Łódź, 2023.12.05

dr hab. Paweł Caban, prof. UŁ
Katedra Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Łódzki

Recenzja osiągnięcia naukowego dr Katarzyny Siudzińskiej
pt. *Analiza i zastosowania kanałów Pauliego i ich uogólnień*
przedstawionego w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego
w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie nauki fizyczne.

Pani dr Siudzińska ukończyła studia fizyczne na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, licencjackie w roku 2012, magisterskie w roku 2014. Stopień doktora nauk fizycznych uzyskała w roku 2019 również na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika. Promotorem prac licencjackiej, magisterskiej oraz doktorskiej był prof. Dariusz Chruściński. Aktualnie (od października 2021) pani dr Siudzińska pracuje jako adiunkt w Katedrze Fizyki Matematycznej Instytutu Fizyki UMK, wcześniej przez dwa lata pracowała w tym samym miejscu na stanowisku asystenta. Dorobek naukowy dr Siudzińskiej obejmuje 26 prac opublikowanych w renomowanych czasopismach (11 prac w Physical Review A, 7 w Journal of Physics A, pozostałe w Scientific Reports, Journal of Mathematical Physics, Reports on Mathematical Physics, Entropy, Journal of Physics Communications) w latach 2015–2023. Warto podkreślić, że w latach 2019–2023 pani dr Siudzińska publikowała średnio 4 prace rocznie co świadczy o dużej aktywności naukowej w okresie po uzyskaniu doktoratu. Dr Siudzińska kierowała grantami Narodowego Centrum Nauki ETIUDA i PRELUDIUM, od roku 2022 kieruje grantem SONATA; była też wykonawcą w trzech innych grantach. W latach 2018–2019 odbyła sześcio-miesięczny staż naukowy w Drezdeńskim Uniwersytecie Technicznym w Niemczech w grupie cenionego fizyka, prof. Waltera Strunza. Rezultatem stażu była wspólna publikacja i kontynuowana zdaniem Kandydatki współpraca naukowa. Warto też zauważyć, że poza kilkoma innymi wyróżnieniami wymienionymi przez Kandydatkę w dokumentacji w roku 2021 została ona laureatką programu START 2021 Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, w roku 2022 otrzymała stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców oraz w roku 2023 została laureatką Nagrody Oddziału PAN w Gdańsku dla młodych naukowców w zakresie nauk ścisłych i o Ziemi. Dr Siudzińska była też członkiem komitetu organizacyjnego 54th Symposium on Mathematical Physics w Toruniu w roku 2023.

Przedstawione osiągnięcie naukowe zatytułowane *Analiza i zastosowania kanałów Pauliego i ich uogólnień* jest cyklem 13 artykułów opublikowanych w latach 2019–2023.

Sześć z tych prac zostało opublikowanych w Journal of Physics A, pięć w Physical Review A, po jednej w Entropy oraz Journal of Physics Communications. Dr Siudzińska jest jedynym autorem dziesięciu z tych prac, trzy to prace współautorskie. Przedstawiony cykl jest monotematyczny, wszystkie prace dotyczą dość wąskiego zakresu zagadnień związanych z własnościami i uogólnieniami kanałów Pauliego.

W kwantowej teorii informacji przez kanał kwantowy $\Lambda : End(\mathcal{H}_1) \to End(\mathcal{H}_2)$ rozumiemy zazwyczaj całkowicie dodatnie, zachowujące ślad (CPTP) odwzorowanie liniowe między przestrzeniami $End(\mathcal{H}_1)$ i $End(\mathcal{H}_2)$ operatorów liniowych określonych na przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$, odpowiednio. W pracach cyklu habilitacyjnego Autorka przyjmuje (tak jak się to zwykle czyni), że przestrzenie $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są skończenie wymiarowe. Za pomocą kanału kwantowego możemy opisać dopuszczalną zmianę stanu kwantowego $\rho \mapsto \Lambda[\rho]$. Kanały kwantowe mają również zastosowanie w opisie ciągłej w czasie ewolucji układu kwantowego: $\rho(t) = \Lambda(t)[\rho(0)]$, gdzie dla każdego $t \geq 0$ $\Lambda(t)$ jest kanałem kwantowym, $\Lambda(0) = I$. W ten sposób opisać możemy na przykład ewolucję kwantowych układów otwartych.

