

Rada Dyscypliny Nauki Fizyczne
Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Mikołaja
Kopernika w Toruniu
ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń

za pośrednictwem:

Rady Doskonałości Naukowej
pl. Defilad 1
00-901 Warszawa
(Pałac Kultury i Nauki, p. XXIV, pok. 2401)

Katarzyna Siudzińska
Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wniosek

z dnia 28 czerwca 2023 r.

o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego
w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie¹ nauki fizyczne

Określenie osiągnięcia naukowego będącego podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora
habilitowanego:

Analiza i zastosowania kanałów Pauliego i ich uogólnień

Wnioskuje – na podstawie art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie
wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 zm.) – aby komisja habilitacyjna podejmowała
uchwałę w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w głosowaniu ~~tajnym~~/jawnym*²

Zostałem poinformowany, że:

*Administratorem w odniesieniu do danych osobowych pozyskanych w ramach postępowania w
sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest Przewodniczący Rady Doskonałości Naukowej
z siedzibą w Warszawie (pl. Defilad 1, XXIV piętro, 00-901 Warszawa).*

Kontakt za pośrednictwem e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl, tel. 22 656 60 98 lub w siedzibie organu.

*Dane osobowe będą przetwarzane w oparciu o przesłankę wskazaną w art. 6 ust. 1 lit. c)
Rozporządzenia UE 2016/679 z dnia 27 kwietnia 2016 r. w związku z art. 220 - 221 oraz art.
232 – 240 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, w celu
przeprowadzenie postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego oraz realizacji praw i
obowiązków oraz środków odwoławczych przewidzianych w tym postępowaniu.*

*Szczegółowa informacja na temat przetwarzania danych osobowych w postępowaniu dostępna jest
na stronie www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html*

.....
(podpis wnioskodawcy)

¹ Klasyfikacja dziedzin i dyscyplin wg. rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 20 września 2018 r. w sprawie dziedzin nauki i dyscyplin naukowych oraz dyscyplin w zakresie sztuki (Dz. U. z 2018 r. poz. 1818).

² * Niepotrzebne skreślić.

Załączniki:

1. Dane wnioskodawcy w języku polskim
2. Dane wnioskodawcy w języku angielskim
3. Kopia dokumentu potwierdzającego posiadanie stopnia doktora
4. Autoreferat w języku polskim
5. Autoreferat w języku angielskim
6. Wykaz osiągnięć naukowych w języku polskim
7. Wykaz osiągnięć naukowych w języku angielskim
8. Oświadczenia wnioskodawcy i współautorów
9. Potwierdzenie prowadzenia badań na zagranicznej uczelni
10. Oświadczenie o kierowaniu grantami badawczymi

Board of Disciplines of Physical Sciences
Institute of Physics, Faculty of Physics,
Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus
University in Toruń
ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń

through:

The Council of Scientific Excellence

pl. Defilad 1

00-901 Warszawa

(Palace of Science and Culture, 24th floor,
room 2401)

Katarzyna Siudzińska
Institute of Physics, Faculty of Physics, Astronomy
and Informatics, Nicolaus Copernicus University
in Toruń

Application

dated 28 June 2023

re.: commencement of the procedure for the conferment of the post-doctoral degree
of doctor habilitated in the field of natural sciences in the following discipline:
physical sciences

Scientific achievement which entitles the applicant to commence the procedure for the
conferment of the post-doctoral degree of doctor habilitated:

Analysis and applications of the Pauli channels and their generalizations

Pursuant to art. 221 para 10 of the Higher Education and Science Act dated 20 July 2018 (Polish
Journal of Laws of 2018 item 1668, as amended) I hereby kindly request that the habilitation
commission pass a resolution on the conferment of the post-doctoral degree of doctor habilitated
in ~~secret~~/open voting*¹.

I was advised of the following:

*The President of the Scientific Council of Excellence with its registered office in Warsaw (pl.
Defilad 1, 24th floor, 00-901 Warsaw) is the Administrator of personal data collected under the
procedure for the conferment of the post-doctoral degree of doctor habilitated.*

*Contact us via e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl , phone 22 656 60 98 or personally at our office.
Personal data shall be processed pursuant to art. 6 para 1 letter c) Regulation (EU) 2016/679
dated 27 April 2016 in connection with art. 220-221 and art. 232-240 of the Higher Education and
Science Act dated 20 July 2018, for the purposes of the procedure for the conferment of the post-
doctoral degree of doctor habilitated and in order to exercise the rights and obligations as well as
the right to appeal in this procedure.*

*For detailed information on processing personal data in the procedure see
www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html*

.....
(Applicant's signature)

¹ * Delete if not applicable.

Attachments:

1. Personal Data of the Applicant in Polish
2. Personal Data of the Applicant in English
3. Copy of the evidence of doctoral degree
4. Summary of Professional Accomplishments in Polish
5. Summary of Professional Accomplishments in English
6. List of scientific or artistic achievements in Polish
7. List of scientific or artistic achievements in English
8. Declarations of the Applicant and Collaborators
9. Confirmation of conducting research on another university
10. Declaration on research grant acquisition

Autoreferat

1 Imię i nazwisko: Katarzyna Barbara Siudzińska

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne - z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- 2019 r. – stopień doktora nauk fizycznych
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
tytuł rozprawy doktorskiej: *Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels*
promotor: prof. dr hab. Dariusz Chruściński
- 2016 r. – tytuł magistra filologii angielskiej, spec. tłumaczeniowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
tytuł pracy magisterskiej: *The analysis of self-translatorial errors based on selected scientific publications in mathematical physics*
promotor: dr Monika Linke-Ratuszny
- 2014 r. – tytuł magistra fizyki, spec. fizyka teoretyczna
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
tytuł pracy magisterskiej: *Geometric approach to classical and quantum mechanics*
promotor: prof. dr hab. Dariusz Chruściński
- 2012 r. – tytuł licencjata fizyki, spec. fizyka teoretyczna
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
tytuł pracy magisterskiej: *Exact vacuum solutions of Einstein's field equations for point masses*
promotor: prof. dr hab. Dariusz Chruściński

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- od października 2021 r.: adiunkt w Katedrze Fizyki Matematycznej, Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
- październik 2019 r. – wrzesień 2021 r.: asystent w Katedrze Fizyki Matematycznej, Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)

4.1 Tytuł osiągnięcia

Analiza i zastosowania kanałów Pauliego i ich uogólnień.

4.2 Cele badawcze, wyniki i opis opartych na nich publikacji, wpływ na przyszłe badania

4.2.1 Wstęp, cele badawcze i motywacja badań

Osiągnięcie habilitacyjne przedstawione w niniejszym wniosku polega na analizie i charakteryzacji kwantowych kanałów Pauliego oraz ich uogólnień. Obejmuje istotne zastosowania w otwartych układach kwantowych, komunikacji kwantowej i kwantowym przetwarzaniu informacji. W części wstępnej przedstawiam krótki wstęp teoretyczny i podaję definicje ważne dla części głównej, w której swoje osiągnięcie opisuję bardziej szczegółowo. Podsumowanie znajduje się w sekcji wniosków, zawierającej również listę otwartych problemów, które pojawiły się podczas moich badań, a także ich obecny i możliwy przyszły wpływ na dziedzinę.

Wprowadzenie i motywacja

Dla celów komunikacji kwantowej kluczowe jest zrozumienie, jak niezawodnie przekazywać informacje kwantowe, manipulować nimi i zabezpieczać je podczas przesyłania przez zaszumiony kanał kwantowy. Jednak w praktyce nie istnieją idealne (bezszumowe) kanały komunikacyjne, a zatem niektóre informacje są tracone podczas transmisji. Wszystkie realistyczne układy fizyczne oddziałują z zewnętrznym otoczeniem, powodując pojawienie się korelacji, co zmusza nas do traktowania układów kwantowych nie jako odizolowanych, ale otwartych. Dlatego ewolucja podukładów tworzących komputer kwantowy jest nieunitarna, a przez to nieodwracalna. Utrata spójności kwantowej, znana również jako dekoherencja, jest zjawiskiem nieuniknionym, ponieważ układy kwantowe mogą oddziaływać nawet ze stanem próżni, w którym nie występują żadne zewnętrzne cząstki ani pola. Ze względu na postęp naukowy i technologiczny bramki logiczne i inne urządzenia elektroniczne zbliżają się do skali atomowej. Z tego powodu coraz ważniejsze staje się opracowanie satysfakcjonujących metod przesyłania danych.

W kwantowej teorii informacji kanał kwantowy jest operacją charakteryzującą proces kwantowy [R1, R2]. Zmiany w stanach kwantowych mogą być dokonywane poprzez dyskretne skoki lub ewolucję ciągłą w czasie. Odwzorowania kwantowe są szeroko stosowane w kwantowym przetwarzaniu i przesyłaniu informacji (QIPC). Jest to interdyscyplinarna dziedzina nauki łącząca fizykę, matematykę, informatykę i inżynierię materiałową, a jej rozwój jest ważną europejską strategią badawczą, która może zrewolucjonizować zarówno naukę, jak i technologię [R3, R4]. Metody obliczeniowe QIPC są wykorzystywane do budowy komputerów kwantowych, których moc obliczeniowa jest poza zasięgiem klasycznych komputerów. Połączenia między komputerami są realizowane poprzez komunikację kwantową z wykorzystaniem stanów splątanych, teleportacji kwantowej i kryptografii kwantowej, co umożliwia uzyskanie całkowicie bezpiecznych protokołów i systemów szyfrowania [R5, R6, R7].

W języku matematycznym odwzorowanie kwantowe jest odwzorowaniem liniowym $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ działającym pomiędzy dwiema przestrzeniami Banacha $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ operatorów ograniczonych na stowarzyszonej przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_k . Operacja Φ zachowująca ślad, jeśli $\text{Tr} \Phi[X] = \text{Tr} X$ dla dowolnego $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$. Ponadto Φ jest odwzorowaniem dodatnim, jeśli

$\Phi[X] \geq 0$ dla każdego $X \geq 0$. Własność kompletniej dodatniości wymaga, by Φ spełniało warunek $(\mathbb{1} \otimes \Phi)[X] \geq 0$ dla dowolnych dodatnich operatorów $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$, co jest silniejsze niż zwykła dodatniość. Odwzorowania kompletnie dodatnie zachowujące ślad, znane również jako kanały kwantowe, są używane do opisu ewolucji $\rho \mapsto \rho' = \Phi[\rho]$ stanów kwantowych reprezentowanych przez operatory gęstości ρ . Każdy kanał kwantowy można zapisać w reprezentacji Krausa [R8]

$$\Phi[\rho] = \sum_{k=0}^{d^2-1} M_k \rho M_k^\dagger, \quad (1)$$

gdzie M_k spełniające warunek $\sum_{k=0}^{d^2-1} M_k^\dagger M_k = \mathbb{I}_d$ są operatorami Krausa. Warto zauważyć, że tak zadane Φ mogą opisywać wszystkie dopuszczalne operacje kwantowe, od pomiarów kwantowych po ewolucję ciągłą w czasie.

Kanały kwantowe znajdują zastosowanie w teorii otwartych układów kwantowych, gdzie ich sparametryzowane czasowo rodziny $\{\Phi(t); t \geq 0, \Phi(0) = \mathbb{1}\}$ (odwzorowania dynamiczne) opisują ewolucję układów fizycznych oddziałujących z zewnętrznym otoczeniem [R9, R10]. Zakłada się, że zawsze istnieje zamknięty (ewoluujący unitarnie) układ złożony ze stowarzyszoną przestrzenią Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$, gdzie \mathcal{H} i \mathcal{H}_E są odpowiednio przestrzeniami Hilberta układu fizycznego i otoczenia. Wyewoluowany stan układu $\rho(t)$ można odzyskać poprzez dylatację Stinespringa [R11], biorąc częściowy ślad Tr_E po otoczeniu,

$$\rho(t) = \Phi(t)[\rho] = \text{Tr}_E [U(t)(\rho \otimes \rho_E)U^\dagger(t)]. \quad (2)$$

W powyższym wzorze $U(t)$ jest operatorem unitarnym, a ρ_E oznacza początkowy stan otoczenia. Przykłady otwartych układów kwantowych obejmują układy wielociałowe, takie jak atomy i cząsteczki, które oddziałują ze światłem lub innymi cząstkami. Mają one zastosowanie w wielu działach fizyki, wliczając optykę kwantową, fizykę ciała stałego, biologię kwantową i fizykę chemiczną [R12].

Alternatywnie dynamikę otwartych układów kwantowych można opisać za pomocą równań master. W najprostszym scenariuszu zakłada się, że sprzężenie między układem a otoczeniem jest słabe, a skale czasowe między kolejnymi interakcjami są stosunkowo duże. Wtedy ewolucja jest zadana przez równanie master dla półgrupy markowowskiej $\dot{\Phi}(t) = \mathcal{L}\Phi(t)$, gdzie generator Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana-Lindblada (GKSL) [R13, R14]

$$\mathcal{L}[\rho] = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{d} \sum_{\alpha=1}^{d^2-1} \gamma_\alpha \left(V_\alpha \rho V_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}[V_\alpha^\dagger V_\alpha, \rho]_+ \right) \quad (3)$$

z operatorami szumu V_α , współczynnikami dekoherencji $\gamma_\alpha \geq 0$ i efektywnym hamiltonianem H . Jednak im bardziej złożony układ, tym większe prawdopodobieństwo utraty informacji z układu do otoczenia. Proces ten nazywany jest dekoherencją. Jeśli oddziaływanie między układem fizycznym a jego otoczeniem jest wystarczająco silne lub długie, wówczas stan układu zaczyna zależeć od historii swoich wcześniejszych stanów. Efekty pamięci zaczynają odgrywać ważną rolę, co sprawia, że konieczne jest rozważenie modeli ewolucji wykraczających poza reżim Markowa [R15, R16, R17, R18]. Jednym ze sposobów uwzględnienia silnego wpływu efektów otoczenia jest opisanie ewolucji za pomocą równań master z lokalnymi w czasie generatorami $\mathcal{L}(t)$. Generatory te mają postać GKSL, jak w równaniu (3), ale z zależnymi od czasu $H(t)$, $V_\alpha(t)$ i $\gamma_\alpha(t)$. Główna różnica polega na tym, że współczynniki dekoherencji nie muszą już być dodatnie, aby opisywać dozwoloną fizycznie ewolucję. Innym sposobem na uwzględnienie efektów niemarkowowskich jest rozważenie równań master Nakajimy-Zwanziga [R19, R20] $\dot{\Phi}(t) = \int_0^t K(t-\tau)\Phi(\tau) d\tau$ z nielokalnymi jądrami pamięci $K(t)$. Jednak jako równania różniczkowo-całkowe są one trudniejsze do rozwiązania lub analizy.

W swoich pracach używam definicji kwantowej markowowskości, która jest związana z podzielnością odwzorowań dynamicznych [R21, R22]. Odwzorowanie dynamiczne $\Phi(t)$ jest podzielne, jeśli dla dowolnego $t \geq s \geq 0$ istnieje propagator $V(t, s)$ taki, że $\Phi(t) = V(t, s)\Phi(s)$.

