewska Anna, Hirano Norimichi, Rybicki Sławomir: Global symmetry-breaking bifurcations of critical orbits of invariant functionals, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, vol. 12, nr 7, 2019, s. 2005–2017.
- (P8) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir, Stefaniak Piotr: Connected sets of solutions of symmetric elliptic systems, *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, vol. 202, 2021, s. 1–14.
- (P9) Gołębiewska Anna, Kowalczyk Marta, Rybicki Sławomir, Stefaniak Piotr: Periodic solutions to symmetric Newtonian systems in neighborhoods of orbits of equilibria, *Electronic Research Archive*, vol. 30, nr 5, 2022, s. 1691–1707.
- (P10) Gołębiewska Anna, Pérez-Chavela Ernesto, Rybicki Sławomir, Ureña Antonio J.: Bifurcation of closed orbits from equilibria of Newtonian systems with Coriolis forces, *Journal of Differential Equations*, vol. 338, 2022, s. 441–473.

- (P11) Gołębiewska Anna, Rybicki Sławomir: Generalization of Lyapunov center theorem for Hamiltonian systems via normal forms theory, Journal of Differential Equations, vol. 421, 2025, s. 241–263.

Artykuły (P1) i (P2) zostały napisane przed uzyskaniem stopnia doktora (praca (P2) została przyjęta do druku w roku 2008, a opublikowana w roku 2010). Ponadto artykuły (P3) i (P4) w dużej mierze opierają się na wynikach uzyskanych w rozprawie doktorskiej.

Tematyka większości tych prac związana jest z teorią stopnia współmienniczych odwzorowań gradientowych. Uzyskane rezultaty dotyczą zarówno rozwoju teorii tego stopnia jak i jego zastosowań, głównie do równań różniczkowych zwyczajnych. Ponadto w niektórych pracach stosowane są inne metody topologii niezmienniczej, w szczególności niezmienniczy indeks Conleya, zaś w pracy (P5) rozważana jest sytuacja bez działania grupy.

Omówimy teraz pokrótce najważniejsze rezultaty otrzymane w tych pracach.

5.1 Rezultaty dotyczące rozwoju teorii stopnia gradientowych odwzorowań współmienniczych

Głównym narzędziem topologicznym używanym w naszych badaniach jest stopień gradientowych odwzorowań współmienniczych (zdefiniowany przez Gębę w pracy [14]) oraz jego uogólnienia na przestrzenie nieskończone wymiarowe. W szczególności jedno z takich uogólnień, a dokładniej stopień niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych, zostało zdefiniowane w pracy (P3). Definicja ta (vide Definition 3.2 (P3)) oraz dowód, że jest ona poprawna i niezależna od wyboru schematu aproksymacyjnego, stanowi główny rezultat abstrakcyjny tej pracy. Ponadto w artykule tym udowodnione zostały (vide Theorem 3.1 (P3)) własności zdefiniowanego stopnia, analogiczne do własności stopnia Leray-Schaudera, oraz podane zostało globalne twierdzenie bifurkacyjne dla odpowiedniej klasy funkcjonałów (Theorem 3.3 (P3)).

Jako szczególny przypadek powyższej definicji można przyjąć stopień funkcjonałów silnie nieokreślonych w sytuacji bez działania grupy, biorąc $G = \{e\}$. Przypadek ten rozważaliśmy w pracy (P5). Przedstawiliśmy w niej definicję tak zwanego uogólnionego stopnia topologicznego, stosując konstrukcję stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych dla grupy trywialnej. Ponadto w pracy (P5) wykazaliśmy (vide Theorem 3.10 (P5)), że dla uogólnionego stopnia topologicznego zachodzi związek między stopniem a $\mathcal{LS}$ -homotopijnym indeksem Conleya (zdefiniowanym dla odpowiednich operatorów w pracy [15]), będący uogólnieniem twierdzenia Poincaré-Hopfa na przypadek tych niezmienników. Rezultat ten pozwala wykazywać globalną bifurkację rozwiązań równania postaci (4.3) poprzez porównywanie indeksów Conleya dla pewnych parametrów. W pracy (P5) badaliśmy funkcjonal postaci $\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \langle (L + \lambda L_0)u, u \rangle_{\mathbb{H}} + \eta_0(u, \lambda)$, gdzie L, L_0, η_0 spełniają założenia analogiczne do założeń dla funkcjonału (4.10) oraz zachodzi $\nabla_u \Phi(0, \lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$. Rozważyliśmy przy tym dwa przypadki: gdy $L + \lambda_i L_0$ są izomorfizmami dla $i = 1, 2$ (Theorem 4.2 (P5)) oraz gdy linearyzacje takie mają dwu-

wymiarowe jądra (Theorem 4.3 **(P5)**). W obu tych sytuacjach sformułowaliśmy warunki, przy których zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji.

