

Henryk Żołądek
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

**Opinia o habilitacji "Rozwiązania samopodobne w modelach
związanych z dwuwymiarowym równaniem Eulera" i o pozostałym
dorobku dra Piotra Kokockiego**

Dr Piotr Kokocki obronił pracę magisterską w 2009 roku na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK pod kierunkiem dra Aleksandra Ćwiszewskiego. W 2012 roku obronił rozprawę doktorską na tym samym wydziale pod kierunkiem dra hab. Wojciecha Kryszewskiego i dra Ćwiszewskiego.

Praktycznie cały czas pracował i nadal pracuje na UMK, poza rocznym pobytem na post-docu w Bilbao (Hiszpania) i kilkoma krótkimi wizytami w Instytucie Matematyki PAN.

Był wykonawcą lub kierownikiem w 5 grantach badawczych. Otrzymał szereg nagród i wyróżnień. Wykazywał się pewną działalnością dydaktyczną i organizacyjną.

Według *MathSciNet* opublikował 16 prac, które były cytowane 57 razy; w autoreferacie znajdujemy 18 prac. Czasopisma, w których ukazały się te prace, specjalizują się w matematyce stosowanej i są wysokiej klasy: *J. Diff. Equat., Discr. Cont. Dyn. Syst., Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., Comm. Pure. Appl. Math., Physica D. Nonlin. Phenom., J. Math. Anal. Appl.*

Przechodzę do omówienia pięciu publikacji wchodzących w skład 'osiągnięcia habilitacyjnego'. Będę opierał się głównie na autoreferacie; jest on napisany dosyć jasno, chociaż zawiera sporo błędów gramatycznych. Tematyka tych prac to trochę niestandardowa kombinacja Teorii Równań Różniczkowych Częstkowych i Zwyczajnych.

W pracy [H1] z *Studies. Appl. Math.* dr Kokocki bada rozwiązania równania Painlevé II, czyli specjalnego równania zwyczajnego 2-go rzędu

$$u'' = xu + 2u^3 - \alpha.$$

Związek tego równania z równaniami cząstkowymi polega na tym, że, jeśli $u(x)$ jest rzeczywistym rozwiązaniem równania Painlevé II, to $k(t, x) := -(2/(3t)^{1/3}) \cdot u(x/(3t)^{1/3})$ jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Kortewega de Vriesa

$$\dot{k} + k''' - (3/2)k^2k' = 0,$$

gdzie $\dot{}$ i $'$ oznaczają pochodne po t i x odpowiednio. (Ja trochę zajmowałem się problemem całkowalności równań Painlevé, ale dra Kokockiego interesują inne zagadnienia.)

Swego czasu okazało się, że równania Painlevé są związane z warunkami izomonodromiczności dla liniowych układów $\dot{z} = A(t)z$, $z \in \mathbb{C}^n$, z meromorficzną macierzą $A(t)$; to są warunki na parametry występujące w macierzy A . W przypadku drugiego równania Painlevé macierz jest wymiaru 2×2 a funkcja $u(x)$ jest związana z A_{12} . Ponadto, zamiast operatorów monodromii stałe powinny być tzw. macierze Stokes'a. To prowadzi do innego klasycznego zagadnienia, tzw. problemu

Riemanna–Hilberta o wyznaczeniu układu liniowego z zadanymi operatorami monodromii. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest sprowadzenie go do znalezienia funkcji macierzowej $\Phi(\lambda)$ od zmiennej zespolonej λ , spełniającej pewne warunki skoku przy przejściu przez pewne rozcięcie Σ w płaszczyźnie zespolonej: typu $\Phi(\lambda^+) = \Phi(\lambda^-)N$, gdzie $\lambda^\pm \mapsto \Sigma$ z dwóch stron Σ . Rozwiązania uzyskane na tej drodze nazywają się rozwiązaniami Ablowitza–Segura. (Autor nie wspomina właściwie o tych faktach; ciekawe, czy jest ich świadomy.)

W pracy [H1] odpowiedni kontur rozcięć jest mocno skomplikowany, składa się z 9 algebraicznych krzywych. Również odpowiednie macierze N są mocno nietrywialne, wyrażają się przez macierze Stokesa i macierze Pauliego.

W serii twierdzeń (Tw. 4.2 – 4.6) autor opisał szereg własności asymptotycznych rozwiązań równania Painlevé II uzyskanych na tej drodze.

Następna praca [H2] w *SIAM J. Math. Anal.* (z K. Dunstem) dotyczy osobliwości spiralnych dla tzw. potoku geometrycznego, czyli równania

$$\dot{z} = -z''' + (3/2)(z')^*(z'')^2, \quad |z'| = 1,$$

gdzie $z \in \mathbb{C}$ i $*$ oznacza sprzężenie zespolone.

Rozważa się parametryczne krzywe spiralne postaci

$$\begin{aligned} z_0(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+\mu^2}} \exp[i(\theta_+ - \mu \ln x)], \quad x > 0, \\ z_0(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+\mu^2}} \exp[i(\theta_- - \mu \ln |x|)], \quad x < 0. \end{aligned}$$

Ponadto rozważa się dosyć skomplikowaną funkcję $z(t, x)$, wyrażoną podwójną całką zawierającą rozwiązanie $u(t, x)$ równania Painlevé II.