Dodatni operator $V(t, s)$ definiuje odwzorowanie dodatnio podzielne. Analogicznie kompletnie dodatnio podzielne $\Phi(t)$ odpowiada kompletnie dodatniemu propagatorowi i opisuje ewolucję markowowską [R21, R23]. Dla odwracalnych odwzorowań dynamicznych, $V(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ jest zawsze dobrze określone, a markowowskość $\Phi(t)$ jest równoważna dodatniości współczynników dekoherencji $\gamma_\alpha(t)$ jego lokalnego w czasie generatora $\mathcal{L}(t)$. W przeciwnym razie ewolucja jest niemarkowowska, a stopień niemarkowowskości można dalej sklasyfikować za pomocą hierarchii odwzorowań podzielnych [R23]. Otwarte układy kwantowe z dynamiką dyssypatywną są symulowane za pomocą urządzeń NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum) [R24, R25, R26]. Przykłady obejmują kanały dekoherencji w nadprzewodzących komputerach kwantowych [R27], układy fotosyntetyczne z szumami rozfazującymi [R28], fotosyntetyczne pozyskiwanie światła [R29] i transfer elektronów w materiałach organicznych [R30].

Moja praca nad kanałami kwantowymi i otwartymi układami kwantowymi rozpoczęła się podczas studiów doktoranckich. Poniżej przypominam definicje i własności ważnych klas kanałów. Są one kluczowe dla zrozumienia poniższych opisów publikacji zawartych w osiągnięciu habilitacyjnym.

Kanały Pauliego

Teoria otwartych układów kwantowych opisuje układy fizyczne, które wchodzą w interakcje z zewnętrznym układem zwanym *otoczeniem*. Ewolucja takich układów jest w ogólności nie-unitarna. Jeśli jednak ewolucję unitarną zakłóca błędy o charakterze klasycznym, dynamika układu otwartego jest opisywana przez kanały mieszanie unitarne [R1, R31], znane również w literaturze pod nazwami kanały losowo unitarne [R32] lub kanały losowych pól zewnętrznych [R31, R33]. Ważną cechą kanałów mieszanie unitarnych jest to, że ich szумы można skorygować z użyciem klasycznych informacji uzyskanych z pomiarów na otoczeniu [R34].

Najbardziej ogólna bistochastyczna ewolucja kubitów jest zadana przez kompletnie dodatnie odwzorowanie unitalne zachowujące ślad $\Phi = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}$ takie, że \mathcal{U}, \mathcal{V} to kanały unitarne, a Λ jest kanałem Pauliego [R35, R36]. Reprezentacja Krausa kanału Pauliego ma postać

$$\Lambda[\rho] = \sum_{\alpha=0}^3 p_\alpha \sigma_\alpha \rho \sigma_\alpha, \quad (4)$$

gdzie σ_α oznacza macierze Pauliego, zaś p_α jest rozkładem prawdopodobieństwa. Pamiętając jednak, że reprezentacja Krausa kanału nie jest jednoznaczna, może okazać się korzystniejszym zdefiniowanie kanału Pauliego za pomocą (unikalnych) równań własnych $\Lambda[\sigma_\alpha] = \lambda_\alpha \sigma_\alpha$, gdzie $\lambda_0 = 1$ oraz $\lambda_k = 2(p_0 + p_k)$, $k = 1, 2, 3$. Całkowita dodatniość Λ jest wtedy gwarantowana przez warunki Fujiwary-Algoeta [R37, R35]

$$-1 \leq \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \leq 1 + 2 \min_{\alpha} \lambda_\alpha. \quad (5)$$

Rodzina kanałów Pauliego obejmuje wiele ważnych przypadków, takich jak odwzorowania tłumiące fazę, depolaryzujące, i tzw. *two-Pauli* [R38, R39]. Unitalne odwzorowania kubitowe są jednymi z najbardziej podstawowych i powszechnie rozważanych kanałów w kwantowej teorii informacji.

Dynamiczne odwzorowania Pauliego $\Lambda(t)$ są zwykle rozważane jako rozwiązania równań master z lokalnymi w czasie generatorami $\mathcal{L}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$ lub jądrami pamięci $K(t) = \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$, gdzie

$$\mathcal{L}_\alpha[\rho] = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \rho \sigma_\alpha - \rho). \quad (6)$$

Oprócz podobnej postaci, operatory $\mathcal{L}(t)$ i $K(t)$ mają też podobne własności. Mianowicie, ich wektory własne również są macierzami Pauliego, czyli operatorami stałymi w czasie. W związku z tym, aby rozwiązać równania master, wystarczy pracować na zależnych od czasu wartościach

własnych, co znacznie upraszcza obliczenia. Ponadto właściwości podzielności dynamicznych odwzorowań Pauliego są dobrze scharakteryzowane. Odwracalna $\Lambda(t)$ jest kompletnie dodatnio podzielna wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_\alpha(t) \geq 0$, a dodatnio podzielna jest wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_\alpha(t) + \gamma_\beta(t) \geq 0$ dla wszystkich $\alpha \neq \beta$. W związku z tym stopień niemarkowowskości stowarzyszonej ewolucji jest w pełni zakodowany we wskaźnikach dekoherencji.

Coraz więcej uwagi poświęca się nieodwracalnym dynamicznym odwzorowaniom Pauliego. W przypadku takich map propagator nie jest jednoznacznie zdefiniowany, a związany z nim generator lokalny w czasie ma współczynniki dekoherencji eksplodujące do nieskończoności [R40]. Przykłady obejmują układy dwupoziomowe w dyssypatywnym otoczeniu [R41], układy napędzane przez lasery z szumem fazowym [R42, R43] oraz implementacje kwantowych bramek NOT [R44].

Uogólnione kanały Pauliego

Istnieje wiele sposobów wprowadzenia uogólnień kanałów Pauliego dla ewolucji kuditowej [R45, R46], [P11] w zależności od właściwości, które mają zostać zachowane. Ważną cechą macierzy Pauliego σ_α jest to, że ich wektory własne $\{\psi_0^{(\alpha)}, \psi_1^{(\alpha)}\}$ tworzą trzy bazy wzajemnie nieobciążone (MUB). Z definicji wynika, że dwie bazy ortonormalne w $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$ są wzajemnie nieobciążone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left| \langle \psi_k^{(\alpha)} | \psi_l^{(\beta)} \rangle \right|^2 = \frac{1}{d}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k = 0, \dots, d-1. \quad (7)$$

Zakładając, że przestrzeń Hilberta dopuszcza maksymalną liczbę $d+1$ MUB-ów [R47], co zachodzi w wymiarach pierwszych i ich potęgach, możliwe jest zdefiniowanie $d^2 - 1$ operatorów unitarnych

$$U_\alpha^k = \sum_{\ell=0}^{d-1} \omega^{k\ell} P_\ell^{(\alpha)}, \quad \omega = e^{2\pi i/d}, \quad (8)$$

gdzie $P_k^{(\alpha)} = |\psi_k^{(\alpha)}\rangle\langle\psi_k^{(\alpha)}|$ są projektorami rzędu jeden na wektory baz wzajemnie nieobciążonych. Operatory te są następnie wykorzystywane w konstrukcji uogólnionych kanałów Pauliego Nathansona i Ruskai [R48]

$$\Lambda[\rho] = p_0\rho + \frac{1}{d-1} \sum_{\alpha=1}^{d+1} p_\alpha \sum_{k=1}^{d-1} U_\alpha^k \rho U_\alpha^{k\dagger}, \quad (9)$$

gdzie p_α oznacza rozkład prawdopodobieństwa. W alternatywny sposób uogólnione kanały Pauliego można zapisać w postaci

$$\Lambda = \pi_0 \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^{d+1} \pi_\alpha \Phi_\alpha \quad (10)$$

z użyciem $d+1$ kanałów kwantowo-klasycznych

$$\Phi_\alpha[\rho] = \sum_{k=0}^{d-1} P_k^{(\alpha)} \rho P_k^{(\alpha)}. \quad (11)$$

Kanały Pauliego są odtwarzane dla $d=2$. Oprócz własności MUB-ów, na wymiary $d > 2$ przenoszą się również inne własności Λ , takie jak hermitowskość czy bycie mieszaniną kanałów unitarnych. Co więcej, równania własne

$$\Lambda[U_\alpha^k] = \lambda_\alpha U_\alpha^k, \quad k = 1, \dots, d-1, \quad \Lambda[\mathbb{1}_d] = \mathbb{1}_d \quad (12)$$

pokazują, że uogólnione kanały Pauliego są odwzorowaniami unitalnymi o rzeczywistych, $(d-1)$ -krotnie zdegenerowanych wartościach własnych

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{d-1} [d(p_0 + p_\alpha) - 1]. \quad (13)$$

Wektory własne U_α^k , podobnie jak w przypadku kanałów Pauliego, są operatorami unitarnymi niezależnymi od czasu. Kompletnia dodatniość Λ jest w pełni kontrolowana przez jej wartości własne. Warunki konieczne i wystarczające są zadane przez uogólnione warunki Fujiwary-Algoeta [R37, R48, R38].

$$-\frac{1}{d-1} \leq \sum_{\beta=1}^{d+1} \lambda_\beta \leq 1 + d \min_{\beta>0} \lambda_\beta. \quad (14)$$

Dynamika kuditę opisywana przez uogólnione kanały Pauliego $\Lambda(t)$ spełniające równania master z lokalnymi w czasie generatorami $\mathcal{L}(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} \gamma_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$ lub jądrami pamięci $K(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} k_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$, gdzie

$$\mathcal{L}_\alpha[\rho] = \frac{1}{d} \left[\sum_{k=1}^{d-1} U_\alpha^k \rho U_\alpha^{k\dagger} - (d-1)\rho \right]. \quad (15)$$

Analogicznie do przypadku kubitowego, $\Lambda(t)$, $\mathcal{L}(t)$ i $K(t)$ mają wspólne (niezależne od czasu) wektory własne U_α^k . Dlatego różniczkowe i różniczkowo-całkowe równania ewolucji na operatorach ponownie mogą zostać zredukowane do równań ewolucji na zależnych od czasu wartościach własnych. Opracowanie formalizmu matematycznego dla ewolucji $\Lambda(t)$ z pamięcią było jednym z tematów mojej rozprawy doktorskiej [P7, P8]. Ze względu na brak ogólnych metod na konstrukcję odwzorowań dodatnich znane są tylko warunki na dodatnią podzielność, które są konieczne lub wystarczające [P10]. Uogólnione kanały Pauliego i ich dynamika są analizowane pod kątem niemarkowskości [P7, P8, P10], wierności kanału [P12, P13], szacowania parametrów [R49, R50] i nieodwracalności [R51, R52].

Kanały fazowo kowariantne

Kanały Pauliego nie opisują najbardziej ogólnej ewolucji kubitę. Oprócz odwzorowań unitalnych istnieje duża klasa kanałów kwantowych, które unitalne nie są – to znaczy, że ich stan stacjonarny nie jest już stanem maksymalnie mieszanym. Ważną klasą nieunitalnych kanałów kwantowych są odwzorowania fazowo kowariantne Φ , które spełniają własność

$$\forall_{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \phi \in \mathbb{R}} \quad \Phi \left[e^{-i\sigma_3 \phi} X e^{i\sigma_3 \phi} \right] = e^{-i\sigma_3 \phi} \Phi[X] e^{i\sigma_3 \phi}. \quad (16)$$

Innymi słowy, ewolucja zadana przez Φ komutuje z ewolucją unitarną $\mathcal{U}(\theta)[\rho] = \exp(-i\sigma_3 \theta) \rho \times \exp(i\sigma_3 \theta)$ opisującą obroty na kuli Blocha. Klasa kanałów fazowo kowariantnych obejmuje dowolną dynamikę, która wynika z połączenia absorpcji energii, emisji energii i tłumienia fazy [R53, R54]. Kanały te zostały po raz pierwszy przedstawione jako rozwiązania fenomenologicznych równań master charakteryzujących procesy termalizacji i rozfazowania wykraczające poza przybliżenie Markowa [R55]. Wyprowadzenie mikroskopowe zostało później przedstawione dla słabosprężonego modelu spin-bozon w przybliżeniu sekularnym [R56].

Najbardziej ogólna postać kanału fazowo kowariantnego jest dana przez $\Phi = \Lambda \mathcal{U}(\theta)$, gdzie [R54, R53]

$$\Lambda[\rho] = \frac{1}{2} \left[(\mathbb{I} + \lambda_* \sigma_3) \text{Tr} \rho + \lambda_1 \sigma_1 \text{Tr}(\rho \sigma_1) + \lambda_2 \sigma_2 \text{Tr}(\rho \sigma_2) + \lambda_3 \sigma_3 \text{Tr}(\rho \sigma_3) \right]. \quad (17)$$

Wartości $\lambda_* = 0$ odpowiada podklasa kanałów Pauliego z $\lambda_2 = \lambda_1$. Z powyższej postaci wynika, że macierze Pauliego są wektorami własnymi Λ do wartości własnych λ_1 (dwukrotnie zdegenerowanej) i λ_3 . Ostatnie równanie własne, $\Lambda[\rho_*] = \rho_*$, pokazuje, że czwarty wektor własny jest stanem stacjonarnym (zachowywanym pod działaniem Λ)

$$\rho_* = \frac{1}{2} \left[\mathbb{I} + \frac{\lambda_*}{1 - \lambda_3} \sigma_3 \right]. \quad (18)$$

Jeśli $\lambda_* \neq 0$, wtedy Λ jest nieunitalne ($\Lambda[\mathbb{I}] \neq \mathbb{I}$). Dlatego własność ta jest w pełni kontrolowana przez pojedynczy parametr λ_* . Ponieważ macierze Pauliego są hermitowskie, λ_1 , λ_3 i λ_* są

liczbami rzeczywistymi. Zadają one również warunki konieczne i wystarczające na kompletną dodatniość Λ [R54],

$$|\lambda_3| + |\lambda_*| \leq 1, \quad 4\lambda_1^2 + \lambda_*^2 \leq (1 + \lambda_3)^2. \quad (19)$$

Ważną własnością kanałów fazowo kowariantnych jest ich niekomutatywność. Mianowicie, jeśli Λ_1 i Λ_2 są fazowo kowariantne, to w ogólności $\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$. Podobna nierówność nie występuje dla odwzorowań unitalnych (Pauliego).

Dla fazowo kowariantnych odwzorowań dynamicznych $\Lambda(t)$ rozważa się równania master z generatorami lokalnymi w czasie $\mathcal{L}(t) = \gamma_+(t)\mathcal{L}_+ + \gamma_-(t)\mathcal{L}_- + \gamma_3(t)\mathcal{L}_3$ lub jądrami pamięci $K(t) = k_+(t)\mathcal{L}_+ + k_-(t)\mathcal{L}_- + k_3(t)\mathcal{L}_3$ gdzie

$$\mathcal{L}_\pm[\rho] = \sigma_\pm \rho \sigma_\mp - \frac{1}{2} \{ \sigma_\mp \sigma_\pm, \rho \}, \quad \mathcal{L}_3[\rho] = \frac{1}{4} (\sigma_3 \rho \sigma_3 - \rho). \quad (20)$$

W powyższym równaniu $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ są operatorami podnoszenia i opuszczania (drabinowymi). W przeciwieństwie do przypadku unitalnych odwzorowań Pauliego, tylko trzy z czterech wektorów własnych nieunitalnego kanału $\Lambda(t)$ są niezależne od czasu. Ponadto jeden z wektorów własnych, a mianowicie stan stacjonarny $\rho_*(t)$, zależy od czasu, mimo że jego wartość własna jest stała. Pomimo większej złożoności, równania master dla odwzorowań fazowo kowariantnych można nadal sprowadzić do równań na funkcjach: wartościach własnych $\lambda_1(t)$, $\lambda_3(t)$ i parametrze nieunitalności $\lambda_*(t)$.