Podkreślmy, że obliczanie niezmienników topologicznych, takich jak stopień czy indeks Conleya, w sytuacji, gdy linearyzacja operatora nie jest izomorfizmem, wymaga innych metod niż w przypadku izomorfizmu. Aby wyznaczyć formuły na takie niezmienniki, konstruuje się homotopie łączące rozważane odwzorowania z pewnym odwzorowaniem produktowym. Rezultat takiego typu, z dodatkowym warunkiem, że skonstruowana homotopia jest gradientowa i G -współzmiennicza, został udowodniony w pracy **(P1)**, jako tak zwany Lemat o rozszczepianiu (vide Lemma 3.2 oraz Lemma 3.3 **(P1)**). Biorąc pod uwagę własność homotopijnej niezmienniczości stopnia, wynik taki pozwala w wielu sytuacjach wyznaczyć współrzędne stopnia gradientowych odwzorowań współzmiennicznych.

Jednym z zagadnień, do których używamy teorii stopnia, jest badanie zjawiska globalnej bifurkacji. Podstawowym twierdzeniem stosowanym przy tym zagadnieniu jest Globalne Twierdzenie Bifurkacyjne Rabinowitza oraz jego różne uogólnienia, opisane w omówieniu prac cyklu **(A1)-(A6)**. Głównym założeniem tego twierdzenia jest nietrywialność indeksu bifurkacji, rozumianego jako różnica pewnych stopni. Dlatego szczególne znaczenie w naszych rozważaniach ma porównywanie stopni pewnych odwzorowań. Problem ten badaliśmy również w pracy **(P8)**, stosując podejście polegające na wykorzystaniu związku stopnia odwzorowań niezmienniczych z niezmienniczym indeksem Conleya. W Twierdzeniu 2.2 tej pracy wykazaliśmy warunek wystarczający na to, że dwa indeksy Conleya są różne. Jego dowód polegał na badaniu rozkładów komórkowych G -CW-kompleksów będących takimi indeksami. Pozwoliło to na udowodnienie, że jeżeli przestrzeń punktów stałych działania grupy izotropii na pewnej sumie prostej przestrzeni własnych hesjanu jest nieparzystego wymiaru, to zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji (vide Theorem 2.6 **(P8)**).

Przy badaniu globalnej bifurkacji w sytuacji niezmienniczej naturalne jest pytanie o to, jakie są grupy izotropii bifurkujących punktów. W szczególności interesuje nas zjawisko łamania symetrii, czyli bifurkacji rozwiązań, których grupa izotropii jest inna niż punktów w rodzinie trywialnej. Zjawisko takie badaliśmy w pracy **(P7)**, formułując warunki wystarczające globalnego łamania symetrii (vide Theorem 3.3 **(P7)**). Podstawowym założeniem tego rezultatu jest warunek, że jądro linearyzacji operatora nie zawiera punktów stałych działania grupy. Podkreślmy, że warunek ten można zweryfikować dla pewnych operatorów stowarzyszonych z układami równań różniczkowych, co zilustrowaliśmy rozważając konkretne przykłady układów eliptycznych.

5.2 Rezultaty dotyczące rozwiązań okresowych układów newtonowskich i hamiltonowskich

Metody topologii niezmienniczej mogą być używane do badania zbiorów rozwiązań różnego rodzaju równań różniczkowych. W cyklu **(A1)-(A6)** skupiliśmy się na zastosowaniu takich metod do badania układów eliptycznych. W pracach **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P6)**,

(P9) oraz (P10) badaliśmy takimi narzędziami zbiory rozwiązań okresowych układów newtonowskich i hamiltonowskich.

Pierwszym z zagadnień rozważanych w tych pracach było istnienie rozwiązań okresowych takich układów. Problem ten badaliśmy w pracach (P1), (P2), (P4), (P6). Wspólną ideą tych prac jest zdefiniowanie indeksu rozwiązania stacjonarnego oraz, przy założeniu, że potencjał układu jest asymptotycznie kwadratowy w nieskończoności, również tak zwanego indeksu nieskończoności. Indeksy te definiowane są jako stopnie gradientu funkcjonału stowarzyszonego z układem na odpowiednio małym otoczeniu rozwiązania stacjonarnego (lub odpowiednio dużym dysku w przypadku nieskończoności). Jeżeli suma indeksów rozwiązań stacjonarnych różni się od indeksu nieskończoności, to własności stopnia implikują istnienie niestacjonarnych okresowych rozwiązań układu.

