

Prof. dr hab. Tomasz Dłotko
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

**Opinia w postępowaniu habilitacyjnym
doktora Piotra Kokockiego
dla Rady Doskonałości Naukowej oraz Rady Dyscypliny
Matematyka Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu**

Poniższa opinia dotyczy wniosku pana dra Piotra Kokockiego o nadanie stopnia doktora habilitowanego w *dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka* na podstawie osiągnięcia naukowego: *Rozwiązania samopodobne w modelach związanych z dwuwymiarowym równaniem Eulera*. Opinia jest przygotowana dla Rady Doskonałości Naukowej w Warszawie.

Przebieg kariery naukowej. Piotr Kokocki ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu w 2009 roku. Opiekunem jego pracy magisterskiej zatytułowanej *Zagadnienia okresowe dla nieliniowych równań ewolucyjnych* był dr hab. Aleksander Ćwiszewski. W roku 2012 P. Kokocki uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych w rezonansie* przygotowanej pod opieką prof. dr hab. Wojciecha Kryszewskiego.

Stwierdzenie spełnienia warunków Art. 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku. Mogę w tym miejscu stwierdzić, że pan dr Piotr Kokocki spełnia warunki stawiane w Artykule 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20.08.2018 roku. W szczególności posiada on stopień doktora nauk matematycznych (z wyróżnieniem) nadany przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w dniu 27 czerwca 2012 roku, posiada także dorobek naukowy uzasadniający wystąpienie z wnioskiem habilitacyjnym, co omówię poniżej. W okresie od października 2014 do września 2015 roku doktor Kokocki odbył staż (postdoc) w Basque Center for Applied Mathematics w Bilbao, co dokumentuje wypełnienie wymogu z punktu 1 podpunkt 3 Artykułu 219 wspomnianej ustawy.

Opis wybranych elementów dorobku naukowego dra Piotra Kokockiego.

Według dostarczonej dokumentacji Piotr Kokocki jest autorem lub współautorem 13 opublikowanych prac naukowych (stan na koniec roku 2024), spośród których 10 powstało po uzyskaniu stopnia doktora (w 2012 roku), zaś pozostałe 3 pozycje w latach 2008-2012. Jeśli chodzi o

przekrój czasopism, to znajdziemy tu wiele dobrych czasopism matematycznych, jak: *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications* (4 prace), *Journal of Differential Equations*, *Journal of Evolution Equations*, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* oraz *Discrete and Continuous Dynamical Systems A* (2 prace).

Tematykę badawczą Piotra Kokockiego można zbiorczo określić jako *próby precyzyjnego opisu szczególnych rozwiązań (często typu fali biegnącej) wybranych równań ewolucyjnych*. Chodzi przykładowo o istnienie rozwiązań okresowych, istnienie tzw. *connecting orbits* (czyli pełnych trajektorii łączących rozwiązania stacjonarne), czy też istnienie rozwiązań równania Eulera, których wirowość skoncentrowana jest na rodzinie spiral.

Przejdę obecnie do omówienia kilku, najciekawszych według mnie, rezultatów Piotra Kokockiego.

Praca [S5] *Connecting orbits for nonlinear differential equations at resonance*, J. Differential Equations 255, 2013, poświęcona jest badaniu pełnych trajektorii (*connecting orbits*) łączących stacjonarne rozwiązania abstrakcyjnego semiliniowego równania:

$$(1) \quad u_t = -Au + \lambda u + F(u), \quad t > 0,$$

z sektorialnym operatorem $A : X \supset D(A) \rightarrow X$ i ciągłą nieliniowością $F : X^\alpha \rightarrow X$ (X^α dla $\alpha \in (0, 1)$ oznacza dziedzinę operatora A^α). Autor używa techniki indeksu Conleya (m. in. za pracami Krzysztofa Rybakowskiego) i przy specjalnych ograniczeniach na nieliniowość F (warunki (G1) i (G2) pracy, bliskie znanemu w literaturze warunkowi typu *Invariant Regions*; np. [SM]) dowodzi w Twierdzeniu 3.6, w przypadku ‘rezonansu w nieskończoności’ (czyli gdy: $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$ oraz operator F jest ograniczony), istnienie *connecting orbits* dla problemu (1). Opisany rezultat abstrakcyjny jest następnie ilustrowany przykładem semiliniowego równania ciepła.

W pracy [H3] *On global solutions of defocusing mKdV equation with specific initial data of critical regularity*, K. Dunst, P.Kokocki, Physica D 417 (2021), badane są szczególne rozwiązania modyfikowanego równania KdV:

$$u_t + u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x = 0,$$

$x \in \mathbb{R}, t > 0$, odpowiadające dystrybucyjnemu warunkowi początkowemu:

$$u_0(x) = a \delta(x) + b \, p.v. \left(\frac{1}{x} \right),$$

gdzie δ oznacza deltę Diraca, $p.v.$ wartość główną Cauchy’ego, zaś a, b są stałymi rzeczywistymi. Taki warunek początkowy prowadzi do gładkiego rozwiązania samopodobnego równania mKdV.