Z postaci $\mathcal{L}(t)$ wynika, że generator obejmuje tłumienie amplitudy ($\gamma_+(t) = \gamma_3(t) = 0$), odwrotne tłumienie amplitudy ($\gamma_-(t) = \gamma_3(t) = 0$), uogólnione tłumienie amplitudy ($\gamma_3(t) = 0$) i tłumienie fazy ($\gamma_\pm(t) = 0$) [R2]. Ogólne warunki na kompletnie dodatnią podzielność dla $\Lambda(t)$ to $\gamma_\pm(t) \geq 0$, $\gamma_3(t) \geq 0$. Warunki konieczne i wystarczające na dodatnią podzielność nie są jeszcze znane, natomiast częściowe wyniki zostały przedstawione w pracy [R54].

Cele badawcze

Moje artykuły naukowe zawierają teoretyczne rozważania w połączeniu z dyskusją potencjalnych zastosowań doświadczalnych. W swoich badaniach wykorzystuję zaawansowane metody fizyki teoretycznej i matematycznej z zakresu kwantowej teorii informacji oraz teorii otwartych układów kwantowych w celu poszerzenia wiedzy na temat własności i implementacji wybranych odwzorowań kwantowych. Wśród używanych narzędzi matematycznych znajdują się elementy algebry operatorowej, analizy matematycznej, geometrii riemannowskiej oraz teorii transformacji Laplace'a. Moje główne cele badawcze zostały wymienione poniżej.

- (1) *Geometria na przestrzeni kanałów kwantowych.* Dokonano geometrycznej charakteryzacji odwzorowań dodatnich i kompletnie dodatnich zachowujących ślad. Ilościowe wyniki dla względnych objętości pozwalają na określenie właściwości losowych kanałów kwantowych.
- (2) *Klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych.* Analizowane są wypukłe kombinacje odwzorowań dynamicznych, wykraczające poza mieszaniny półgrup markowskich, odwzorowań odwracalnych, a wreszcie odwzorowań komutatywnych. Udowodniono niewypukłość dla zbiorów odwzorowań dynamicznych, które są markowskie, niemarkowskie, nieunitalne, komutatywne i nieodwracalne. Półgrupę markowską można odtworzyć z mieszanin odwzorowań silnie niemarkowskich.
- (3) *Poprawa właściwości komunikacyjnych kanałów za pomocą szumów.* Korzystny wpływ dekoherencji i klasyczne szумы są wykorzystywane do poprawy pojemności klasycznej i innych miar wydajności kanałów kwantowych. W przypadku klasycznej pojemności nieunitalność okazuje się lepszym zasobem niż splątanie.
- (4) *Dalsze uogólnienia kanałów Pauliego.* Wprowadzono kanały bardziej ogólne niż uogólnione kanały Pauliego poprzez zastąpienie baz wzajemnie nieobciążonych operatorami pomiaru. Tym sposobem otrzymano klasę kanałów symetrycznych w dowolnym wymiarze skończonym.

4.2.2 Wyniki i opis opartych na nich publikacji

Prace wchodzące w skład mojego osiągnięcia habilitacyjnego dotyczą analizy teorii i zastosowań kanałów Pauliego, uogólnionych kanałów Pauliego oraz kanałów fazowo kowariantnych. W swoich publikacjach często rozwijałam wyniki uzyskane w poprzednich pracach. Z tego powodu zdecydowałam się uporządkować publikacje tematycznie, a nie chronologicznie. Tematy odpowiadają liście celów badawczych przedstawionych w części wstępnej.

Geometria na przestrzeni kanałów kwantowych

Pracę nad kanałami Pauliego rozpoczęłam podczas doktoratu. Mój pierwszy opublikowany artykuł dotyczył bistożastycznej ewolucji kubitów na różności funkcji Kählera [P6] (wyniki uogólnione w [P9]). Był to początek moich zainteresowań geometrią kanałów kwantowych, które później kontynuowałam podczas stażu w Niemczech. Niniejsza seria artykułów została zainspirowana badaniami prowadzonymi w grupie prof. Waltera Strunza, których wyniki zostały opublikowane w artykule o geometrii gaussowskich kanałów kwantowych [P5]. Odwzorowania gaussowskie są zdefiniowane na układach zmiennych ciągłych, których przestrzeń Hilberta ma nieskończenie wiele wymiarów. W rezultacie objętości zajmowane przez kanały kwantowe są nieskończone. Jednakże względne objętości – np. kanałów gaussowskich łamiących splątanie wśród wszystkich kanałów gaussowskich – są skończone. Interesujące własności można zaobserwować nawet przy niepełnej wiedzy o odwzorowaniach kwantowych. Moim celem było przeprowadzenie podobnej analizy dla kanałów Pauliego i ich uogólnień.

Motywacją do rozważania względnych objętości odwzorowań kwantowych jest określenie oczekiwanych właściwości losowo wybranego kanału. Za przykład może posłużyć zaszumiona ewolucja z jedynie częściową znajomością parametrów ją definiujących. Zastosowania losowych kanałów obejmują szyfrowanie kubitów [R57] i supergęste kodowanie [R58]. Poprzez analizę podstawowej geometrii możliwe jest znalezienie obszarów zajmowanych przez pożądaną klasę odwzorowań. Względne objętości interpretuje się jako prawdopodobieństwo tego, że dane kanały posiadają określone właściwości fizyczne. W szczególności nawet niekompletne informacje o ewolucji kwantowej mogą być wystarczające do określenia jej cech, takich jak granice minimalnej entropii wyjściowej i jej asymptotyczne zachowanie [R59, R60, R61, R62].

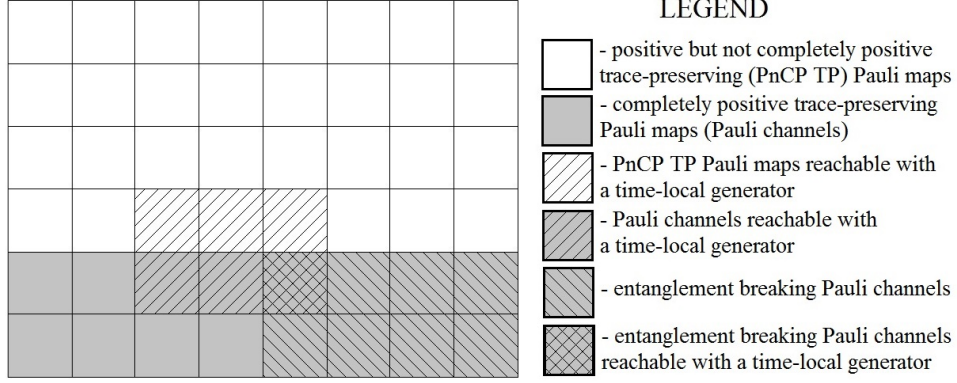
Formalizm matematyczny i metodologia są podobne we wszystkich moich pracach dotyczących geometrii. Geometryczne własności odwzorowań dodatnich zachowujących ślad oraz kanałów kwantowych Λ są analizowane na różności stanów Choi-Jamiołkowskiego ρ_Λ . Stany te wynikają z jedno-jednoznacznej odpowiedniości między odwzorowaniami a stanami kwantowymi [R63, R64]. Tensor metryczny definiuję za pomocą iloczynu Hilberta-Schmidta $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$, co pozwala mi wyznaczyć element odległości $d s^2 = \text{Tr}(d \rho_\Lambda)^2$ i objętości $dV = \sqrt{\det g} \prod_\alpha d \lambda_\alpha$ w języku wartości własnych i parametru nieunitalności λ_α kanału. Po znalezieniu odpowiednich obszarów całkowania analitycznie wyprowadzam objętości interesujących klas odwzorowań zachowujących ślad, takich jak odwzorowania dodatnie i kompletnie dodatnie, kanały łamiące splątanie oraz odwzorowania zadane przez fizyczne (ze skończonymi współczynnikami) generatory lokalne w czasie. Jeśli odpowiednie warunki są znane, obliczam również objętości zajmowane przez kanały dodatnio i kompletnie dodatnio podzielne.

W moich pracach analizuję geometrię kanałów Pauliego i uogólnionych kanałów Pauliego i kanałów fazowo kowariantnych. Szczegółowe wyniki uzyskane w każdej z publikacji zostały przedstawione poniżej.

[H1] *Geometry of Pauli maps and Pauli channels*

Pierwsza praca skupia się na dogłębnej analizie odwzorowań Pauliego, które są dodatnie i zachowują ślad. Względne objętości są obliczane analitycznie dla kanałów łamiących splątanie, zadanych przez równania master z generatorami lokalnymi w czasie, a także posiadających pożądaną własność podzielności. Dla każdej podklasy odwzorowań wykreślam obszary całkowa-

nia, w tym czworościan odwzorowań kompletnie dodatnich oraz ośmiościan kanałów łamiących splątanie. Wyniki zostały podsumowane ilościowo na dwóch rysunkach, z których jeden został przedstawiony na Rys. 1. Ważnym wynikiem jest potwierdzenie istnienia dwa razy większej ilości odwzorowań kompletnie dodatnich niż dodatnich, ale nie kompletnie dodatnich, co zostało wcześniej stwierdzone dla miary Haara [R65]. Powstaje więc pytanie o związek między względnymi objętościami odwzorowań w odniesieniu do różnych metryk.



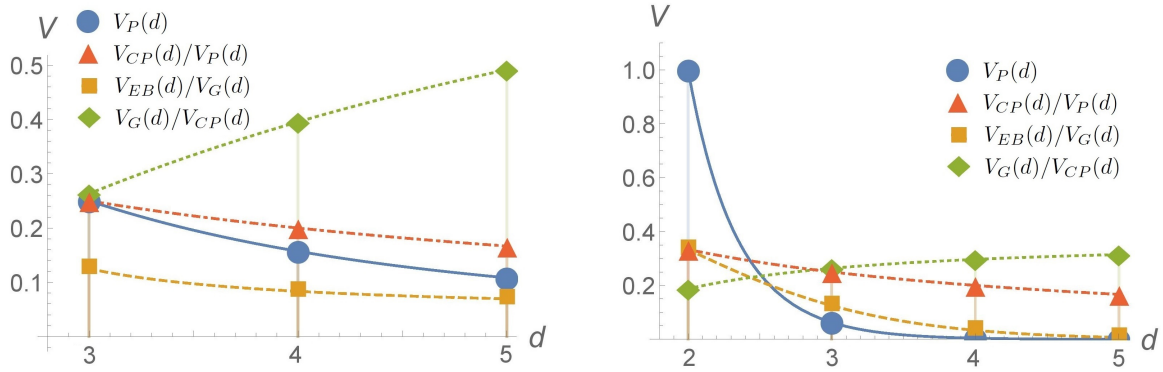
Rys. 1: Ilościowa reprezentacja objętości odwzorowań Pauliego [H1]. Jeden kwadrat odpowiada obszarowi 1/48.

[H2] *Geometry of generalized Pauli channels*

Druga praca wykorzystuje bardziej ogólną definicję uogólnionych kanałów Pauliego niż ta przedstawiona w równaniu (10). Mianowicie, za pomocą $N \leq d + 1$ baz wzajemnie nieobciążonych można skonstruować uogólniony kanał Pauliego [R48]

$$\Lambda = \pi_{N+1} \mathbb{1} + \pi_0 \Phi_0 + \sum_{\alpha=1}^N \pi_\alpha \Phi_\alpha, \quad (21)$$

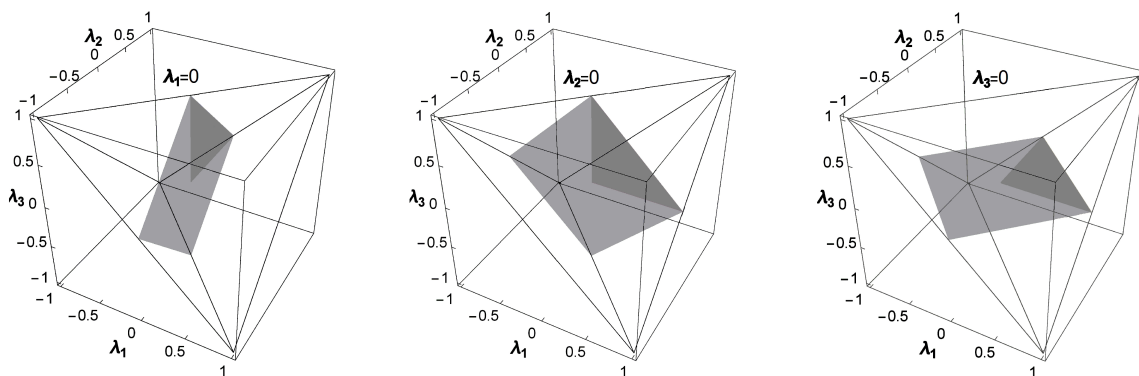
gdzie $\Phi_0[X] = \text{Tr}(X)\mathbb{I}_d/d$ jest kanałem kompletnie depolaryzującym. Ponieważ konstrukcja odwzorowań dodatnich jest problemem otwartym, wykorzystuję warunki konieczne na dodatniość do znalezienia górnego ograniczenia na objętość uogólnionych odwzorowań Pauliego, które są dodatnie i zachowują ślad, dla dowolnych wartości d i $N \leq d + 1$. Ze względu na trudności w wyznaczeniu analitycznych obszarów całkowania dla nieustalonych N i d , niniejsza praca koncentruje się na $N = d + 1$ (maksymalna liczba MUB-ów), $N = d$ i $N = 3$ (minimalna liczba MUB-ów). W każdym przypadku wyprowadzam obszary całkowania w taki sposób, że możliwe jest analityczne obliczenie całek objętościowych dla uogólnionych kanałów Pauliego (V_{CP}), podzbioru kanałów zadanych przez fizyczny generator (V_G) oraz kanały łamiące splątanie (V_{EB}). Jak widać na Rys. 2, objętości zależą od wymiaru d . Należy zauważyć, że jedyną funkcją, która nie maleje monotonicznie wraz ze wzrostem d jest $V_G(d)/V_{CP}(d)$. W zamian jest to funkcja rosnąca i dla $d \rightarrow \infty$ zbliża się do $1/e$ ($N = d, d + 1$) lub 1 ($N = 3$).



Rys. 2: Graficzne przedstawienie objętości dla wybranych klas uogólnionych odwzorowań Pauliego zachowujących ślad, skonstruowanych z trzech (po lewej), d lub $d + 1$ (po prawej) baz wzajemnie nieobciążonych [H2].

[H3] Geometry of symmetric and noninvertible Pauli channels

W trzeciej pracy stosuję wcześniejsze wyniki do analizy odwzorowań Pauliego, które charakteryzują się nie więcej niż dwiema różnymi niezerowymi parametrami. Klasa ta, całkowicie pominięta w pracy [H1] ze względu na zerową objętość w zadanej metryce, obejmuje dwie ważne podklasy: nieodwracalne odwzorowania Pauliego, dla których co najmniej jedna z trzech wartości własnych znika, oraz symetryczne odwzorowania Pauliego, których wartości własne są zdegenerowane. Wiele interesujących kanałów należy do tych kategorii, np. kanały *two-Pauli*, osiowosymetryczne, tłumiące fazę, depolaryzujące i ekstremalne kanały łamiące splątanie. Dla każdego z przypadków przedstawiam obszary całkowania wewnątrz czworościanu wszystkich kanałów Pauliego – patrz Rys. 3 dla przykładu odwzorowań nieodwracalnych z niezdegenerowanymi wartościami własnymi. Następnie analizuję i porównuję względne objętości różnych klas odwzorowań. Na dwóch zbiorczych wykresach przedstawiam również objętości dla wszystkich dodatnich odwzorowań Pauliego zachowujących ślad i podzielnych kanałów Pauliego. Daje to ilościowy obraz i intuicję na temat właściwości rozważanych map. Istnieją pewne istotne różnice w stosunku do wyników z pracy [H1], które wymieniam i omawiam w odpowiednich sekcjach. Jednym z przykładów jest konieczność oddzielnego rozważenia L-podzielności (podzielności na półgrupy) kanałów kwantowych, która nie zawsze jest równa kompletnie dodatniej podzielności dla odwzorowań nieodwracalnych.