Podkreślmy, że funkcjonały odpowiadające układom newtonowskim i hamiltonowskim są różnego typu. W pierwszym przypadku gradient takiego funkcjonału jest pełnociągłym zaburzeniem identyczności, zaś w drugim jest to funkcjonał silnie nieokreślony, którego gradient jest pełnociągłym zaburzeniem liniowego operatora Fredholma indeksu zero. Oznacza to, że do badania punktów krytycznych takich funkcjonałów muszą być stosowane nieco inne narzędzia, analogicznie jak w przypadku kooperatywnych i niekooperatywnych układów równań eliptycznych. Ponadto w naszych pracach rozważaliśmy również sytuację, gdy układ ma dodatkowe symetrie oraz gdy linearyzacja operatora stowarzyszonego z układem nie jest izomorfizmem, w każdym przypadku odpowiednio modyfikując używane narzędzia.

Sytuacja układów newtonowskich rozważana była w pracach (P1) i (P2), odpowiednio w sytuacji, gdy układ nie ma dodatkowych symetrii oraz gdy potencjał jest Γ -niezmienniczy, przy czym Γ jest skończoną grupą. W pracy (P1) sformułowaliśmy twierdzenia o istnieniu rozwiązań stacjonarnych w dwóch przypadkach: gdy linearyzacja stowarzyszonego operatora jest izomorfizmem dla każdego rozwiązania stacjonarnego (vide Theorem 5.2.1 (P1)) oraz bez takiego założenia (vide Theorem 5.2.2 (P1)), używając w dowodzie Lematu o rozszczepianiu, udowodnionego w tej pracy.

W pracy (P2), przy założeniu, że układ ma dodatkowe symetrie pewnej skończonej grupy Liego Γ , rozważania zostały ograniczone do sytuacji, gdy istnieje tylko jedno rozwiązanie stacjonarne. Uwzględnienie informacji o symetriach układu pozwala nie tylko na podanie rezultatu o istnieniu rozwiązań niestacjonarnych układu, ale również na oszacowanie z dołu ich liczby. Podkreślmy, że indeksy rozwiązań stacjonarnych oraz indeks nieskończoności są w tym przypadku elementami pierścienia Eulera $U(\Gamma \times S^1)$. Ponieważ obliczanie indeksów wymaga wyznaczania iloczynów pewnych stopni, istotna jest znajomość struktury multiplikatywnej takiego pierścienia, która jest bardziej skomplikowana niż w przypadku pierścienia $U(S^1)$. Struktura taka jest opisana w szczególności dla pewnych skończonych grup. W pracy (P2) zilustrowaliśmy nasze wyniki, przyjmując jako Γ grupę diedralną D_n dla $n = 6, 8, 10, 12$.

Rezultaty dotyczące istnienia rozwiązań układów hamiltonowskich podane zostały w pracach (P4) i (P6). W pierwszej z nich policzone zostały indeksy rozwiązań stacjonarnych, zarówno w przypadku, gdy linearyzacja stowarzyszonego operatora jest izomorfi-

zmem, jak i bez tego założenia. Obliczając indeks nieskończoności rozważaliśmy wyłącznie przypadek, gdy linearyzacja odpowiedniego operatora jest izomorfizmem. Wyznaczenie takich indeksów pozwoliło na sformułowanie twierdzeń o istnieniu rozwiązań, vide Theorem 3.1 oraz Theorem 3.2 pracy **(P4)**, oraz twierdzenia o kontynuacji rozwiązań dla układu z parametrem (Theorem 3.3 **(P4)**).

W pracy **(P6)** badany był przypadek, gdy linearyzacja w nieskończoności stowarzyszonego operatora nie jest izomorfizmem. Rozważając pewne dodatkowe założenia na potencjał układu wykazaliśmy, że stowarzyszony funkcjonal spełnia tak zwane silne warunki kątowe wprowadzone przez Li i Su w pracy [29], co pozwoliło na obliczenie indeksu nieskończoności oraz udowodnienie istnienia rozwiązań niestacjonarnych również w tym przypadku, vide Theorem 3.1 pracy **(P6)**. Ponadto w pracy tej rozważyliśmy układ z parametrem, dowodząc twierdzenia o bifurkacji z nieskończoności.