Ciekawe wprowadzenie do tego równania znajdziemy w monografii Felipe Linares i Gustavo Ponce *Introduction to Nonlinear Dispersive Equation*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008 (przedrukowanej przez wydawnictwo Springer’a w roku 2015). W Rozdziale 8 tej monografii opisano wiele technik i pomysłów użytych później przez autorów pracy [H3].

Bazując na pojęciu *rozwiązania samopodobnego* autorzy zauważają, że gdy v jest rozwiązaniem równania (zwanego “*second Painlevé II equation*”):

$$(2) \quad v_{xx} = xv(x) + 2v^3(x) - \alpha, \quad x \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R},$$

to wówczas wyrażenie

$$-2(3t)^{-\frac{1}{3}}v(x(3t)^{-\frac{1}{3}}) = u(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

będzie rzeczywistym rozwiązaniem (“*typu Ablowitza-Segura*”) równania mKdV. Badaniu rozwiązań równania (2) poświęcona jest właśnie praca [H3].

Dla przypadku parametrów $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $k \in (-\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha))$, w Twierdzeniu 1.2, autorzy podają postać asymptotycznego rozwinięcia rozwiązania $v(x; \alpha, k)$:

$$(3) \quad v(x, \alpha, k) = \frac{d}{(-x)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}d^2 \ln(-x) + \phi\right) + \frac{\alpha}{x} + O\left((-x)^{-\frac{7}{4}}\right),$$

z odpowiednio dobranymi stałymi d, ϕ .

Równanie (2) było wprowadzone w roku 1978 dla opisu dynamiki styku pomiędzy cieczami. Struktury tego typu powstają np. w oceanach w wyniku separacji warstw wody o różnej temperaturze bądź zasoleniu.

Główne wyniki uzyskane przez Piotra Kokockiego dotyczą jednak szczególnych rozwiązań dwuwymiarowego nieściśliwego równania Eulera

$$(4) \quad \begin{aligned} v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p &= 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}$$

Praca [H4] poświęcona jest badaniu słabych rozwiązań samopodobnych równania (4) o wirowości skoncentrowanej na rodzinie spiral logarytmicznych. Wirowość jest tutaj zadana wzorem

$$\omega(t) = \gamma(t)\delta_{\sigma(t)}, \quad t > 0,$$

gdzie $\sigma(t)$ jest zależną od czasu rodziną koncentrycznych spiral, zaś $\gamma(t)$ jest gęstością. W Twierdzeniach 1.2 i 1.4 autorzy budują samopodobne pole prędkości o powyższej wirowości, które jest słabym rozwiązaniem równania Eulera (4) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, o ile parametry zadające miarę

$\omega(t)$ spełniają dla wszystkich $t > 0$ oraz $z \in \sigma(t)$ nieliniowy układ dyskretny:

$$\begin{aligned} n(t, z) \cdot (v(t, z)t - \mu z) &= 0 \quad (\text{zgodność prędkości}), \\ p(t, z) &\text{ jest ciągle w punkcie } z \quad (\text{zgodność ciśnienia}). \end{aligned}$$

Jako wniosek uzyskuje się istnienie rozwiązań samopodobnych o wirowości skoncentrowanej na symetrycznej rodzinie spiral logarytmicznych. Uogólnia to klasyczny przypadek spirali Prandtla opisany w pracy [PR] z 1922 roku.

Badania pracy [H4] kontynuowane są w najnowszej pracy [H5] poświęconej istnieniu słabych rozwiązań samopodobnych dwuwymiarowego równania Eulera o wirowości skoncentrowanej na interfejsie składającym się z niesymetrycznie rozłożonych spiral logarytmicznych. Zasadniczym rezultatem tej pracy jest twierdzenie o istnieniu i postaci takiego słabego rozwiązania równania Eulera uzyskane przy poczynionych w pracy założeniach o parametrach.

Przedstawione powyżej krótko prace zawierają jedynie próbki badań prowadzonych przez Piotra Kokockiego. Są one jednak reprezentatywne i dobrze charakteryzują uzyskane przez dra Kokockiego wyniki. Jego prace są bardzo techniczne, wymagają dużego wysiłku od czytelnika, lecz zawierają ciekawe rezultaty. Zapewne jest to jeden z nowszych kierunków badań uprawianych przez matematyków parających się teorią równań różniczkowych cząstkowych. Jak wspomniałem już wcześniej, celem badań P. Kokockiego wydaje się być próba uzyskania jak najdokładniejszego opisu konkretnych rozwiązań wybranych nieliniowych równań fizyki matematycznej. Nie jest to zadanie łatwe. Czytając te prace zadawałem sobie pytanie: Czy mamy naprawdę możliwość dobrego opisu własności takich rozwiązań, jeżeli nie ma szansy otrzymania ich jawnej postaci analitycznej (bo równanie jest nieliniowe i zbyt skomplikowane)? Na pewno konkurencyjnym sposobem badań mogą tu być zaawansowane techniki obliczeniowe, o ile celem są zastosowania czysto inżynierskie.