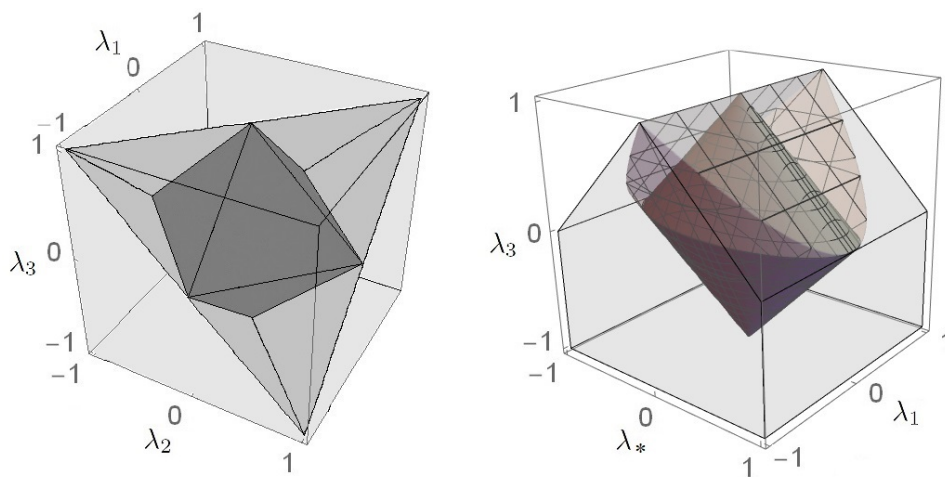


Rys. 3: Graficzne przedstawienie zakresu wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, które odpowiadają kanałom nieodwracalnym z dwiema różnymi niezerowymi wartościami własnymi (szare powierzchnie płaskie) [H3]. Od lewej do prawej wykreślone są obszary kompletniej dodatniości odpowiednio dla $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = 0$. Ciemnoszare trójkąty reprezentują kanały, które można uzyskać za pomocą generatorów lokalnych w czasie.

[H4] Geometry of phase-covariant qubit channels

Wiele pytań, na które udzielono odpowiedzi w odniesieniu do unitalnych odwzorowań kubitowych, pozostaje bez odpowiedzi w przypadku kanałów nieunitalnych, włączając w to ich

geometryczną charakteryzację. W najnowszym artykule odpowiadam na niektóre z tych pytań, rozważając kanały fazowo kowariantne. Podczas gdy podstawowe struktury geometryczne na rozmaitości wydają się podobne do tych dla odwzorowań Pauliego, obszary zajmowane przez kanały zdecydowanie się różnią. Na Rys. 4 przedstawiam porównanie przestrzeni zajmowanej przez mapy Pauliego i mapy fazowo kowariantne. Wyraźnie widać, że obszary łamania splątania posiadają podobne własności symetrii, jednak tego samego nie można powiedzieć o odwzorowaniach dodatnich ani kompletnie dodatnich. Co ciekawe, wśród trójparametrowych odwzorowań odwracalnych wszystkie rozważane względne objętości są większe dla map fazowo kowariantnych niż dla map Pauliego. Podobna zależność nie zachodzi dla odwzorowań fazowo kowariantnych o różnych parametrach nieunitalności λ_* , wśród których $\lambda_* = 0$ odpowiada odwzorowaniom Pauliego ze zdegenerowaną wartością własną. Analiza kanałów łamiących splątanie i kanałów uzyskiwanych za pomocą generatorów lokalnych w czasie zostaje przeprowadzana dla ogólnych odwzorowań fazowo kowariantnych, jak również dla podklas map nieodwracalnych i symetrycznych. Właściwości podzielności nie są rozważane ze względu na brak znanych warunków koniecznych i wystarczających.



Rys. 4: Obszary zajmowane przez odwzorowania dodatnie zachowujące ślad (jasnoszary), kanały kwantowe (szary) i kanały łamiące splątanie (ciemnoszary) odpowiednio dla odwzorowań Pauliego (po lewej) [H1] i fazowo kowariantnych (po prawej) [H4].

Uzyskane przeze mnie wyniki pokazują, że tylko niewielki procent kanałów kwantowych można uzyskać za pomocą równań master z fizycznymi generatorami lokalnymi w czasie. Potwierdza to konieczność dalszego opracowywania opisu opartego na jądrach pamięci. W podobny sposób stosunek kanałów podzielnych do niepodzielnych rzuca więcej światła na ilości odwzorowań dynamicznych, które odpowiadają markowowskiej i niemarkowowskiej ewolucji kwantowej. Moje wyniki udzielają częściowej odpowiedzi na pytanie o zgodność między formalizmami kanałów kwantowych i odwzorowań dynamicznych wynikających z równań master.

Klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych

Koncepcja mieszanin (lub wypukłych kombinacji) odwzorowań dynamicznych opiera się na prostym założeniu, że probabilistyczna mieszanina $\Lambda(t) = p\Lambda_1(t) + (1 - p)\Lambda_2(t)$, $0 \leq p \leq 1$, dwóch odwzorowań dynamicznych $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ sama w sobie jest odwzorowaniem dynamicznym. Niniejsza tematyka zdobyła znaczne zainteresowanie po tym, jak zostało udowodnione, że wiecznie niemarkowowska ewolucja kubitów może zostać utworzona za pomocą kombinacji wypukłej dwóch półgrup Pauliego [R66, R67]. Podczas mojego doktoratu rozszerzyłam ten wynik na ewolucję kuditową, pokazując, że pewne mieszaniny półgrup odpowiadających uogólnionym kanałom Pauliego wytwarzają odwzorowania dynamiczne z jedną [P7] lub więcej [P10] wiecznie ujemnymi współczynnikami dekoherencji. Początkowo obserwacja, że niemarkowowskość wy-

łania się z wypukłych kombinacji półgrup markowowskich, wydawała się sprzeczna z intuicją. Później jednak wykazano, że niemarkowowskość mieszanin można wyjaśnić w kategoriach korelacji i przepływu informacji między układem a otoczeniem [R68]. Co ciekawe, zachodzi również odwrotna zależność, jako że w pewnych warunkach zmieszanie dwóch niemarkowowskich ewolucji kuditowych prowadzi z powrotem do półgrupy markowskiej [R69].

Mieszanie kanałów kubitowych niedawno zostały zrealizowane doświadczalnie przy użyciu interferometru Macha-Zendera [R70, R71]. Stany kubitów są zakodowane w polaryzacji fotonów oddziałującej z częstotliwością fotonów (otoczeniem). Rozdzielacz wiązki, którego właściwości podziału są scharakteryzowane przez p , dzieli wiązkę na dwie gałęzie. Odwzorowania $\Lambda_1(t)$ i $\Lambda_2(t)$ działają niezależnie na pojedynczej gałęzi, nim wiązki zostaną ponownie połączone. Półgrupy markowskie tworzą zbiór niewypukły, co pozwoliło doświadczalnie wykazać, że ich mieszanina rzeczywiście może być niemarkowska.

W mojej serii artykułów analizuję odpowiednio mieszanie kanałów Pauliego, uogólnionych kanałów Pauliego i kanałów fazowo kowariantnych. Wykraczając poza wypukłe kombinacje półgrup markowowskich, rozważam mieszanie kompletnie dodatnio niepodzielnych i nieodwracalnych (w tym również niepodzielnych) odwzorowań dynamicznych. Wreszcie analizuję nawet takie odwzorowania, dla których nie zachodzą warunki unitalności czy komutatywności. Dla otrzymanych mieszanin konstruuje odpowiednio lokalne w czasie generatory i jądra pamięci. Następnie analizuję ich właściwości niemarkowowskości w zależności od parametrów mieszania.

[H5] *Quantum evolution with a large number of negative decoherence rates*

Dodatnie współczynniki dekoherencji $\gamma_\alpha(t)$ generatorów lokalnych w czasie są związane z markowowskością ewolucji kwantowej. Jednakże warunek $\gamma_\alpha(t) \not\geq 0$ również może prowadzić do fizycznie dopuszczalnej ewolucji. Interesujący scenariusz ma miejsce, gdy niektóre współczynniki pozostają stale ujemne. Znany przykład dynamiki kubitów posiada dwa dodatnie $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 1$ i jeden zawsze ujemny $\gamma_3(t) = -\tanh t$ współczynnik dekoherencji [R66]. Odpowiedni kanał Pauliego powstaje z prostej mieszanie dwóch półgrup Markowa

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2} \left(e^{2t\mathcal{L}_1} + e^{2t\mathcal{L}_2} \right) \quad (22)$$

z \mathcal{L}_α zadanym równaniem (6). Ponieważ $\gamma_3(t) < 0$, ewolucja ta została nazwana *wiecznie niemarkowską*.

Mój artykuł uogólnia koncepcję wiecznej niemarkowowskości na przypadek kuditowy. Rozważam wypukłą kombinację kompletnie dodatnio podzielnych uogólnionych odwzorowań Pauliego

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} x_\alpha e^{w_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha}, \quad w_\alpha(t) \geq 0, \quad (23)$$

gdzie \mathcal{L}_α są zdefiniowane w równaniu (15). Wyprowadzono warunki konieczne na dodatnią podzielność $\Lambda(t)$, które stają się również wystarczające dla $d = 2$. Proponuję przykład mieszanie, dla której wszystkie $d + 1$ wskaźniki pozostają ujemne, ale tylko przez skończony czas. Następnie udowadniam, że rozkład prawdopodobieństwa p_α , który pojawia się w reprezentacji Krausa tej mieszanie, jest rozwiązaniem równania $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathfrak{L}(t)\mathbf{p}(t)$. Co więcej, przedstawiam warunki na $w_\alpha(t)$ gwarantujące, że jest to klasyczne równanie Pauliego. W szczególności dla kanałów Pauliego

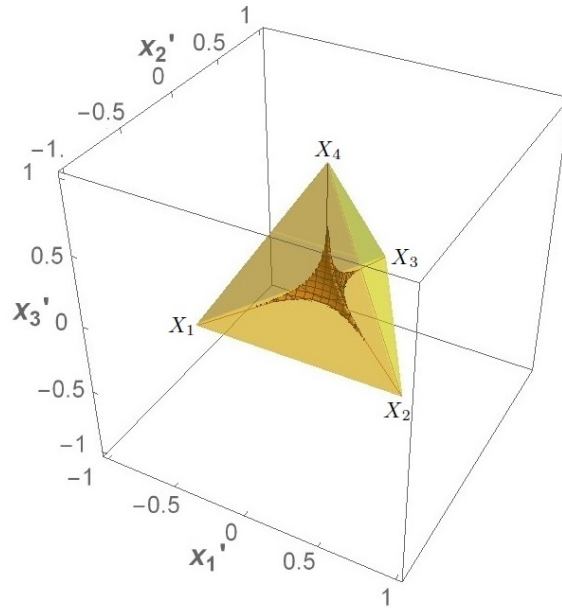
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{L}(t) \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

z zależnym od czasu generatorem

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -W & 2\dot{w}_1 - W & 2\dot{w}_2 - W & 2\dot{w}_3 - W \\ \dot{w}_1 x_1 & -(2 - x_1)\dot{w}_1 & \dot{w}_1 x_1 & \dot{w}_1 x_1 \\ \dot{w}_2 x_2 & \dot{w}_2 x_2 & -(2 - x_2)\dot{w}_2 & \dot{w}_2 x_2 \\ \dot{w}_3 x_3 & \dot{w}_3 x_3 & \dot{w}_3 x_3 & -(2 - x_3)\dot{w}_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

jest klasycznym równaniem Pauliego, jeśli $\dot{w}_\alpha(t) \geq 0$ oraz $\dot{w}_k(t) \geq \frac{1}{2}W(t)$, gdzie $W(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \dot{w}_\alpha(t)$.

Jako szczególny przypadek rozważam wypukłe kombinacje półgrup Markowa, gdzie $w_\alpha(t) = w > 0$. Przedstawione przykłady posiadają do $d-1$ wiecznie ujemnych współczynników dekoherencji $\gamma_\alpha(t)$. Ponieważ każdy współczynnik jest $(d-1)$ -krotnie zdegenerowany, w rzeczywistości otrzymane odwzorowania dynamiczne posiadają aż $(d-1)^2$ zawsze ujemnych współczynników dekoherencji z $d^2 - 1$ możliwych. Każda dozwolona mieszanina półgrup spełnia konieczne warunki na dodatnią podzielność, jednak podane są również przykłady odwzorowań, dla których zachodzą warunki wystarczające z pracy [P10]. Na Rys. 5 wykreślam obszar kompletnie dodatniej podzielności $\Lambda(t)$ dla $d = 3$ w zależności od wyboru parametrów mieszania x_α . Obszar ten został dla porównania zestawiony z sympleksem odpowiadającym wszystkiemu możliwemu wyborom x_α . Można zaobserwować, że obszar kompletnie dodatniej podzielności jest stosunkowo mały, a zatem większość mieszanin opisuje ewolucję niemarkowską. Im dalej od środka sympleksu, tym mniejsza swoboda w wyborze x_α , które nie łamią markowskości.



Rys. 5: Zakres parametrów x'_α sympleksu w $d = 3$, dla których $\gamma_\alpha(t) \geq 0$ w dowolnej chwili czasu $t \geq 0$ [H5].

[H6] *Markovian semigroup from mixing noninvertible dynamical maps*

Dotychczas podjęto kilka prób wyjścia poza wypukłe kombinacje półgrup Markowa poprzez analizę mieszanin kompletnie dodatnio podzielnych odwzorowań dynamicznych [H5], [R72, R73]. Jednakże odwzorowania te były zawsze odwracalne, co oznacza, że $\Lambda^{-1}(t)$ była zawsze dobrze zdefiniowana. Takie podejście nieumyślnie wyklucza wiele interesujących ewolucji fizycznych opisywanych przez odwzorowania nieodwracalne. Przykłady obejmują model tłumienia amplitudy w rezonansie z lorentzowskim widmem rezerwuarowym [R74], tłumiony dwupoziomowy atom oddziałujący z polem jednomodowym w modelu Jaynesa-Cummingsa [R75, R76, R77], dwupoziomowy atom napędzany laserem z szumem fazowym [R42] oraz implementację kwantowej bramki NOT [R44].