Innym sposobem dowodzenia istnienia rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich lub newtonowskich jest stosowanie rezultatów typu twierdzenie Lapunowa o centrum. Omówmy przypadek układów hamiltonowskich postaci

$$\dot{u}(t) = JH'(u(t)), \quad (5.1)$$

gdzie J jest standardową macierzą symplektyczną. Klasyczne Twierdzenie Lapunowa, vide [28], mówi, że jeżeli istnieje para $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ czysto urojonych wartości własnych macierzy $J_{2N}H''(0)$, spełniających tak zwany warunek braku rezonansu, czyli $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$ gdzie $\lambda_j, j = 3, \dots, 2N$ są innymi wartościami własnymi $J_{2N}H''(0)$, to istnieje spójna gałąź rodziny zamkniętych trajektorii rozwiązań układu, emanująca z początku układu współrzędnych. Rezultat taki można uogólnić wykorzystując teorię globalnej bifurkacji dla układów hamiltonowskich. Dokładniej, stosując zamianę zmiennych $u(t) = v(\frac{t}{\lambda})$, można zamienić problem badania istnienia rozwiązań okresowych, o dowolnym okresie, na problem badania istnienia rozwiązań 2π -okresowych dla układu sparametryzowanego, a zatem problem bifurkacyjny. Do takiego zagadnienia można stosować globalne twierdzenie bifurkacyjne udowodnione za pomocą stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych (vide Theorem 3.3 **(P3)**). W przypadku układów hamiltonowskich rezultat taki został wcześniej wykazany, przy pomocy innych metod, przez Dancera i Rybickiego w pracy [8]. Z twierdzenia tego wynika, że globalna bifurkacja jest implikowana przez nietrywialność indeksu bifurkacji będącego elementem pierścienia $U(S^1)$. Każda współrzędna takiego indeksu jest iloczynem indeksu Brouwera położenia równowagi układu (czyli stopnia Brouwera odwzorowania H' w małym otoczeniu $u_0 \in (H')^{-1}(0)$) oraz różnicy (dla parametrów λ w otoczeniu parametru bifurkacji), indeksów Morse'a pewnych macierzy zależnych od $\lambda H''(u_0)$. Zatem dowodzenie bifurkacji sprowadza się do obliczania tych wartości. Problem ten rozważaliśmy w pracach **(P10)** i **(P11)**.

W pracy **(P10)** zajmowaliśmy się szczególnymi przypadkami układu (5.1), a mianowicie planarnym oraz przestrzennym układem newtonowskim z siłami Coriolisa. Układy takie opisują modele wielu zagadnień mechaniki klasycznej, które można sprowadzić do problemu ruchu ciała pod wpływem działania siły wytworzonej przez jednostajnie wiru-

jące źródło. Przykładem takiego zagadnienia jest klasyczny ograniczony kołowy problem trzech ciał.

Układy takie można zapisać w postaci $\ddot{q} - 2\alpha\dot{q} + V'(q) = 0$, gdzie V jest potencjałem efektywnym, zaś α pewną macierzą. Przyjmując $H(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + \langle p, \alpha q \rangle + V(q) - \frac{1}{2}\langle q, \alpha^2 q \rangle$, otrzymujemy, że postać ta jest równoważna (5.1). W pracy **(P10)** udowodniliśmy (vide Theorem 3.1 dla przypadku planarnego oraz Theorem 3.3 **(P10)** dla przypadku przestrzennego) rezultaty dotyczące istnienia spójnych zbiorów rozwiązań okresowych takich układów, emanujących z położenia równowagi q_0 , w zależności od wartości własnych macierzy $V''(q_0)$. Jako przykład zastosowania tych rezultatów rozważyliśmy trójkątne ograniczone zagadnienie czterech ciał w trójwymiarowej przestrzeni, dowodząc bifurkacji spójnego zbioru rozwiązań okresowych z siedmiu położen równowagi.

W przypadku ogólnego układu hamiltonowskiego obliczanie różnicy indeksów Morse’a dla parametrów w otoczeniu parametru bifurkacji jest zadaniem bardziej skomplikowanym. Aby wykonać te obliczenia, zastosowaliśmy w pracy **(P11)** metodę form normalnych dla macierzy hamiltonowskich. Polega ona na przyporządkowaniu danej macierzy hamiltonowskiej macierzy w konkretnej postaci, tak zwanej formy normalnej. Przyporządkowanie takie może być rozumiane jako analogia do wyznaczania postaci Jordana, jednak w tym przypadku wyznaczona macierz musi pozostać w klasie macierzy hamiltonowskich. Okazuje się, że można to osiągnąć, jeżeli zamiana zmiennych jest specjalnej postaci, a dokładniej jest to symplektyczna zamiana zmiennych. Sprowadzenie macierzy do formy normalnej upraszcza obliczanie indeksu bifurkacji. W szczególności pozwala to na sformułowanie warunków wystarczających globalnej bifurkacji (vide Theorem 3.15 **(P11)**) oraz, w konsekwencji, na udowodnienie twierdzenia typu Lapunowa o emanacji zbioru rozwiązań niestacjonarnych układu (5.1) z położenia równowagi (Theorem 3.1 **(P11)**).