W Tw. 4.7 pokazano, że $z(t, x)$, przy odpowiednich założeniach, aproksymuje się funkcją $z_0(x)$. W Tw. 4.8 pokazano rozwinięcie

$$z = e^{-i\mu \ln t} (A_0 x + A_1 t x^{-1} + A_2 t^2 x^{-5}) + \dots$$

dla rozwiązania z Tw. 4.7.

W pracy [H3] w *Physica D. Nonlin. Phenomena* (z Dunstem) rozważa się warunek początkowy

$$k(x, 0) = k_{a,b} = a \cdot \delta(x) + b \cdot \text{PV}(1/x)$$

dla zmodyfikowanego równania KdV; tutaj mamy deltę Diraca δ i wartość główną PV.

W Tw. 4.9 pokazano, że istnieje rozwiązanie równania Painlevé II z $\alpha = -b/2$ takie, że funkcja $k(t, x)$ (zdefiniowana powyżej) spełnia powyższe zagadnienie początkowe.

W Tw. 4.10 podano wzór na pewne asymptotyczne rozwinięcie dla powyższego rozwiązania Ablowitza–Segura $u(t, x)$.

W pracy [H4] w *J. Diff. Equat.* (z T. Cieślakiem i W. Ożańskim) rozważa się spirale logarytmiczne w rozwiązaniach równań Eulera

$$\dot{v} + (v, \nabla)v + \nabla p = 0, \quad (\nabla, v) = \text{div} v = 0.$$

Tutaj $v = v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, jest polem prędkości cieczy a p jest ciśnieniem. Definiuje się wirowość (rotację) pola prędkości

$$\omega = \nabla \times v = \text{rot} v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1.$$

Spirale logarytmiczne $\Sigma_m(t)$, $m = 1, \dots, M-1$, to obrazy odwzorowań

$$\theta \mapsto Z_m(\theta, t) = t^\mu e^{a(\theta - \theta_m)} e^{i\theta}.$$

W pracy rozważa się jeszcze (naturalnie zdefiniowane) słabe rozwiązania układu Eulera.

Utożsamiając $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$, definiowane są samopodobne pola prędkości

$$v = t^{\mu-1} w(z/t^\mu), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma = \mathbb{C} \setminus \bigcup \Sigma_m,$$

gdzie $w(z)$ jest specjalnym polem gradientowym.

W Tw. 4.12 podano szereg własności dla w i v . W szczególności, okazuje się, że $\text{rot } v$ jest skupiona na $\Sigma = \bigcup \Sigma_m$. W Tw. 4.13 pokazano, że samopodobne pole v jest słabym rozwiązaniem układu Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są pewne naturalne warunki zgodności pola i ciśnienia na Σ . W Tw. 4.14 i 4.15 podano konkretne interpretacje warunków zgodności.

W pracy [H5] w *Scuola Norm. Sup., Annali di Scienze* (z T. Cieślakiem i W. Ożańskim) bada się rozwiązania niesymetryczne dla pewnego układu dyskretnego zdefiniowanego w Tw. 4.14 (nie przytaczam go).

W Tw. 4.17 pokazano istnienie rozwiązania tego układu przy pewnych założeniach. W Tw. 4.18 zdefiniowano pewną macierz C i pokazano, że warunki z poprzedniego twierdzenia są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy macierz C jest odwracalna.

Wypada jeszcze omówić pozostały dorobek naukowy habilitanta.

Niektóre z tych prac są związane z tematyką habilitacji; jak praca [S12] o liniowej niestabilności spiral symetrycznych, czy praca [S13] o asymptotyce rozwiązań równania Painlevé II.

Ale praca [S11] (z Ćwieszewskim) dotyczy operatora Schrödingera z tzw. potencjałem Kato–Rellicha.

W innych pracach ([S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9]) rozważa się równania zwyczajne typu

$$\dot{u} = -Au + \lambda u + F(t, u)$$

w przestrzeniach funkcyjnych. Poszukuje się rozwiązań heteroklinicznych, okresowych. Czasami stosuje się metodę uśrednienia.

Moja ocena powyższego dorobku jest mieszana. Nie mam wątpliwości, że prace dra Kokockiego są publikowane w dobrych czasopismach i są znane specjalistom. Ponadto, wyniki prac wchodzących w skład rozprawy noszą charakter jakościowy; a ja czuję się specjalistą w Jakościowej Teorii RRZ. Są prace o posmaku Analizy Funkcjonalnej, ale wszystkie spoza rozprawy. Jednakże liczba cytowań nie jest imponująca. Dla mnie wyniki habilitanta są raczej techniczne i niezbyt nowatorskie. Przypuszczam, że niektóre własności rozwiązań równania Painlevé II można uzyskać bardziej bezpośrednimi metodami.

Jednakowoż konkluzja mojej opinii jest zdecydowanie pozytywna. Dorobek naukowy, dydaktyczny i organizacyjny spełnia wymagania stawiane kandydatom na doktora habilitowanego.

Warszawa, dn. 16 lutego 2025 r.

H. Zoladek