Wnioski z przedstawionego powyżej opisu dorobku.

Mogę w tym miejscu stwierdzić, że zakres dorobku naukowego dr Piotra Kokockiego jednoznacznie wskazuje iż jego problematyka badawcza mieści się w zakresie *dyscypliny matematyka*.

Doktor Kokocki koncentruje on się na badaniu szczególnych rozwiązań wybranych nieliniowych równań fizyki matematycznej i wykazuje przy tym ogromną pomysłowość oraz doskonałą znajomość technik spotykanych w literaturze. Jego wyniki są bardzo interesujące, choć technicznie mocno skomplikowane.

Udział w projektach badawczych i staże naukowe.

Według dostarczonej dokumentacji dr Piotr Kokocki był kierownikiem w grantie MNiSW *Wpływ efektów dyspersyjnych na powstawanie osobliwości w równaniach Kortewega-de Vriesa i Eulera* w latach 2016-2020, oraz w grantie NCN *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych w rezonansie*, 2011-2013. Był także głównym wykonawcą w dwóch grantach z lat 2014-2017 oraz 2009-2012.

Uwagi dotyczące opiniowanego wniosku.

Mam kilka uwag odnoszących się do omawianego wniosku.

1. Należy tu wspomnieć, że bazowe własności rozwiązań równania Eulera w $\mathbb{R}^2$ są zasadniczo znane. Podobnie jak dla równania Naviera-Stokesa, znacznie trudniejszy jest przypadek wymiaru trzy dla którego szereg podstawowych pytań nadal wymaga odpowiedzi; “*The three-dimensional Euler equations have stood for a quarter of a millenium as a challenge to mathematicians and physicists. While much has been discovered, the nature of solutions is still largely a mystery.*”, J.D. Gibbon, *The three-dimensional Euler equations: Where do we stand?*, Physica D 237, 2008.

2. Ilość cytowań prac Piotra Kokockiego na koniec 2024 roku w podstawowych bazach danych przedstawia się następująco:

- w bazie MathSciNet 52,
- w bazie Web of Sciences 56,
- w bazie Google Scholar 103.

Nie są to duże ilości. Powodem jest zapewne znaczna techniczna komplikacja prac, która zmniejsza liczbę potencjalnych czytelników.

3. Doktor Kokocki był kilkakrotnie nagradzany przez Rektora UMK w Toruniu, uzyskiwał również stypendia Ministra Edukacji Narodowej oraz Rektora UMK w Toruniu wspomagające działalność naukową.

Konkluzja końcowa. Pragnę stwierdzić, że opiniowany wniosek habilitacyjny pana dra Piotra Kokockiego *Rozwiązania samopodobne w modelach związanych z dwuwymiarowym równaniem Eulera* spełnia wszelkie warunki stawiane w Art. 2019 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku. Stanowi on również ciekawy i wartościowy rezultat nowoczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych. W związku z powyższym zdecydowanie popieram wniosek doktora Piotra Kokockiego do Rady Doskonałości Naukowej o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego (w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, dyscyplinie matematyka).

Katowice, 30.01.2025.

Prof. dr hab. Tomasz Dłotko.

Spis prac cytowanych w opinii.

- H1 P. Kokocki, Total integrals of Ablowitz-Segur solutions for the inhomogeneous Painlevé II equation, *Studies in Applied Mathematics*, vol. 144 (2020), no. 4, 504–547.
- H2 K. Dunst, P. Kokocki, Double spiral singularities for a flow related with the 2D Euler equation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 53 (2021), no. 4, 4727–4743.
- H3 K. Dunst, P. Kokocki, On global solutions of defocusing mKdV equation with specific initial data of critical regularity, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 417 (2021), art. no. 132810.
- H4 T. Cieślak, P. Kokocki, W. Ożański, Well-posedness of logarithmic spiral vortex sheets, *Journal of Differential Equations*, vol. 389 (2024), 508–539.
- H5 T. Cieślak, P. Kokocki, W. Ożański, Existence of nonsymmetric logarithmic spiral vortex sheet solutions to the 2D Euler equations, *Scuola Normale Superiore, Annali di Scienze*, ?
- S5 P. Kokocki, Connecting orbits for nonlinear differential equations at resonance, *J. Differential Equations* 255, 2013, 1554–1575.
- PR L. Prandtl, Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck (1922), pp. 18–33.
- SM J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, NY, 1983.