Tak jak zaznacza to dr Siudzińska w swoim Autoreferacie, tematykę prac cyklu habilitacyjnego podzielić można na cztery obszary:

(i) geometria na przestrzeni kanałów kwantowych — prace [H1, H2, H3, H4];

(ii) klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych — prace [H5, H6, H7, H8];

(iii) poprawa własności komunikacyjnych kanałów za pomocą szumów — prace [H9, H10, H11, H12];

(iv) dalsze uogólnienia kanałów Pauliego — praca [H13].

Na marginesie, czytając Autoreferat Habilitantki odniosłem wrażenie, że został on napisany w pośpiechu. Wstępna część wydaje mi się bardzo ogólnikowa. Omówienie podstawowych pojęć na pierwszych stronach Autoreferatu również budzi pewien niedosyt. Wkradła się tam nawet elementarna omyłka: wzór na wartości własne kanału Pauliego podany powyżej równania (5) jest błędny.

Omówię teraz wymienione wyżej obszary tematyczne.

Geometria na przestrzeni kanałów kwantowych

Najprostszym układem kwantowym jest układ, którego przestrzeń stanów jest dwuwymiarowa, czyli kubit. Dlatego też kwantowym kanałom kubitowym poświęcone jest wiele prac. Jednymi z najczęściej roważanych kanałów tego rodzaju są kanały Pauliego, które mają wyjątkowo prostą reprezentację Krausa $\Lambda[\rho] = \sum_{\alpha=0}^{3} p_\alpha \sigma_\alpha \rho \sigma_\alpha$, gdzie $\{p_\alpha\}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa, $\sigma_0 = I$ a σ_i są macierzami Pauliego. Alternatywnie kanał Pauliego możemy scharakteryzować podając jego równania własne, gdzie wektorami własnymi są macierze σ_α a odpowiednie wartości własne λ_α są bezpośrednio związane z p_α. W terminach λ_α można też sformułować warunki takie jak na przykład P-podzielność czy CP-podzielność kanału. Korzystając z własności baz wzajemnie nieobciążonych (*mutually unbiased bases*, MUBs) Nathansona i Ruskai (J. Phys A: Math. Theor. 40, 8171 (2007)) uogólnili kanały Pauliego na przypadek stanów d-wymiarowych.

Prace [H1–H4] opierają się na dość prostym ale interesującym pomyśle — z każdym kanałem kwantowym możemy za pomoca izomorfizmu Choi–Jamiołkowskiego związać stan kwantowy. Stan taki jest parametryzowany przez wartości własne odpowiedniego kanału. W przestrzeni stanów z kolei możemy wprowadzić metrykę Hilberta–Schmidta i generowane przez nią elementy długości i objętości. Dla stanów związanych z kanałami Pauliego (lub ich uogólnieniami) odpowiednie elementy długości i objętości wyrażają się przez wartości własne tych kanałów.

W pracy [H1] dr Siudzińska wykorzystując przedstawioną wyżej metodę wyznacza objętości (oraz ich stosunki) dla klas kanałów Pauliego spełniających określone warunki: P i CP podzielnych, łamiących splątanie oraz takich, które można otrzymać za pomoca generatorów zależnych od czasu. W pracy [H3], która jest bezpośrednią kontynuacją [H1], to samo zostało zrobione dla kanałów o zdegenerowanych lub znikających wartościach własnych. W [H2] to samo podejście zastosowano do kanałów Pauliego uogólnionych z wykorzystaniem baz wzajemnie niobciążonych. W szczególności wyznaczone zostały względne objętości różnych klas kanałów w przypadku, gdy do ich konstrukcji wykorzystujemy 3, d lub $d+1$ baz wzjemnie nieobciążonych. Z kolei w pracy [H4] w dokładnie ten sam sposób przeanalizowano fazowo kowariantne kanały kubitowe. Kanały takie nie muszą być unitalne.