Rezultaty typu twierdzenia Lapunowa o centrum zostały udowodnione również dla układów newtonowskich z dodatkowymi symetriami. Zagadnienie to badaliśmy w pracy **(P9)**, rozważając układ z Γ -niezmienniczym potencjałem, gdzie Γ jest pewną zwartą grupą Liego. Przyjęcie takiego założenia powoduje, że zamiast położenia równowagi układu rozważamy Γ -orbitę takich położen, co w szczególności oznacza, że punkt krytyczny funkcjonału stowarzyszonego z układem nie musi być izolowany. Zagadnieniem, które rozważaliśmy w pracy **(P9)** była emanacja zbioru rozwiązań niestacjonarnych z takiej orbity. Rozważaliśmy przy tym dwa przypadki: gdy jest to orbita niezdegenerowana (jako orbita punktów krytycznych potencjału układu) oraz gdy jest to izolowana orbita składająca się z minimów potencjału. W obu przypadkach przyjmowaliśmy, że grupą izotropii elementów orbity punktów krytycznych potencjału jest S^1 lub $\mathbb{Z}_m$. Przy tych założeniach wykazaliśmy istnienie ciągu rozwiązań okresowych układu, emanującego z orbity. Warto podkreślić, że metody stosowane do uzasadnienia tych rezultatów w pracy **(P9)** były nieco inne niż w pracach **(P10)** i **(P11)**. Zamieniając problem na problem bifurkacyjny, użyliśmy do jego badania niezmienniczego indeksu Conleya. Do porównania indeksów na różnych poziomach użyliśmy długości kohomologicznej CW-kompleksu.

Omawiane powyżej rezultaty zostały otrzymane przy użyciu różnych narzędzi topologii

niezmienniczej. Warto podkreślić, że niezmienniki takie pozostają poprawnie określone, gdy przyjmiemy, że działająca grupa jest trywialna, czyli, inaczej mówiąc, rozważymy sytuację bez działania grupy. W szczególności zdefiniowany jest wspomniany w poprzednim podrozdziale uogólniony stopień topologiczny. Z drugiej strony odpowiednikiem niezmienniczego indeksu Conleya dla funkcjonałów silnie nieokreślonych, jest $\mathcal{LS}$ -homotopijny indeks Conleya wprowadzony w pracy [15]. Okazuje się, że nawet w przypadku grupy trywialnej, takie niezmienniki pozwalają uzyskać pewne rezultaty dotyczące zbiorów rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich. Zagadnienie takie rozważaliśmy w pracy **(P5)**, badając globalną bifurkację rozwiązań sparametryzowanego, nieautonomicznego układu hamiltonowskiego z okresowym hamiltonianem. Rozpatrywaliśmy przy tym zarówno sytuację nierezonansową (czyli taką, w której jądro linearyzacji stowarzyszonego operatora jest izomorfizmem), jak i sytuację, gdy linearyzacja taka ma dwuwymiarowe jądro. W obu przypadkach udowodniliśmy (vide Theorem 5.1 i Theorem 5.2 **(P5)**), że zachodzi zjawisko globalnej bifurkacji rozwiązań układu.

5.3 Rezultaty dotyczące układów eliptycznych

Pozostałe rezultaty dorobku naukowego są zbliżone do tych opisanych w omówieniu cyklu **(A1)-(A6)**. Dokładniej, w pracach **(P3)** i **(P7)** również zajmowaliśmy się zagadnieniem globalnej bifurkacji, tym razem jednak dla układów eliptycznych z warunkiem brzegowym Dirichleta, zaś praca **(P8)** dotyczyła zastosowania metod porównywania indeksów Conleya do dowodzenia globalnej bifurkacji układów z warunkiem brzegowym Neumanna.