Zmotywowało mnie to do rozważenia bardziej ogólnych mieszanin, w których odwracalność mieszanych ze sobą odwzorowań nie jest gwarantowana. Mianowicie konstruuje kombinacje wypukłe

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} x_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(t), \quad (26)$$

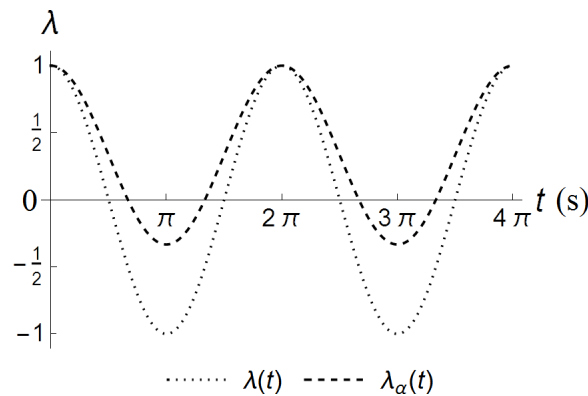
uogólnionych odwzorowań Pauliego

$$\Lambda_{\alpha}(t) = (1 - p(t)) \mathbb{1} + \frac{p(t)}{d-1} \mathbb{U}_{\alpha}, \quad 0 \leq p(t) \leq 1. \quad (27)$$

Następnie udowadniam, że mieszaniny odwzorowań nieodwracalnych mogą stać się odwracalne, ale nie na odwrót. Podaję warunki konieczne i wystarczające na to, by $\Lambda(t)$ była odwracalnym odwzorowaniem dynamicznym, które zależy tylko od kresu dolnego funkcji $\lambda(t)$ oraz $\min_{\alpha} x_{\alpha}$ ($x_{\alpha} \neq 0$). Pokazuje to, że klasyczne mieszanie pozwala pozbyć się osobliwości. Rozważam również specjalną klasę mieszanin z $k \leq d$ identycznymi parametrami $x_{\alpha} = 1/k$ dla $\alpha = 1, \dots, k$ (i zero w pozostałych przypadkach). Przy takim wyborze $\Lambda(t)$ ma dwie różne wartości własne, które mogą osiągać zero w różnych momentach czasu. Przypadek ten mówi, jak należy ustalić parametry mieszania, aby wygenerować dodatkowe osobliwości. Okazuje się jednak, że za pomocą mieszanin można nie tylko generować i usuwać osobliwości odwzorowań dynamicznych, ale także przesuwać je do innych momentów w czasie. Dobrym przykładem jest wypukła kombinacja dynamicznych odwzorowań Pauliego z $x_{\alpha} = 1/3$ i oscylującymi wartościami własnymi $\lambda(t) = 1 - 2p(t)$ – patrz Rys. 6. Co istotne, wszystkie pierwiastki $\lambda(t)$ są przesunięte o ten sam przedział czasu.

Do głównych wyników artykułu zalicza się również przypadek usuwania osobliwości poprzez mieszanie. Analizując zachowanie lokalnych w czasie generatorów podczas mieszania odwzorowań dynamicznych, pokazuję związek między współczynnikami dekoherencji związanymi z $\Lambda(t)$ oraz $\Lambda_{\alpha}(t)$. Proponuję taką parametryzację $d+1$ odwzorowań dynamicznych, że ich kombinacja wypukła jest nie tylko odwracalna, ale również kompletnie dodatnio podzielna (ewolucja markowowska). W szczególnym przypadku $d+1$ nieodwracalnych odwzorowań dynamicznych może posłużyć do skonstruowania półgrupy markowowskiej (później okazało się, że jedno z tych odwzorowań może być odwracalne [R52]).

Na koniec analizuję równania master z jądrami pamięci. Okazuje się, że każda wypukła kombinacja uogólnionych odwzorowań Pauliego jest generowana przez jądro pamięci, w którego definicji znajduje się rozkład prawdopodobieństwa i pojedyncza funkcja pamięci. Co ciekawe, odwzorowania dynamiczne, których mieszaniną jest półgrupa markowowska, są rozwiązaniami równań master z nieregularnymi (zawierającymi nieskończoności) generatorami lokalnymi w czasie i jądrami pamięci.



Rys. 6: Wartości własne $\Lambda_{\alpha}(t)$ i ich mieszaniny $\Lambda(t)$ dla $\lambda(t) = \cos t$ [H6].

Niniejszy artykuł rozszerza wyniki pracy [H6] poprzez scharakteryzowanie stopnia niemarkowskości dynamicznych odwzorowań Pauliego, które powstają w wyniku klasycznych mieszanin nieodwracalnych odwzorowań dynamicznych. Podobna analiza została do tej pory przeprowadzona tylko dla odwracalnych odwzorowań, w tym dla kombinacji wypukłych półgrup markowskich [R66, R67, R72] i odwzorowań kompletnie dodatnio podzielnych [H5], [R73]. Podzielność odwracalnego $\Lambda(t)$ jest w pełni zadana przez własności związanego z nim propagatora $V(t, s) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(s)$. Problem staje się bardziej skomplikowany, gdy bierze się pod uwagę również odwzorowania nieodwracalne, dla których $V(t, s)$ nie jest jednoznacznie zdefiniowane.

Korzystając z wyników odwzorowań dynamicznych z nierosnącym obrazem [R40, R78], formułujemy warunki podzielności dla odwzorowań Pauliego. W szczególności analizujemy stopień niemarkowskości dla mieszanin odwzorowań nieodwracalnych

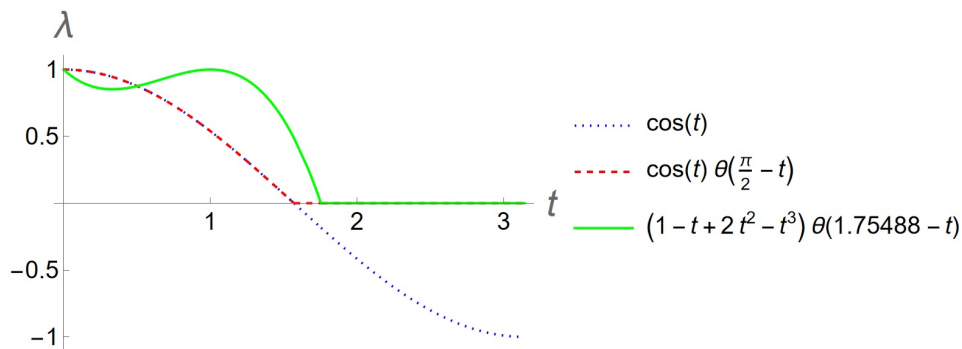
$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(t), \quad \Lambda_{\alpha}(t)[\rho] = (1 - p(t))\rho + p(t)\sigma_{\alpha}\rho\sigma_{\alpha}, \quad (28)$$

gdzie $0 \leq p(t) \leq 1$. Okazuje się, że nie istnieją takie dodatnio podzielne $\Lambda_{\alpha}(t)$, które nie są kompletnie dodatnio podzielne. Przykłady $\Lambda_{\alpha}(t)$ o każdym możliwym stopniu podzielności zostały przedstawione na Rys. 7. W ogólności odwzorowanie $\Lambda_{\alpha}(t)$ jest podzielne, jeśli jego jądro jest niemalejące, co oznacza, że $\lambda(s) = 0 \implies \lambda(t) = 0$ dla wszystkich czasów $t \geq s$.

Następnie analizujemy relacje między podzielnością $\Lambda_{\alpha}(t)$ i ich mieszanin $\Lambda(t)$, dochodząc do następujących wniosków.

- Odwzorowania niepodzielne powstają tylko w wyniku mieszania odwzorowań niepodzielnych.
- Mieszaniny odwzorowań podzielnych zawsze dają w rezultacie odwzorowania podzielne.
- Kombinacje wypukłe kompletnie dodatnio podzielnych odwzorowań są przynajmniej dodatnio podzielne.
- Nieodwracalnych odwzorowań kompletnie dodatnio podzielnych nie można otrzymać poprzez klasyczne mieszanie.
- Niepodzielne odwzorowania dynamiczne mogą w rezultacie mieszania produkować odwzorowania o dowolnym stopniu podzielności.

Dodatkowo warunki konieczne i wystarczające na kompletnie dodatnią podzielność zarówno $\Lambda_{\alpha}(t)$, jak i $\Lambda(t)$, uogólniają warunki z artykułu [R67] dla odwzorowań odwracalnych.



Rys. 7: Przykłady nieodwracalnych $\Lambda_{\alpha}(t)$, które są niepodzielne (niebieski), kompletnie dodatnio podzielne (czerwony) i podzielne, ale nie kompletnie dodatnio podzielne (zielony).

Niniejsza publikacja zawiera wiele pouczających przykładów, w tym postać lokalnego w czasie generatora dla nieodwracalnego odwzorowania dynamicznego, które jest dodatnio, ale

nie kompletnie dodatnio, podzielne. Co ciekawe, wszystkie współczynniki dekoherencji tego generatora eksplodują do $\pm\infty$ w tym samym momencie, podczas gdy sumy ich par są zawsze skończone.

[H8] *Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps*

W tym artykule analizuję zachowanie klasycznych mieszanin dynamicznych odwzorowań kubitowych, które w ogólności nie są unitalne. Podczas gdy kombinacje wypukłe unitalnych kanałów są zawsze unitalne, analogiczna zależność nie zachodzi dla kanałów nieunitalnych. Przedstawione zostają warunki, po spełnieniu których nieunitalne kanały fazowo kowariantne tworzą mieszaninę unitalną. Pokazuję również, że kanały fazowo kowariantne mogą powstać z wypukłych kombinacji kanałów, które fazowo kowariantne nie są.

Bardziej szczegółowo rozważam mieszaninę półgrup markowowskich

$$\Lambda(t) = x_1 e^{2w_1 \mathcal{L}_+ t} + x_2 e^{2w_2 \mathcal{L}_- t} + x_3 e^{2w_3 \mathcal{L}_3 t}, \quad (29)$$

gdzie $w_\alpha \geq 0$, a generatory są zdefiniowane przez równanie (20). Należy zauważyć, że \mathcal{L}_\pm opisują tłumienie amplitudy i odwrotne tłumienie amplitudy, podczas gdy \mathcal{L}_3 odpowiada tłumieniu fazy. Mimo że równanie (29) zostało skonstruowane w analogii do mieszanin markowowskich półgrup Pauliego, nie jest możliwe uzyskanie ewolucji wiecznie niemarkowskiej ani nawet niemarkowskiej. Wszystkie mieszaniny półgrup ze wzoru (29) są kompletnie dodatnio podzielne. Dlatego konieczne staje się badanie bardziej ogólnych odwzorowań dynamicznych

$$\Lambda(t) = x_1 \Lambda_+(t) + x_2 \Lambda_-(t) + x_3 \Lambda_3(t), \quad (30)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Lambda_+(t)[X] &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbb{I} + (1 - \eta_1^2(t)) \sigma_3 \right] \text{Tr } X + \eta_1(t) (\sigma_1 \text{Tr } \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr } \sigma_2 X) + \eta_1^2(t) \sigma_3 \text{Tr } \sigma_3 X \right\}, \\ \Lambda_-(t)[X] &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbb{I} - (1 - \eta_2^2(t)) \sigma_3 \right] \text{Tr } X + \eta_2(t) (\sigma_1 \text{Tr } \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr } \sigma_2 X) + \eta_2^2(t) \sigma_3 \text{Tr } \sigma_3 X \right\}, \\ \Lambda_3(t)[X] &= \frac{1}{2} \left[\mathbb{I} \text{Tr } X + \eta_3(t) (\sigma_1 \text{Tr } \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr } \sigma_2 X) + \sigma_3 \text{Tr } \sigma_3 X \right], \end{aligned} \quad (31)$$

oraz $|\eta_\alpha(t)| \leq 1$. Chociaż powyższe odwzorowanie wydaje się znacznie bardziej skomplikowane, poprzedni przypadek można odzyskać dla prostego wyboru $\eta_\alpha(t) = e^{-w_\alpha t}$. W ogólności dopuszczalne jest, aby $\eta_\alpha(t)$ spadło do zera dla skończonej chwili czasu. Jeśli tak się stanie, odpowiadające jej $\Lambda_\alpha(t)$ jest odwzorowaniem nieodwracalnym. Niemniej klasyczne mieszaniny nieodwracalnych $\Lambda_\alpha(t)$ mogą dać w rezultacie odwracalne $\Lambda(t)$.

W szczególnym przypadku, gdy $\eta_\alpha(t) = \eta(t)$, $\Lambda(t)$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\eta(t) > 0$. Z tego powodu odwracalne mieszaniny powstają tylko z odwracalnych $\Lambda_\pm(t)$ i $\Lambda_3(t)$. Dzieje się tak dlatego, że punkt osobliwości funkcji $\lambda_1(t)$ jest taki sam jak $\eta(t)$, zaś $\lambda_3(t)$ jest zawsze nieosobliwe ($\lambda_\alpha(t)$ są wartościami własnymi $\Lambda(t)$). Ukazuje to kolejną różnicę w porównaniu z wypukłymi kombinacjami kanałów Pauliego, gdzie odwzorowania nieodwracalne mogą w wyniku mieszania dać odwzorowania odwracalne (nawet markowowskie).

Co więcej, w przypadku kanałów Pauliego jedynie kombinacja wypukła trzech kanałów defazujących produkuje półgrupę markowską [H6], z czego co najmniej dwa muszą być nieodwracalne [R52]. Nieodwracalność jest zatem konieczna do utworzenia półgrupy. Zasadniczo odmienne zachowanie obserwuje się w przypadku kanałów fazowo kowariantnych, gdzie półgrupa markowska powstaje jedynie po zmieszaniu dwóch półgrup,

$$\Lambda(t) = x_1 e^{2w \mathcal{L}_+ t} + x_2 e^{2w \mathcal{L}_- t}. \quad (32)$$

Odwzorowanie $\Lambda(t)$ jest uogólnionym kanałem tłumiącym amplitudę ze stałymi współczynnikami dekoherencji $\gamma_+(t) = 2wx_1$, $\gamma_-(t) = 2wx_2$, $\gamma_3(t) = 0$. Stanowi więc przykład półgrupy markowskiej, która jest mieszaniną półgrup.

Nareszcie, zezwalając na nieunitalność odwzorowań dynamicznych, wychodzę poza rozważanie wyłącznie odwzorowań komutatywnych. Innymi słowy, równość $\Lambda(t)\Lambda(s) = \Lambda(s)\Lambda(t)$ nie zachodzi już dla dowolnych dwóch momentów w czasie. W swojej pracy pokazuję, że $\Lambda_{\pm}(t)$ i $\Lambda_3(t)$ są komutatywne i znajduję warunki, aby ich mieszaniny $\Lambda(t)$ komutatywne nie były.

Moje wyniki przedstawiają różnorodne klasy odwzorowań dynamicznych, które można uzyskać poprzez mieszanie prostych map kwantowych. Rozważenie najpierw nieodwracalnych, a następnie również nieunitalnych, odwzorowań pozwoliło mi zaobserwować, jak zmieniają się własności klasycznych mieszanin w zależności od doboru parametrów mieszania oraz mieszanych kanałów. Dalsza analiza pokazuje, że nie tylko odwzorowania dynamiczne dla ewolucji markowowskich i niemarkowowskich nie tworzą zbiorów wypukłych. Tak samo jest w przypadku odwzorowań nieodwracalnych, niepodzielnych, nieunitalnych oraz niekomutatywnych.

Mieszaniny kanałów fazowo kowariantnych zostają później zastosowane do poprawy własności transmisji danych z użyciem odwzorowań dynamicznych [H11, H12], co bardziej szczegółowo opisuje kolejny podrozdział.

Poprawa właściwości komunikacyjnych kanałów za pomocą szumów

Znalezienie możliwych do zrealizowania metod dokładnego przesyłania informacji przez kanały kwantowe jest ważnym zagadnieniem w kwantowej komunikacji i przetwarzania informacji. Nieunikniony wpływ zewnętrznych szumów jest często szkodliwy dla wykonywanych zadań kwantowych. Aby chronić informacje przechodzące przez zaszumiony kanał, stosowane są techniki korekcji, mitygacji lub supresji błędów [R79, R80]. Kody korekcyjne pozwalają na zmniejszenie poziomu błędów na bramkach logicznych poprzez zakodowanie informacji w dużej liczbie fizycznych kubitów. Techniki mitygacji nie wymagają transmisji nadmiarowych informacji, tylko znacznie większej liczby pomiarów. Natomiast supresja błędów wykorzystuje wiedzę o systemie, aby unikać potencjalnego wpływu niepożądanych czynników. Przykłady obejmują podprzestrzenie wolne od dekoherencji (DFS) [R81], podsystemy bezszumowe [R82] i dynamiczne odsprężenie [R83].