Z technicznego punktu widzenia prace [H1–H4] są bardzo proste. Ich najważniejszym rezultatem jest wyznaczenie względnych objętości istotnych klas kanałów kwantowych w zastosowanej przez Autorkę metryce, co można interpretować jako względne częstości występowania danych kanałów. Interesujące byłoby przeprowadzenie analogicznych rachunków przy przyjęciu innej metryki w przestrzeni stanów oraz/lub porównanie wyników z rezultatmi innych autorów otrzymanymi dla innych metryk.

Klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych
Ewolucję kwantowego układu otwartego opisuje się za pomocą równań typu master. W przypadku ewolucji typu Markowa odpowiednie równanie ma postać $\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \mathcal{L}\Lambda(t)$, gdzie niezależny od czasu generator Goriniego–Kossakowskiego–Sudarshana–Lindblada (GKSL) ma znaną postać, podaną na przykład w równaniu (3) w Autoreferacie.
Jednym ze sposobów uogólnienia takiej ewolucji na przypadek uwzględniający efekty pamięci (niemarkowowski) jest rozważenie generatorów GKSL zależnych od czasu. W takim przypadku, jeżeli wszystkie współczynniki dekoherencji γ_α są nieujemne to wygenerowane odwzorowanie dynamiczne $\Lambda(t)$ jest całkowicie dodatnie dla wszystkich $t \geq 0$. Ponadto odwzorowanie to jest też CP-podzielne, co przyjmowane jest za definicję markowowskości.

W pracach [H5–H8] dr Siudzińska rozważa wypukłe mieszaniny kanałów Pauliego oraz ich ougólnień. Badanie mieszanin odwzorowań dynamicznych zyskało na popularności po ukazaniu się prac [R66, R67] (M. J. W. Hall, J. D. Cresser, L. Li, E. Andersson, Phys. Rev. A 89, 042120 (2014), N. Megier, D. Chruściński, J. Piilo, W. T. Strunz, Sci. Rep. 7, 6379 (2017)), w których podany został jawny przykład wicznie niemarkowowskiej ewolucji kubitu oraz pokazano, że ewolucja taka może zostać otrzynama jako mieszanina dwóch półgrup Pauliego. W pracy [H5] wiecznie niemarkowowska ewolucja kubitu została uogólniona na przypadek quditowy. Podano też między innymi przykład ewolucji quditu, która jest CPTP ale posiada zawsze ujemne $(d-1)^2$ spośród d^2-1 współczynników dekoherencji oraz przykład ewolucji dla której wszystkie współczynniki dekoherencji są czasowo ujemne ale ewolucja jest CPTP. W pracy [H6] Habilitantka rozważa mieszaniny wypukłe nieodwracalnych uogólnionych kanałów Pauliego. Pokazuje, że mieszanina takich kanałów może dać kanał odwracalny lub ewolucję Markowa. Podany też został opis takich ewolucji w języku jąder całkowych. Kolejna praca, [H7], jest bezpośrednią kontynuacją [H6]. W pracy tej dr Siudzińska formułuje (twierdzenie 4) warunki konieczne i wystarczające na to aby odwzorowanie Pauliego, które jest CPTP było odpowiednio: podzielne, P-podzielne, CP-podzielne. Następnie korzystając z tych warunków analizuje mieszaniny kanałów Pauliego z różnych klas — podzielnych, P-podzielnych i CP-podzielnych. W pracy [H8] rozważane są mieszanki fazowo-kowariantnych kanałów kubitowych. Kanały takie mogą być nieunitalne, to znaczy $\Lambda(I) \neq I$. W [H8] pokazano między innymi, że wypukła kombinacja odwzorowań nieunitalnych może prowadzić do odwzorowania unitalnego, że mieszanka odwzorowań komutatywnych może dać odwzorowanie niekomutatywne oraz, że kanały fazowo-kowariantne mogą powstać z wypukłych kombinacji kanałów, które nie mają tej własności.