Podobnie jak w pracach cyklu **(A1)-(A6)**, również dla układów z warunkiem brzegowym Dirichleta interesującym nas zagadnieniem jest istnienie globalnej bifurkacji rozwiązań układu z rodziny trywialnej, wyznaczonej przez rozwiązania stałe. Jednak w przypadku takich układów, jedynym możliwym rozwiązaniem stałym jest zerowe. Wobec tego orbity rozwiązań, z których może zachodzić bifurkacja, są jednopunktowe. W pracy **(P3)** badaliśmy niekooperatywny układ eliptyczny z warunkiem brzegowym Dirichleta określony na zbiorze niezmienniczym. W takiej sytuacji wyznaczyliśmy ogólne formuły na indeksy bifurkacji (vide Lemma 4.1, Lemma 4.2 **(P3)**) i sformułowaliśmy warunki wystarczające na to, aby były one nietrywialne (Corollary 4.1 i Corollary 4.2 **(P3)**). Ponadto badaliśmy problem, kiedy bifurkujące kontinua są nieograniczone. W przypadku, gdy grupa działająca na układ jest spójna, wykluczając jedną z możliwości w globalnym twierdzeniu bifurkacyjnym, udowodniliśmy, że pewne bifurkujące kontinua muszą być nieograniczone (vide Corollary 4.3 **(P3)**).

Kolejnym zagadnieniem, które rozpatrywaliśmy dla takich układów było łamanie symetrii. Problemem tym zajmowaliśmy się w pracy **(P7)**. Dokładniej, rozważając układy określone na zbiorach o symetrii radialnej, badaliśmy globalną bifurkację rozwiązań nieradialnych. Rozpatrując pewne klasy układów eliptycznych pokazaliśmy, że spełnione są dla nich założenia abstrakcyjnych rezultatów dotyczących globalnego łamania symetrii (Theorem 3.3 **(P7)**). W szczególności wykazaliśmy (vide Theorem 4.2 i Theorem 4.3

(P7)), że rezultaty otrzymane w pracach [39], [44], dotyczące konkretnych klas układów eliptycznych, są bezpośrednimi wnioskami z ogólnego rezultatu (vide Theorem 3.3 (P7)) otrzymanego przy użyciu stopnia niezmienniczych funkcjonałów silnie nieokreślonych.

W ostatniej z omawianych prac zajmowaliśmy się ponownie badaniem zjawiska globalnej bifurkacji, tym razem dla kooperatywnych układów eliptycznych z warunkiem brzegowym Neumanna. W odróżnieniu od problemów rozważanych w cyklu (A1)-(A6), tym razem nie zakładaliśmy, że układ określony jest na zbiorze symetrycznym, a jedynie, że potencjał układu jest funkcją niezmienniczą. W takim przypadku istnienie rozwiązania stałego w naturalny sposób implikuje istnienie całej orbity takich rozwiązań. W pracy (P8), korzystając z rezultatów dotyczących niezmienniczego indeksu Conleya (vide Theorem 2.2 (P8)) sformułowaliśmy warunek wystarczający globalnej bifurkacji rozwiązań układu z takiej orbity (vide Theorem 3.6 (P8)). Ponadto pokazaliśmy przykład sytuacji, w jakiej warunek ten może być spełniony, rozważając układ określony na prostokącie.

6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej

W trakcie całej mojej kariery naukowej pracowałam na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Współpracowałam w tym czasie z badaczami z Polski oraz Japonii, Hiszpanii, Meksyku, Chin oraz USA, czego efektem są prace współautorskie. W szczególności:

- Przebywałam z dwutygodniową wizytą naukową na Universidad de Granada w Hiszpanii (25.11.2018 - 08.12.2018). Osobą zapraszającą był prof. A. Ureña. Efektem tej wizyty była publikacja (P10).
- Przebywałam z dwutygodniową wizytą naukową na Guangzhou University w Chinach (23.06.2019 - 06.07.2019), na zaproszenie prof. H. Xiao. Efektem tej wizyty było nawiązanie współpracy naukowej dotyczącej teorii stopnia współzmienniczego, która zaowocowała przygotowaniem publikacji "Global bifurcation in four-component Bose-Einstein condensates in space", której współautorami są C. García-Azpeitia, W. Krawcewicz oraz J. Liu (praca ta jest w ostatniej fazie redakcji). W ramach tej współpracy W. Krawcewicz oraz C. García-Azpeitia przebywali również z wizytą naukową w Toruniu w czerwcu 2023 roku.
- W ramach współpracy z dr J. Kluczenko oraz dr. P. Stefaniakiem, przebywałam w marcu 2019 roku z krótką wizytą naukową na Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym w Szczecinie (na zaproszenie dr. Stefaniaka) oraz we wrześniu 2019 roku na Uniwersytecie Warmińsko-Mazurskim w Olsztynie (na zaproszenie dr Kluczenko). Rezultatem wizyt, jak również przyjazdów tych współpracowników do Torunia, są prace współautorskie, między innymi prace z cyklu (A1)-(A6).