Alternatywnie, zamiast próbować zredukować skutki szumów, można wykorzystać go jako zasób kwantowy. Wcześniej zaobserwowano, że lokalna dyssypacja może stanowić ważny zasób w obliczeniach kwantowych [R84] i inżynierii stanów [R85]. Do celów kwantowego przetwarzania informacji Marshall i in. [R86] opracowali sieci modularne wspomagane rozpraszaniem, aby kontrolować utratę spójności i zgodności, podczas gdy Gillard i in. [R87] manipulowali kwantowym szumem termicznym w celu poprawy wykrywania stanu kubitowego. Efekty pamięci związane z szumem otoczenia zostały również wykorzystane do tłumienia poziomu błędów kanałów kwantowych [R88], [P13], [H10]. Lepszą wydajność mierzoną za pomocą wierności kanału, czystości stanów na wyjściu i zdolności do zachowania splątania kwantowego osiągnięto poprzez dodanie szumów do ewolucji markowowskiej na poziomie jąder pamięci w równaniach master [R89, R90].

Niniejsza seria artykułów jest kontynuacją moich badań prowadzonych podczas doktoratu, gdzie analizowałam wierność uogólnionych kanałów Pauliego. Wierność kanału jest miarą odległości między stanem wejściowym i wyjściowym, a zatem miarą odkształcenia stanu po przejściu przez kanał kwantowy. Po wyprowadzeniu analitycznych wzorów na ograniczenia wierności [P12], pokazałam, jak zwiększyć wierność uogólnionych kanałów Pauliego poprzez wprowadzenie niemarkowowskich szumów do układu [P13].

W następujących publikacjach kontynuuję badania nad możliwościami poprawy wydajności kanałów za pomocą korzystnych szumów. Wykorzystując sumy jąder pamięci i klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych, przedstawiam sposoby na polepszenie właściwości transmisyjnych uogólnionych kanałów Pauliego oraz kanałów fazowo kowariantnych. Analizowane przeze mnie miary obejmują wierność kanału (odkształcenie między stanami wejścia i wyjścia), maksymalną czystość na wyjściu (odchylenie od stanu czystego) oraz pojemność klasyczną (maksymalną szybkość dokładnego przesyłu klasycznych informacji).

Podstawowym problemem w kwantowej komunikacji jest znalezienie maksymalnej szybkości przesyłu klasycznych i kwantowych informacji, które mogą zostać niezawodnie transmitowane przez dany kanał kwantowy. Szybkość ta nazywana jest *pojemnością* kanału, a jej znajomość jest ważna z punktu widzenia obliczeń kwantowych i korekcji błędów. Klasyczne kanały mogą przysyłać tylko jeden rodzaj informacji, zatem definicja ich pojemności jest jednoznaczna. W przypadku kanałów kwantowych sytuacja jest bardziej skomplikowana. Jeśli jednak odwzorowanie kwantowe jest używane do przesyłania tylko klasycznych informacji, wystarczy znać jego pojemność klasyczną [R91, R92]. Znalezienie dokładnej wartości stanowi problem nietrywialny, ponieważ wymaga obliczenia asymptotycznej granicy pojemności Holevo $\chi(\Lambda)$ przy nieskończonej liczbie użyciach kanału. Co więcej, pojemność Holevo oblicza się, wyznaczając maksimum wyrażenia entropicznego po wszystkich możliwych ansamblach separowalnych stanów wejściowych [R91, R92]. Wzory ulegają znacznemu uproszczeniu, jeśli $\chi(\Lambda)$ jest słabo addytywne ($\chi(\Lambda \otimes \Lambda) = 2\chi(\Lambda)$) [R93]. Własność ta zachodzi dla odwzorowań kowariantnych względem nieredukowalnych reprezentacji unitarnych grup skończonych, do których należą uogólnione kanały Pauliego [P10].

W tej pracy wyprowadzam analityczne wzory na dolne i górne ograniczenie pojemności Holevo dla uogólnionych kanałów Pauliego. Stosuję metody opracowane dla kanałów Weyla w [R94, R95], w pierw uogólniając je na przypadek wielocząstkowych kanałów Weyla. Udowadniam, że ograniczenia pojemności są faktycznie osiągalne i proponuję odpowiednie stany kwantowe. Następnie pokazuję związek między tymi ograniczeniami a entropią Shannona klasycznych wektorów prawdopodobieństwa. Okazuje się, że tylko dolne ograniczenie pojemności Holevo jest słabo addytywne. Jeśli jednak dolna i górna granica są identyczne, to pojemność Holevo jest równa klasycznej pojemności kanału. Otrzymuję analityczne wzory na klasyczną pojemność dla dwóch nowych klas uogólnionych kanałów Pauliego. Warunkiem jest posiadanie przez te kanały wartości własnych λ_α o tym samym znaku, w tym co najmniej d o równej wartości, a więc $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\} = \{\lambda_\#, \dots, \lambda_\#, \lambda\}$. Formuła na klasyczną pojemność sprowadza się wówczas do

$$C(\Lambda) = \frac{1 + (d-1)\lambda}{d} \ln[1 + (d-1)\lambda] + (d-1) \frac{1-\lambda}{d} \ln[1-\lambda]. \quad (33)$$

gdzie $\lambda = \min_\alpha \lambda_\alpha$ dla $\lambda_\alpha \leq 0$ oraz $\lambda = \max_\alpha \lambda_\alpha$ dla $\lambda_\alpha \geq 0$. Więcej uwagi poświęcam analizie pojemności kanałów Pauliego, której wartość zależy tylko od wartości własnej λ_α o największym module. Dla ewolucji kubitów istnieje prosta zależność między klasyczną pojemnością a ekstremami wiernościami kanału na stanach czystych. Na koniec pokazuję, że jeśli dynamiczne odwzorowanie Pauliego jest odwracalne i dodatnio podzielne, to jego klasyczna pojemność jest monotonicznie malejącą funkcją czasu.

Korzystając ze wzorów wyprowadzonych [H9], rozpatruję metody wykorzystywania szumów dekoherencji do zwiększenia klasycznej pojemności uogólnionych kanałów Pauliego. Efekty pamięci są wprowadzane do ewolucji Markowa poprzez równania master z jądrami pamięci [R88]

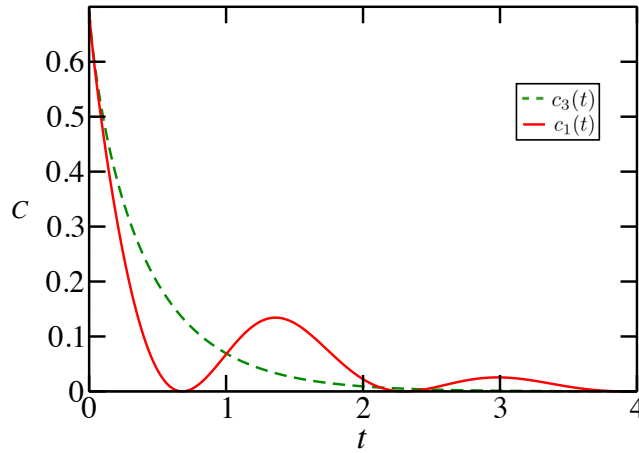
$$K(t) = \delta(t)\mathcal{L} + \mathbb{K}(t). \quad (34)$$

W powyższym wzorze \mathcal{L} jest generatorem półgrupy markowskiej, a $\mathbb{K}(t)$ to czysto nielokalne jądro pamięci (co oznacza, że nie zawiera delty Diraca $\delta(t)$). Warto zauważyć, że zarówno \mathcal{L} , jak i $\mathbb{K}(t)$, odpowiadają fizycznie dozwolonym ewolucjom kwantowym. Addytywność czysto lokalnych i nielokalnych jąder została rozważona w [R88], [P13], gdzie wykazano, że wierność kanału dla ewolucji niemarkowskiej może tymczasowo wzrosnąć powyżej wierności półgrupy markowskiej.

W swoim artykule analizuję ewolucję zadaną przez półgrupę markowowską $\Lambda^M(t) = e^{t\mathcal{L}}$ z izotropowym generatorem $\mathcal{L} = \gamma \sum_{\alpha=1}^{d+1} \mathcal{L}_\alpha$. Niemarkowowskie szumy reprezentują poprzez odwzorowania dynamiczne, które są nieodwracalne, ale nie posiadają niemających jąder. Oznacza to, że przynajmniej jedna z ich wartości własnych znika w pewnym skończonym czasie t_* , ale nie pozostaje równa zero. Takie odwzorowania dynamiczne są niepodzielne, a zatem odpowiadająca im ewolucja jest niemarkowowska [R40]. Dobry przykład stanowi $\Lambda^N(t)$, które rozwiązuje równanie master ze stałym jądrem pamięci $\mathbb{K}(t) = \omega^2 \mathcal{L}_{d+1}$. Nawet jeśli $\Lambda^M(t)$ i $\Lambda^N(t)$ są zawsze kompletnie dodatnie, kombinacja dwóch fizycznych jąder pamięci $K(t)$ niekoniecznie produkuje fizyczne odwzorowanie dynamiczne $\Lambda(t)$. Znajduję dodatkowe warunki, które muszą zostać spełnione, i wyznaczam dolną granicę klasycznej pojemności $C_{\text{low}}[\Lambda(t)] = \max_\alpha c_\alpha(t)$, gdzie

$$c_\alpha(t) = \frac{1 + (d-1)\lambda_\alpha(t)}{d} \ln[1 + (d-1)\lambda_\alpha(t)] + (d-1) \frac{1 - \lambda_\alpha(t)}{d} \ln[1 - \lambda_\alpha(t)]. \quad (35)$$

Dla $d = 2$, $C_{\text{low}}[\Lambda(t)] = C[\Lambda(t)]$, $c_1(t) = c_2(t)$, a $c_3(t) = C[\Lambda^M(t)]$ jest klasyczną pojemnością półgrupy Markowa. Stąd, gdy $c_1(t) > c_3(t)$, obserwuję wzrost pojemności dla układu z dodatkowymi szumami. Przypadek ten został przedstawiony na Rys. 8. Analogiczne wyniki uzyskuje się dla ewolucji kubitowej i kutritowej po zastąpieniu stałego jądro przez $\mathbb{K}(t)$, którego wartości własne zanikają eksponencjalnie.



Rys. 8: Funkcje $c_1(t) = c_2(t)$ (czerwony) i $c_3(t)$ (zielony) dla ewolucji kubitowej z $\gamma = 2/s$ i $\omega = 2/s$. Klasyczna pojemność $\Lambda(t)$ jest większa niż pojemność $\Lambda^M(t)$ zawsze wtedy, gdy $c_1(t) > c_3(t)$ [H10].

Następnie wykraczam poza przypadek półgrupy, rozważając kompletnie dodatnio podzielne odwzorowania dynamiczne $\Lambda^M(t)$. Ponieważ odpowiadają one lokalnym w czasie generatorom o dodatnich współczynnikach dekoherencji, najbardziej naturalnym sposobem wprowadzenia szumów byłoby dodanie do niego generatora $\mathcal{L}^N(t)$ ewolucji niemarkowowskiej ($\gamma_\alpha^N(t) \not\equiv 0$). Wtedy odwzorowanie $\Lambda(t)$ byłoby generowane przez $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^M(t) + \mathcal{L}^N(t)$. Rozwiązanie $\Lambda(t) = \Lambda^M(t)\Lambda^N(t)$ jest złożeniem dwóch (komutatywnych) uogólnionych odwzorowań Pauliego. Ponieważ jednak wartości własne $\Lambda^M(t)$ są nieujemne, zawsze są one większe niż wartości własne $\Lambda(t)$. W takich sytuacjach zwiększenie klasycznej pojemności kanału nie jest możliwe. W związku z tym, zamiast rozpatrywać sumę generatorów, rozważam bardziej ogólną formę jądra pamięci $K(t)$. Mianowicie, zastępuję generator półgrupy \mathcal{L} jądrem pamięci $\mathfrak{K}(t)$, które odpowiada tej samej ewolucji, co lokalny w czasie generator $\mathcal{L}(t)$. Wtedy równanie (34) zostaje zastąpione przez $K(t) = \mathfrak{K}(t) + \mathbb{K}(t)$, gdzie $\mathfrak{K}(t)$ i $\mathbb{K}(t)$ odpowiadają kolejno dynamice markowowskiej i niemarkowowskiej.

Jako przykład analizuję ewolucję markowowską z lokalnym w czasie generatorem

$$\mathcal{L}^M(t) = \frac{r}{d + e^{rt}} \sum_{\alpha=1}^{d+1} \mathcal{L}_\alpha. \quad (36)$$

Tym razem odpowiadające mu jądro pamięci $\mathfrak{R}(t)$ ma zarówno część lokalną, jak i nielokalną. Szum niemarkowowski jest ponownie opisywany przez $\mathbb{K}(t)$ z wykładniczo malejącymi wartościami własnymi. Raz jeszcze daje się zaobserwować tymczasowy wzrost pojemności kanału. W przeciwieństwie do przykładów z półgrupą, maksymalny wzrost nie występuje w pierwszym momencie zwiększenia klasycznej pojemności. Niemniej jednak wyniki dla półgrup i odwzorowań kompletnie dodatnio podzielnych są jakościowo takie same. Pokazuje to, że czasowy wzrost pojemności kanału może być bardziej ogólną cechą niż początkowo przewidywano.

[H11] *Adjusting phase-covariant qubit channel performance with non-unitality*

Niniejszy artykuł udowadnia, że wydajność transmisji danych można zwiększyć poprzez wprowadzenie nieunitalności kanałów kwantowych. Pokazuje to na przykładzie kubitowych kanałów fazowo kowariantnych, mierząc odkształcenia między stanami wejściowymi i wyjściowymi za pomocą wierności i czystości kanału. Przedstawiam wyprowadzenia analitycznych wzorów na minimalną i maksymalną wierność kanału dla stanów czystych [R96, R97], a także na maksymalną czystość wyjściową zdefiniowaną przy użyciu p -normy Schattena [R1, R98]. Co ważne, te ekstremalne wartości są osiągalne przez kanały na odpowiednio dobranych stanach czystych. Dodatkowo rozważam miary zgodności i splątania formowania [R99, R100], które określają ewolucję splątania, gdy połowa stanu maksymalnie splątanego jest przesyłana przez kanał fazowo kowariantny.