Poprawa własności komunikacyjnych kanałów za pomocą szumów

Kanały kwantowe charakteryzowane są za pomocą różnych wielkości: wierność kanału, maksymalna czystość na wyjściu, pojemność Holevo, pojemność klasyczna. W pracach [H9-H12] Habilitantka analizuje wpływ szumów na własności kanałów kwantowych, w szczególności problem czy szumy takie można wykorzystać do poprawy własności kanałów. Pierwsza w tej grupie praca [H9] to w istocie przełożenie (z pewnym uogólnieniem) wyników prac [J. ur Rehman, Y. Jeong, J. Kim, H. Shin, Sci. Rep. 8, 17457 (2018)] oraz [J. ur Rehman, Y. Jeong, H. Shin, Phys. Rev. A 99, 042312 (2019)] otrzymanych dla dyskretnych kanałów Weyla na przypadek uogólnionych kanałów Pauliego. W ten sposób znalezione zostały dolne i górne ograniczenia na pojemność Holevo dla uogólnionych kanałów Pauliego a następnie wyznaczona została pojemność klasyczna dla pewnych klas uogólnionych kanałów Pauliego. Rezultaty te znalazły swoje zastosowanie w następnej pracy [H10], gdzie rozważana jest pojemność klasyczna uogólnionych kanałów Pauliego generowanych za pomocą całkowego jądra pamięci postaci $K(t) = \delta(t)\mathcal{L} + \mathbb{K}(t)$, gdzie $\mathcal{L}$ jest generatorem półgrupy Markowa. W [H10] podane zostały przykłady takich wyborów $\mathcal{L}$ i $\mathbb{K}(t)$ dla których pojemność klasyczna ewolucji Markowa w pewnym okresie czasu jest mniejsza niż pojemność klasyczna ewolucji z dodatkiem $\mathbb{K}$ co interpretować można w ten sposób, że dodatek szumu może zwiększyć pojemność kanału. Pokazano też, że podobnego efektu nie da się uzyskać gdy ewolucja jest otrzymana jako rozwiązanie równania master z zależnym od czasu generatorem $\mathcal{L}(t)$. Prace [H11] i [H12] poświęcone są analizie fazowo-kowariantnych kanałów kubitowych, które mogą być nieunitalne. W [H11] dr Siudzińska znajduje analitycznie minimalną i maksymalną wierność takich kanałów dla stanów czystych ($f_{min}(\Lambda)$, $f_{max}(\Lambda)$), a także maksymalną czystość wyjściową zdefiniowaną przy użyciu p-normy Schattena ($\nu_p(\Lambda)$ oraz $\nu_\infty(\Lambda)$) jako funkcje wartości własnych kanału. Wyznaczona też została konkurencja Wootersa stanu wyjściowego $c(\Lambda)$ przy założeniu, że przez kanał transmitujemy polówkę stanu maksymalnie splątanego dwóch kubitów (to znaczy do stanu maksymalnie splątanego stosujemy operację $I \otimes \Lambda$). Następnie analizowane są kanały postaci $\Lambda = (1-p)\Lambda_U + p\Lambda_{NU}$ gdzie Λ_U jest unitalnym kanałem fazowo-kowariantnym natomiast Λ_{NU} jest kanałem maksymalnie nieunitalnym dla którego niezerowe wartości własne są takie same jak dla Λ_U. Dla takiego kanału przy pewnych konkretnych wyborach wartości własnych zostały wyznaczone wielkości $f_{min}(\Lambda)$, $f_{max}(\Lambda)$, $\nu_p(\Lambda)$, $\nu_\infty(\Lambda)$ oraz $c(\Lambda)$ w zależności od p. Okazuje się, że dla niezerowych p można otrzymać większe wartości wymienionych wyżej wielkości niż dla kanałów unitalnych. Kontynuacją [H11] jest praca [H12] gdzie w pewnej szczególnej i upraszczającej problem parametryzacji wartości własnych kanału fazowo-kowariantnego wyznaczone zostały pojemność Holevo i pojemność wspomagana splątaniem w funkcji parametru określającego nieunitalność. Pokazano, że zwiększając stopień nieunitalności można zwiększyć zarówno pojemność Holevo jak i klasyczną pojemność wspomaganą splątaniem.