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

- Prowadziłam wykłady na studiach pierwszego i drugiego stopnia, na kierunkach Matematyka, Matematyka Stosowana, Analiza Danych, z przedmiotów: Analiza matematyczna I, Analiza Matematyczna II, Analiza Matematyczna III, Równania Różniczkowe Zwyczajne, Równania Różniczkowe w modelach matematycznych, Analiza modeli ekonomicznych. Ponadto prowadziłam ćwiczenia, laboratoria i konwersatoria do różnych przedmiotów na wyżej wymienionych kierunkach.
- Byłam promotorem pomocniczym w przewodzie doktorskim D. Strzeleckiego (obrona pracy doktorskiej odbyła się w listopadzie 2020r.), obecnie jestem promotorem pomocniczym studentów studiów doktoranckich mgr. I. Białeckiego i mgr A. Gołembiewskiej.
- Byłam promotorem jednej pracy magisterskiej i dwóch prac licencjackich na kierunku Matematyka.
- W ramach współpracy Wydziału Matematyki i Informatyki z Gimnazjum i Liceum Akademickim w Toruniu (obecnie Uniwersyteckie Liceum Ogólnokształcące) prowadziłam seminaria oraz kółka matematyczne dla młodzieży gimnazjalnej oraz licealnej. Podczas tych zajęć przygotowywałam uczniów do udziału w konkursach, między innymi w Olimpiadzie Matematycznej oraz Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów.
- Współpracowałam z Krajowym Funduszem na rzecz Dzieci, prowadząc zajęcia dla stypendystów Funduszu podczas warsztatów i obozów naukowych. Ponadto przez kilka lat współorganizowałam oraz byłam koordynatorem organizowanych przez KFnRD warsztatów matematycznych dla uczniów liceów na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK.
- Jestem członkiem Toruńskiego Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej. W ramach prac tego komitetu sprawdzałam rozwiązania zadań olimpijskich. Prowadziłam też warsztaty dla nauczycieli matematyki, dotyczące pracy z uczniem zdolnym.
- Jestem współautorką (wspólnie z dr M. Wysokińską-Pliszką) dziesięciu publikacji popularnonaukowych, wydanych w ramach serii „Miniatury Matematyczne”, przeznaczonych dla uczniów szkół podstawowych i średnich.
- Prowadziłam różnego rodzaju koła i warsztaty matematyczne w ramach programów i projektów na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, między innymi „Regionalne koła matematyczne” oraz „Uniwersyteckie koła matematyczne”.

Literatura

- [1] Z. Balanov, W. Krawcewicz, S. Rybicki, H. Steinlein, *A short treatise on the equivariant degree theory and its applications*, J. Fixed Point Theory Appl. 8 (2010) 1–74.
- [2] T. Bartsch, *Topological methods for variational problems with symmetries, Lecture Notes in Mathematics*, 1560, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] R. Böhme, *Die Lösung der Versweigungsgleichungen für Nichtlineare Eigenwert-Probleme*, Math. Z. 127 (1972), 105–126.
- [4] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 38 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [5] E. N. Dancer, *Bifurcation theory in real Banach space*, Proc. London Math. Soc. (3) 23 (1971), 699–734.
- [6] E. N. Dancer, *On nonradially symmetric bifurcation*, J. Lond. Math. Soc. 20(2) (1979), 287–292.
- [7] E. N. Dancer, *The G -invariant implicit function theorem in infinite dimensions II*, Proc. R. Soc. Edinb. 102A (3-4) (1986), 211–220.
- [8] E. N. Dancer, S. Rybicki, *A note on periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems emanating from degenerate stationary solutions*. Differential Integral Equations 12 (1999), no. 2, 147–160.
- [9] T. tom Dieck, *Transformation groups*, wolumin 8 serii *De Gruyter Studies in Mathematics*, Walter de Gruyter & Co. Berlin, 1987.
- [10] T. tom Dieck, *The Euler ring of the rotation group*, Munster J. Math. 5 (2012), 107–119.
- [11] G. Fang, *Morse indices of degenerate critical orbits and applications - perturbation methods in equivariant cases*, Nonl. Anal. TMA 36(6) (1999), 101–118.
- [12] J. Fura, A. Ratajczak (Gołębiewska), S. Rybicki, *Existence and continuation of periodic solutions of autonomous Newtonian systems*, Journal of Differential Equations, 218(1), 2005, 216–252.
- [13] G. L. Garza, S. Rybicki, *Equivariant bifurcation index*, Nonlinear Anal. 73(9) (2010), 2779–2791.
- [14] K. Gęba, *Degree for gradient equivariant maps and equivariant Conley index*, Topological nonlinear analysis II, Birkhäuser (1997), 247–272.