Wspomniane miary wierności, czystości na wyjściu i splątania wszystkie zależą od wartości własnych kanału λ_1 , λ_3 oraz parametru λ_* odpowiedzialnego za nieunitalność. Aby uniknąć wpływu innych czynników, porównuję wyniki dla kanałów fazowo-kowariantnych o tych samych wartościach własnych, ale różnym stopniu nieunitalności

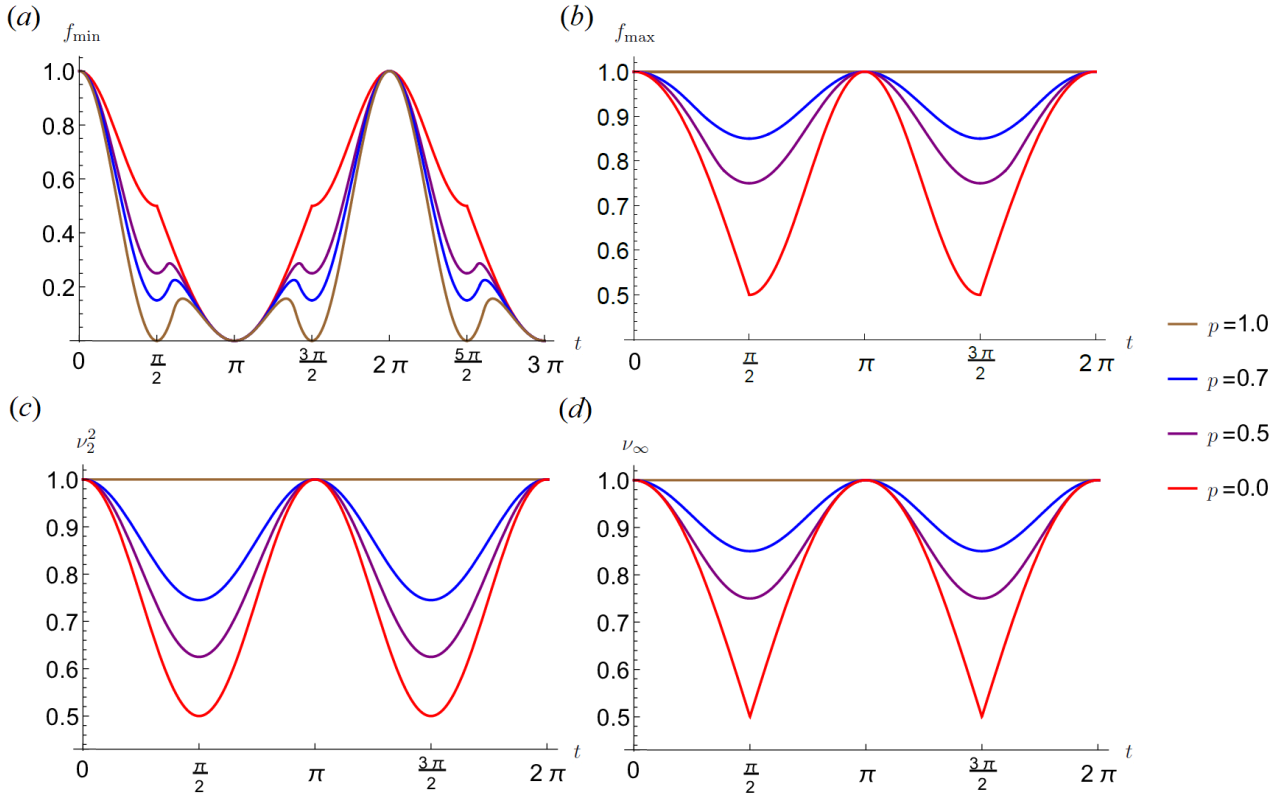
$$\text{NU}(\Lambda) = \frac{|\lambda_*|}{1 - |\lambda_3|}. \quad (37)$$

Dwa skrajne przypadki to kanały unitalne (Pauliego) Λ_U i maksymalnie nieunitarne Λ_{NU} , gdzie $\text{NU}(\Lambda_U) = 0$ oraz $\text{NU}(\Lambda_{\text{NU}}) = 1$. Kanał Λ z wartościami pośrednimi $\text{NU}(\Lambda)$ jest konstruowany za pomocą kombinacji wypukłych

$$\Lambda = (1 - p)\Lambda_U + p\Lambda_{\text{NU}}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (38)$$

które dzielą wartości własne zarówno z Λ_U , jak i Λ_{NU} . W tym przypadku rozkład prawdopodobieństwa p może być interpretowany jako klasyczny szum, który okazuje się korzystny dla pewnych własności kwantowej ewolucji. Okazuje się, że odwzorowania unitalne osiągają najgorsze wyniki dla każdej analizowanej miary z wyjątkiem minimalnej wierności kanału. Dla miary zgodności obserwuję zarówno wydłużony czas życia splątania, jak i przyspieszone odrodzenie się po nagłej śmierci. Co więcej, analizowane miary kanału monotonicznie maleją wraz ze wzrostem jego stopnia nieunitalności. Innymi słowy, im bardziej Λ zbliża się do bycia kanałem unitalnym, tym mniejszy wzrost odpowiedniej miary.

Szczególną uwagę poświęcam analizie ewolucji uogólnionych kanałów tłumiących amplitudę o wartościach własnych, które zanikają wykładniczo lub oscylują. Rezultaty uzyskane dla wyboru $\lambda_1(t) = \cos t$, $\lambda_3(t) = \cos^2 t$ i $\lambda_*(t) = p \sin^2 t$ zostały wykreślone na Rys. 9. Miary kanału wykazują podobne zachowanie oscylacyjne, z tą różnicą, że okresowość maksymalnych czystości na wyjściu ν_2 , ν_∞ jest dwa razy mniejsza. Im wyższa wartość $\text{NU}(\Lambda) = p$, tym mniejsza minimalna wierność f_{\min} i większa maksymalna wierność f_{\max} , jak również ν_2 oraz ν_∞ w ustalonej chwili czasu. Dodatkowo, f_{\max} , ν_2 i ν_∞ osiągają maksymalną wartość równą 1 dla $p = 1$. Jediną funkcją, która spada do zera, jest $f_{\min}[\Lambda_U(t \rightarrow \infty)]$ dla $\pi + 2k\pi$, niezależnie od wyboru p , a następnie także dla $\pi/2 + 2k\pi$ i $3\pi/2 + 2k\pi$, jeśli $p = 0$.



Rys. 9: Wykresy oscylujących wartości własnych kanału reprezentujące ewolucję minimalnej wierności (a), maksymalnej wierności (b), maksymalnej 2-normy wyjściowej (c) i maksymalnej ∞ -normy wyjściowej (d). Krzywe odpowiadają mieszaninom kanałów z $p = 0$ (czerwony), $p = 0.5$ (fioletowy), $p = 0.7$ (niebieski) i $p = 1$ (brązowy) [H11].

Ważnym wynikiem jest pokazanie, że zwiększoną wydajność kanałów nieunitalnych można zaobserwować w każdym momencie. Stanowi to nowość w porównaniu z poprzednimi pracami nad tłumieniem szumu poprzez przeciwdziałanie jego skutkom za pomocą innej formy szumu [R88], [P13], [H10], gdzie korzystne efekty były jedynie tymczasowe.

[H12] *Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation*

Stany stacjonarne to takie stany kwantowe, które są zachowywane przez ewolucję kwantową. W przypadku kanału kwantowego oznaczają takie stany, które na wejściu i na wyjściu są identyczne. Stany stacjonarne mogą być zależne od czasu, a czasami jest ich więcej niż jeden na dany kanał. W tym artykule rozważam kanały fazowo kowariantne charakteryzowane przez

$$\lambda_* = p(1 - \lambda_3), \quad -1 \leq p \leq 1, \quad \lambda_3 \geq 0. \quad (39)$$

W ten sposób zarówno stopień nieunitalności kanału $\text{NU}(\Lambda) = |p|$, jak i jego stan stacjonarny $\rho_* = \text{diag}(1 + p, 1 - p)/2$, można łatwo kontrolować przy pomocy pojedynczego parametru p .

Analogicznie jak w pracy [H11], rozważam kanały kwantowe

$$\Lambda^\pm = (1 - |p|)\Lambda_U + |p|\Lambda_{\text{NU}}^\pm \quad (40)$$

powstające w wyniku zmieszania kanału unitalnego (Pauliego) Λ_U z kanałem maksymalnie nieunitalnym Λ_{NU}^\pm . Wszystkie te odwzorowania posiadają wspólne wartości własne oraz trzy wspólne wektory własne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ale różne stany stacjonarne,

$$\Lambda_U[\mathbb{I}] = \mathbb{I}, \quad \Lambda_{\text{NU}}^+[[0]\langle 0|] = |0\rangle\langle 0|, \quad \Lambda_{\text{NU}}^-[[1]\langle 1|] = |1\rangle\langle 1|. \quad (41)$$

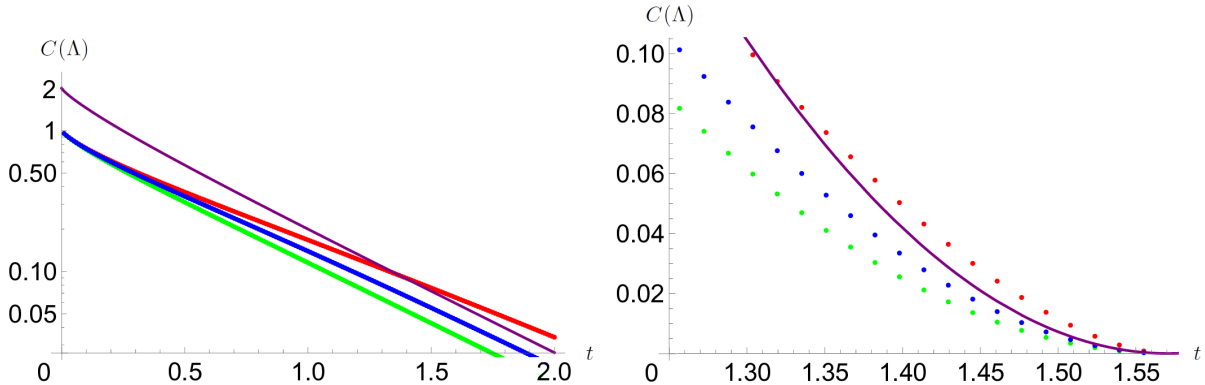
W szczególności Λ^\pm obejmują całą klasę kanałów fazowo kowariantnych zadanych równaniem (39). Odwzorowania dynamiczne są konstruowane poprzez zakodowanie całej zależności czaso-

wej w funkcjach $\lambda_\alpha(t)$, zachowując parametr p stały w czasie. Równania master dla takich mieszanin wykazują pewne interesujące własności. Mianowicie, odwzorowania dynamiczne $\Lambda^\pm(t)$ powstają z klasycznych mieszanin rozpatrywanych na poziomie odwzorowań dynamicznych, lokalnych w czasie generatorów lub jąder pamięci. Innymi słowy, jeśli $\mathcal{L}_U(t)$ i $\mathcal{L}_{NU}^\pm(t)$ są odpowiednio generatorami $\Lambda_U(t)$ i $\Lambda_{NU}^\pm(t)$, to generatorem $\Lambda^\pm(t)$ jest

$$\mathcal{L}^\pm(t) = (1 - |p|)\mathcal{L}_U(t) + |p|\mathcal{L}_{NU}^\pm(t) \quad (42)$$

(i analogicznie dla jąder pamięci). Nie jest to powszechna własność, gdyż relacje między równaniami master a odwzorowaniami dynamicznymi są zwykle bardziej złożone. Aby udowodnić powyższą własność dla równań master z jądrami pamięci, najpierw opracowuję opis ewolucji kanałów fazowo kowariantnych z użyciem jąder pamięci, podając warunki wystarczające na fizycznie dopuszczalne jądra oraz przykłady ich konstruowania.

W głównej części artykułu sprawdzam, jak wybór stanu stacjonarnego wpływa na klasyczne pojemności kanału. Analizę przeprowadzam dla uogólnionych kanałów tłumiących amplitudę $\Lambda(t)$ z $\lambda_1(t) = \cos t$, $\lambda_3(t) = \cos^2 t$ oraz $\lambda_*(t) = |p| \sin^2 t$, dla których znana jest pojemność Holevo i klasyczna pojemność wspomagana splątaniem. Dla wykładniczo zanikających i oscylujących wartości własnych wyznaczam wspomniane pojemności dla różnych dodatnich wartości p (ze względu na symetrię $p \mapsto -p$ [R101, R102]). W przypadku kanałów nieunitalnych konieczne są rozważania numeryczne ze względu na uwikłane funkcje pojawiające się we wzorach na pojemność. Zwiększając stopień nieunitalności odwzorowań, udowadniam, że dochodzi do bezwzględnego wzrostu zarówno pojemności Holevo, jak i pojemności wspomaganej splątaniem. W przypadku kanałów nieunitalnych dolna granica klasycznej pojemności chwilowo przekracza nawet pojemność wspomaganą splątaniem kanałów unitalnych, co przedstawiono na Rys. 10.



Rys. 10: Wykresy przedstawiające ewolucję ograniczeń na klasyczną pojemność dla uogólnionych kanałów tłumiących amplitudę charakteryzowanych przez wykładniczo zanikające (po lewej) i oscylujące (po prawej) funkcje $\lambda(t)$. Kolorowe krzywe odpowiadają pojemności wspomaganej splątaniem dla $p = 0$ (fioletowy) oraz pojemności Holevo dla $p = 2/3$ (zielony), $p = 0.9$ (niebieski) i $p = 1$ (czerwony) [H12].

Analogiczne wyniki dla ograniczeń klasycznej pojemności zostają następnie wyprowadzone dla uogólnionego przesuniętego kanału depolaryzującego $\Lambda(t)$ o wartościach własnych $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = \lambda(t)$ i parametrze nieunitalności $\lambda_*(t) = p(1 - \lambda(t))$ [R103]. Można więc wnioskować, że wzrost pojemności z nieunitalnością jest ogólną właściwością fazowo kowariantnych kanałów kubitowych. Ponadto nieunitalność okazuje się być ważnym zasobem kwantowym do celów przesyłania informacji, ponieważ pomaga w generowaniu większych pojemności kanałów niż kwantowe splątanie.

Moje wyniki dowodzą, że różne rodzaje szumu mogą zostać wykorzystane do inżynierii kanałów kwantowych o zwiększonych parametrach transmisji danych mierzonych za pomocą wierności kanału, maksymalnych czystości wyjściowych, splątania formowania oraz klasycznych pojemności. W szczególności szумы związane z dekoherencją zaimplementowane poprzez

sumowanie jąder pamięci pozwalają na tymczasowe zwiększenie wydajności odwzorowań unitalnych, takich jak kanały Pauliego i uogólnione kanały Pauliego. W przypadku kanałów fazowo kowariantnych klasyczny szum może zostać wykorzystany do wprowadzenia nieunitalności kanału i poprawy jego wydajności w każdej chwili czasu. Wzrost klasycznej pojemności jest na tyle znaczący, że może nawet przewyższać klasyczną pojemność wspomaganą splątaniem dla kanałów unitalnych.

Dalsze uogólnienia kanałów Pauliego

W uogólnieniu kanałów Pauliego na odwzorowania kuditowe kluczową rolę odgrywają bazy wzajemnie nieobciążone (MUB). Z definicji są to takie ortonormalne bazy wektorowe, że prawdopodobieństwo przejścia między dowolnymi dwoma wektorami z różnych baz jest stałe. Wzajemne nieobciążenie jako koncept może zostać rozszerzone na operatory pomiaru. Kalev i Gour [R104] wprowadzili pojęcie pomiarów wzajemnie nieobciążonych (MUM) $\{P_k^{(\alpha)} : \alpha = 1, \dots, d+1; k = 0, \dots, d-1\}$, które są $d+1$ zbiorami dodatnich operatorów sumujących się do operatora jednostkowego, zawierającymi projektory na wektory MUB-ów jako szczególny przypadek pomiarów projekcyjnych.

[H13] *Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements*

Pomiary wzajemnie nieobciążone są nieprojekcyjnymi uogólnieniami MUB-ów, a zatem idealnymi kandydatami do zastąpienia ich w definicji uogólnionych kanałów Pauliego Nathansona i Ruskai [R48]. W ten sposób zachowana zostaje postać kanału

$$\Lambda = \pi_0 \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^{d+1} \pi_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad (43)$$

ale z Φ_{α} zadanymi przez

$$\Phi_{\alpha}[X] = \sum_{k=0}^{d-1} P_k^{(\alpha)} \text{Tr}(X P_k^{(\alpha)}). \quad (44)$$

W przypadku MUB-ów formuły z równań (11) i (44) są matematycznie równoważne. Jednak tylko w równaniu (44) zastąpienie projektorów przez pomiary uogólnione nie wpływa na kompletną dodatniość ani na zachowanie śladu Φ_{α} . Co ważne, znana jest metoda konstrukcji Λ w wymiarach złożonych tylko dla pomiarów nieprojekcyjnych.