Dalsze uogólnienia kanałów Pauliego
Kanały Pauliego na przypadek kuditowy zazwyczaj uogólniane są z wykorzystaniem wzajemnie niezaburzonych baz (MUBs). Kilka lat temu A. Kalev i G. Gour w pracy [New J. Phys. 16, 053038 (2014)] wprowadzili pojęcie wzajemnie nieobciążonych pomiarów (*mutually unbiased measurements*, MUMs). Ciekawą własnością MUMs jest to, że dla przestrzeni o dowolnym wymiarze d zawsze możemy skonstruować $d+1$ MUMs, znany jest również jawny sposób ich konstrukcji. Korzystając z tego pojęcia Habilitantka w ostatniej pracy cyklu habilitacyjnego [H13] proponuje uogólnienie kanałów Pauliego w którym rolę projektorów skonstruowanych z użyciem wektorów z MUBs pełnią operatory tworzące MUMs. W ten sposób powstają kanały, które, jak pokazano w [H13], są bistochastyczne ale których wektory własne nie muszą być operatorami unitarnymi. Dla takich kanałów dr Siudzińska formułuje warunki wystarczające całkowitej dodatniości oraz warunki wystarczające na to, żeby kanał był kanałem łamiącym splątanie. Wyznaczona też została maksymalna wyjściowa 2-norma, $\nu_2(\Lambda)$, takiego kanału. Podano też jawną konstrukcję takich kanałów dla $d = 3$ w dwóch przypadkach: gdy odpowiednie MUM są skonstruowane przy pomocy macierzy Gell-Manna oraz z użyciem operatorów Weyla.

W mojej opini najciekawszymi z omówionych prac są te dotyczące mieszanin odwzorowań dynamicznych. Zawierają one nietrywialne rezultaty, ich osiągnięcie wymagało też zastosowania zaawansowanych metod fizyki matematycznej. Bardzo interesująca wydaje mi się również propozycja uogólnienia kanałów Pauliego z wykorzystaniem pomiarów wzajemnie nieobciążonych. Szkoda, że propozycja ta nie była rozwijana w dalszych pracach Habilitantki i że znalazła stosunkowo niewielki oddźwięk w literaturze (tylko 4 cytowania, w tym 2 przez Autorkę).

Przy ocenie osiągnięcia habilitacyjnego jak i całego dorobku Pani dr Siudzińskiej zwraca uwagę bardzo duża specjalizacja Habilitantki. Moim zdaniem jest to pewien minus. Z drugiej strony specjalizacja w bardzo wąskim obszarze badań pozwala osiągnąć w stosunkowo krótkim czasie wyniki mające realny wpływ na rozwój tego obszaru. Tak jest właśnie w przypadku dr Siudzińskiej. Jej prace, pomimo tego, że zostały opublikowane w okresie ostatnich 9 lat i dotyczą fizyki matematycznej, były już cytowane 88 razy (bez autocytowań). Prace z przedstawionego cyklu habilitacyjnego również były już wielokrotnie cytowane. Dlatego też mogę stwierdzić, że przedstawione przez dr Siudzińską osiągnięcie naukowe spełnia wymagania ustawowe to znaczy stanowi znaczący wkład w rozwój dyscypliny nauki fizyczne.

Podsumowując, sądzę, że opisane powyżej dorobek i osiągnięcia Habilitantki spełniają ustawowe wymogi dotyczące habilitacji. W związku z tym rekomenduję komisji habilitacyjnej nadanie dr Katarzynie Siudzińskiej stopnia doktora habilitowanego w dyscyplinie nauki fizyczne.

Paweł Caban