- [15] K. Gęba, M. Izydorek, A. Pruszek, *The Conley index in Hilbert spaces and its applications*, Studia Mathematica 134(3) (1999), 217–233.
- [16] K. Gęba, S. Rybicki, *Some remarks on the Euler ring $U(G)$* , J. Fixed Point Theory Appl. 3 (2008), no. 1, 143–158.
- [17] A. Gołębiewska, *Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian systems*, J. Math. Anal. Appl. 400(1) (2013), 254–265.
- [18] A. Gołębiewska, *Periodic solutions of asymptotically linear autonomous Hamiltonian systems with resonance*, J. Dynam. Differential Equations 30 (2018), no. 4, 1509–1524.
- [19] A. Gołębiewska, M. Kowalczyk, S. Rybicki, P. Stefaniak, *Periodic solutions to symmetric Newtonian systems in neighborhoods of orbits of equilibria*, Electron. Res. Arch. 30 (2022), no. 5, 1691–1707.
- [20] A. Gołębiewska, E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, A. J. Ureña, *Bifurcation of closed orbits from equilibria of Newtonian systems with Coriolis forces*, Journal of Differential Equations 338 (2022), 441–473.
- [21] A. Gołębiewska, S. Rybicki, *Global bifurcations of critical orbits of G -invariant strongly indefinite functionals*, Nonlinear Anal. 74(5) (2011), 1823–1834.
- [22] A. Gołębiewska, S. Rybicki, *Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 6(4) (2013), 985–997.
- [23] J. Ize, *Bifurcation theory for Fredholm operators*, Mem. Amer. Math. Soc. 7, no. 174, 1976.
- [24] M. Izydorek, *Equivariant Conley index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems*, Nonl. Anal. TMA 51(1) (2002), 33–66.
- [25] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford University Press, 1991.
- [26] M. Kowalczyk, E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, *Symmetric Lyapunov center theorem for orbit with nontrivial isotropy group*, Adv. Differ. Equ., 25(12) (2020) 1–30.
- [27] M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Translated by A. H. Armstrong. Macmillan, New York, 1964.
- [28] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **2** (1907), 203–474.
- [29] S. Li, J. Su, *Existence of multiple critical points for an asymptotically quadratic functional with applications*, Abstr. Appl. Anal. 1 (1996), 277–289.

- [30] J. Mawhin, *Topological bifurcation theory: old and new. Progress in variational methods*, Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys., 7, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2011, 169-186.
- [31] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, Applied Mathematical Sciences 74, 1989.
- [32] K. H. Mayer, *G-invariante Morse-functionen*, Man. Math. 63 (1989), 99–114.
- [33] D. Motreanu, V. V. Motreanu, N. Papageorgiou, *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer, New York, 2014.
- [34] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974.
- [35] E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, D. Strzelecki, *Symmetric Liapunov center theorem*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 56(2) (2017).
- [36] E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, D. Strzelecki, *Symmetric Liapunov center theorem for minimal orbit*, J. Differential Equations, 265(3) (2018), 752–778.
- [37] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis 7 (1971), 487–513.
- [38] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65, AMS, Providence, R.I., 1986.
- [39] M. Ramaswamy, P. N Srikanth, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems*, Trans. Amer. Math. Soc 304 (1987), 839–845.
- [40] H. Ruan, S. Rybicki, *Applications of equivariant degree for gradient maps to symmetric Newtonian systems*, Nonlinear Anal. 68 (2008), no. 6, 1479–1516.
- [41] S. Rybicki, *A degree for S^1 -equivariant orthogonal maps and its applications to bifurcation theory*, Nonlinear Anal. 23(1) (1994), 83–102.
- [42] S. Rybicki, *Degree for equivariant gradient maps*, Milan J. Math. 73 (2005), 103–144.
- [43] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Bifurcation and symmetry-breaking*, Invent. Math., 100(1) (1990), 63–95.
- [44] P. N. Srikanth, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin 7 (1990), 107–112.
- [45] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part I: Fixed-Point Theorems*, New York, Springer-Verlag, 1993.