W moim artykule proponuję powyższe uogólnienie kanałów Pauliego przy użyciu pomiarów wzajemnie nieobciążonych. Analizuję właściwości zarówno Λ , jak i Φ_{α} , w tym równania własne, warunki na kompletną dodatniość oraz warunki na łamanie splątania. Dla uogólnienia kanałów Pauliego wyprowadzam maksymalną miarę czystości na wyjściu i pokazuję, że jest ona multiplikatywna ($\nu(\Lambda \otimes \Omega) = \nu(\Lambda)\nu(\Omega)$ dla dowolnego kanału kwantowego Ω) wtedy i tylko wtedy, gdy Λ jest skonstruowane z MUB-ów. Podaję również przykłady kanałów, w których MUM-y są zbudowane z macierzy Gell-Manna i obserwabli Heisenberga-Weyla.

Uogólnione kanały Pauliego znalazły szerokie zastosowanie w teorii otwartych układów kwantowych i niemarkowskości. Za ich pomocą skonstruowano klasyczne mieszaniny o dużej liczbie ujemnych współczynników dekoherencji. W kwantowym przetwarzaniu informacji zostały one wykorzystane do pokazania, że szumy mogą poprawiać właściwości transmisyjne kanałów kwantowych, takie jak wierność kanału, czystość na wyjściu, a nawet klasyczna pojemność. Wierzę, że moje uogólnienie z użyciem pomiarów wzajemnie nieobciążonych okaże się równie użyteczne. Na chwilę obecną w kwantowej teorii informacji odwzorowania dodatnie skonstruowane z MUM-ów z powodzeniem wykrywają splątanie związane [P2]. Własność ta została wcześniej udowodniona dla odwzorowań skonstruowanych z MUB-ów [R105].

4.2.3 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowych

Analiza kanałów Pauliego i ich uogólnień od zawsze była moim głównym zainteresowaniem badawczym. Jednak z biegiem lat moją uwagę przykuło kilka innych, mniejszych projektów. W tej sekcji krótko opisuję moje pozostałe osiągnięcia opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora. Przy bliższym spojrzeniu można zauważyć, że odwzorowania liniowe, które analizuję w poniższych pracach, również uogólniają kanały Pauliego – na dodatnie odwzorowania Pauliego, na kanały Weyla (mieszanie unitarne uogólnienie kanałów Pauliego) dla zmiennych ciągłych oraz na dodatnie odwzorowania skonstruowane z pomiarów wzajemnie nieobciążonych i ich uogólnień (które zawierają uogólnione kanały Pauliego jako przypadek szczególny). Niemniej jednak główny nacisk został położony na kanały gaussowskie, detekcję splątania i pomiary kwantowe. W mojej opinii mój wpływ na wymienione obszary badawcze był niewystarczający, aby uzasadnić włączenie ich do osiągnięcia habilitacyjnego.

Uogólnienie symetrycznych operatorów pomiaru

W kwantowym przetwarzaniu informacji pomiary kwantowe są kluczowymi narzędziami do uzyskiwania informacji o stanach kwantowych. Znajdują szerokie stosowania w kwantowej teorii informacji. Operatory pomiaru reprezentuje się przez miary z wartościami w dziedzinie operatorów dodatnio określonych (POVM) – zbiory operatorów półdodatnio określonych, które sumują się do operatora jednostkowego. Szczególnie użyteczne okazują się pomiary informacyjnie kompletne, które pozwalają na wykonanie pełnej tomografii stanu kwantowego [R106]. Wśród najpopularniejszych wysoce symetrycznych operatorów pomiaru wyróżnione są dwie klasy pomiarów rzutowych: symetryczne, informacyjnie kompletne (SIC) POVM-y [R107] oraz projektory na bazy wzajemnie nieobciążone (MUB-y) [R108, R109]. Co ciekawe, SIC POVM-y i MUB-y mają wiele wspólnych zastosowań, wliczając w to kwantową tomografię stanów [R110, R111], kwantową dystrybucję kluczy [R112, R113] oraz wykrywanie splątania [R114, R115]. Są one również często analizowane w tym samym kontekście [R116, R117, R118, R119]. Wygląda na to, że te dwa obiekty są ze sobą ściśle powiązane.

[P1] *All classes of informationally complete symmetric measurements in finite dimensions*

W niniejszym artykule wprowadzam wspólne uogólnienie SIC POVM-ów i MUB-ów, udowadniając, że są stanowią one dwa szczególne przypadki bardziej ogólnej koncepcji: wzajemnie nieobciążonych pomiarów symetrycznych. Mianowicie, rozważane przeze mnie (N, M) -POVM-y są zbiorami N POVM-ów $\{E_{\alpha,k}; k = 1, \dots, M\}$ z następującymi warunkami symetrii:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E_{\alpha,k}) &= \frac{d}{M}, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}^2) &= x, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}E_{\alpha,\ell}) &= \frac{d - Mx}{M(M-1)}, \quad \ell \neq k, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}E_{\beta,\ell}) &= z = \frac{d}{M^2}, \quad \beta \neq \alpha, \end{aligned} \tag{45}$$

gdzie x jest dowolnym parametrem z zakresu

$$\frac{d}{M^2} < x \leq \min \left\{ \frac{d^2}{M^2}, \frac{d}{M} \right\}. \tag{46}$$

Jeśli $x = d^2/M^2$, to powyższe POVM-y są pomiarami rzutowymi. Z tego powodu nie istnieją rzutowe (N, M) -POVM-y dla $M < d$. Pomiary informacyjnie kompletne wprowadzają dodatkowe ograniczenie $(M-1)N = d^2 - 1$ wiążące liczbę POVM-ów N z liczbą operatorów w każdym POVM-ie M . Dalsza analiza pokazuje, że w każdym skończonym wymiarze $d > 2$ istnieją co najmniej cztery rodziny (N, M) -POVM-ów:

- (i) $M = d^2$ oraz $N = 1$ (uogólnione SIC POVM-y [R120]),
- (ii) $M = d$ oraz $N = d + 1$ (pomiaru wzajemnie nieobciążone [R104]),
- (iii) $M = 2$ oraz $N = d^2 - 1$,
- (iv) $M = d + 2$ oraz $N = d - 1$.

Dla ogólnego przypadku podaję metodę konstrukcji pomiarów z hermitowskich baz ortonormalnych. W wymiarze $d = 4$ znajduję przykład $(3, 2)$ -POVM-a (rodzina (iii)) o maksymalnej wartości $x = 2$, gdzie operatory pomiaru są projektorami rzędu 2. Wreszcie wymieniam możliwe zastosowania wprowadzonych pomiarów symetrycznych w entropicznych relacjach nieoznaczoności i wykrywaniu splątania, uogólniając kryterium ESIC [R115] oraz kryteria oparte o bazy wzajemnie nieobciążone [R114], pomiaru wzajemnie nieobciążone [R121] i uogólnione SIC POVM-y [R122].

Moje wyniki sugerują, że pomiaru symetryczne mogą potencjalnie znaleźć równie szerokie zastosowania teoretyczne i doświadczalne, co SIC POVM-y, MUB-y i ich uogólnienia. Zostały już wykorzystane w detekcji splątania do sformułowania ulepszonych kryteriów separowalności [R123, R124, R125, R126] i konstrukcji świadków splątania związanego [P3]. Niedawno użyto ich również do scharakteryzowania entropicznych relacji nieoznaczoności [R127] i średniej koherencji [R128], a dwa kolejne preprinty dotyczą kwantowego sterowania i wykrywania splątania [R129, R130]. Inne zastosowania obejmują kwantowe protokoły dystrybucji kluczy z ulepszoną tolerancją szumów [R131] oraz optymalną estymację stanu kwantowego za pomocą projektów stożkowych [R132]. Znalezienie dodatkowych analogii między strukturami SIC POVM-ów i MUB-ów może pomóc w określeniu, czy istnieją maksymalne zbiory MUB-ów i SIC POVM-ów we wszystkich wymiarach skończonych, co jest popularnym problemem otwartym [R133].

Odzworowania dodatnie i wykrywanie splątania

Splątanie jest cennym zasobem kwantowym używanym do celów kwantowej komunikacji i przetwarzania informacji, obliczeń kwantowych i innych nowoczesnych technologii [R134, R2]. Jego siła polega na zapewnieniu lepszej wydajności wielu zadań kwantowych, takich jak teleportacja [R135] i dyskryminacja kanałów [R136]. Pomimo swojego znaczenia, kwantyfikacja i charakteryzacja splątania kwantowego jest wymagającym otwartym problemem [R137]. Dla wymiarów złożonych $d > 6$ kryterium dodatniej częściowej transpozycji (PPT) Peres-Horodeckiego nie wystarcza już do wykrycia separowalności stanów [R138]. Dlatego konieczne staje się opracowanie innych metod detekcji. Popularne podejście polega na wyznaczeniu wartości oczekiwanej $\text{Tr}(W\rho)$ blokowo dodatniego (ale nie dodatniego) operatora hermitowskiego W w danym stanie ρ . Stan separowalny ρ zwraca wartość $\text{Tr}(\rho W) \geq 0$ na wszystkich świadkach splątania. Zatem stan jest splątany, jeśli istnieje świadek W , dla którego $\text{Tr}(\rho W) < 0$ [R139].

Używając dodatnich (ale nie kompletnie dodatnich) odzworowań Φ , konstruuje się stowarzyszone z nimi operatory $W = \sum_{i,j=0}^{d-1} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi[|i\rangle\langle j|]$, gdzie $|k\rangle$ oznacza ortonormalną bazę w $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$. W związku z tym główny problem sprowadza się do znalezienia dodatnich map, na co nie ma ogólnej metody. Niemniej jednak podjęto kilka udanych prób, w których wykorzystano operatory pomiaru, w tym bazy wzajemnie nieobciążone [R105, R140, R141], pomiaru wzajemnie nieobciążone [R142] i SIC POVM-y [R143].

W moich pracach wprowadzam nowe klasy odzworowań dodatnich i świadków splątania zdefiniowanych z użyciem pomiarów wzajemnie nieobciążonych oraz pomiarów symetrycznych zdefiniowanych w [P1]. Szczególną uwagę poświęcam świadkom nierozkładalnym – czyli takim świadkom, których nie można rozłożyć na sumę $W = A + B^\Gamma$ z dodatnimi operatorami A, B , gdzie Γ oznacza częściową transpozycję. Takie operatory są nieocenione w wykrywaniu splątania związanego (splątania stanów PPT) [R139]. Przedstawiam także rodzinę map będących kontrakcjami, która zapewnia udoskonaloną charakteryzację stanów splątanych.

[P2] *Entanglement witnesses from mutually unbiased measurements*

Niniejszy artykuł wykorzystuje pomiary wzajemnie nieobciążone (MUM) do zdefiniowania nowej klasy odwzorowań dodatnich zachowujących ślad

$$\Phi = \frac{1}{d\kappa - 1} \left[(d\kappa - 1 - N + 2L)\Phi_0 + \sum_{\alpha=L+1}^N \Phi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^L \Phi_\alpha \right]. \quad (47)$$

W powyższym wzorze $\Phi_0[X] = \mathbb{I}_d \text{Tr}(X)/d$ jest kanałem całkowicie depolaryzującym, zaś

$$\Phi_\alpha[X] = \sum_{k,\ell=0}^{d-1} \mathcal{O}_{k\ell}^{(\alpha)} P_k^{(\alpha)} \text{Tr}(P_\ell^{(\alpha)} X) \quad (48)$$

oznaczają odwzorowania skonstruowane z macierzy obrotów ortogonalnych $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ zachowujących wektor maksymalnie mieszany ($\mathbf{n}_* = (1, \dots, 1)/\sqrt{d}$) i MUM-ów $P_k^{(\alpha)}$ o czystości κ . Współczynnik przed Φ_0 rośnie wraz z liczbą odjemników L .

Co ciekawe, w dowodzie dodatniości odwzorowania warunek $P_k^{(\alpha)} \geq 0$ nie jest używany. Stąd $P_k^{(\alpha)}$ charakteryzowane przez dowolny parametr rzeczywisty κ produkują odwzorowanie dodatnie Φ , nawet jeśli $P_k^{(\alpha)} \not\geq 0$ (tj. $P_k^{(\alpha)}$ nie są operatorami pomiaru). Mimo że κ nie występuje wprost we wzorze na świadek splątania W , własności W zależą od optymalnej wartości κ . Na przykład MUM-y skonstruowane z macierzy Gell-Manna (dla których $\kappa_{\text{opt}} = \frac{d+2}{d^2}$) produkują mniej nierozkładalnych świadków niż MUB-y ($\kappa_{\text{opt}} = 1$).

Dla układów kutrit-kutrit podaję kilka przykładów świadków nierozkładalnych wraz z wykrywaniem stanami PPT. Znajduję również świadków rozkładalnych i przedstawiam ich rozkład. Zdolność W do wykrywania splątania porównuję z kryterium separowalności CCNR (*computable cross-norm or realignment*).

Następnie pokazuję, że przedstawiona klasa świadków splątania skonstruowanych z pomiarów wzajemnie nieobciążonych należy do dużej rodziny świadków opartych na kryterium separowalności CCNR [R144],

$$W' = \mathbb{I}_{d^2} - \sum_{\mu,\nu=0}^{d^2-1} Q_{\mu\nu} G_\mu^T \otimes G_\nu. \quad (49)$$

W równaniu tym $Q_{\mu\nu}$ jest macierzą ortogonalną, natomiast G_μ to operatory dowolnej bazy hermitowskiej. Świadek W odzyskuje się dla wyboru $G_0 = \mathbb{I}_d$, bezśladowych G_μ ($\mu > 0$) i specjalnej postaci blokowo-diagonalnej macierzy Q .

[P3] *Indecomposability of entanglement witnesses constructed from symmetric measurements*

Niniejszy artykuł jest kontynuacją [P2], zastępującą pomiary wzajemnie nieobciążone w definicji dodatnich odwzorowań Φ pomiarami symetrycznymi wprowadzonymi w [P1]. Mianowicie, (N, M) -POVM (niekoniecznie kompletny informacyjnie) jest używany do skonstruowania N map zachowujących ślad

$$\Phi_\alpha[X] = \frac{M}{d} \sum_{k,\ell=1}^M \mathcal{O}_{k\ell}^{(\alpha)} E_{\alpha,k} \text{Tr}(X E_{\alpha,\ell}) \quad (50)$$

i wreszcie odwzorowania dodatniego, które również zachowuje ślad,

$$\Phi = \frac{d}{d-1} \frac{M-1}{xM^2-d} \left[\left(\frac{d-1}{d} \frac{xM^2-d}{M-1} - N + 2L \right) \Phi_0 + \sum_{\alpha=L+1}^N \Phi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^L \Phi_\alpha \right]. \quad (51)$$

Podobnie jak w przypadku z MUM-ami, warunki $E_{\alpha,k} \geq 0$ nie są konieczne dla dodatniości Φ . Odwzorowanie to nie zależy od parametru x i może być zdefiniowane przy użyciu $E_{\alpha,k} \not\geq 0$. Tym

razem jednak wybór pomiarów symetrycznych wpływa na świadka poprzez liczbę M operatorów wewnątrz pojedynczego POVM-a. Im większe M , tym większa liczba dozwolonych odjemników L .

Podobnie jak w [P2], świadkowie splątania utworzeni z Φ są częścią klasy związanej z kryterium CCNR [R144]. Ci sami świadkowie mogą wynikać z różnych wyborów (N, M) -POVM-ów, o ile są uzyskiwani z tej samej ortonormalnej bazy hermitowskiej. Podaję przykłady nierozkładalnych świadków splątania dla układów kutrit-kutrit. Pokazuję, że pomiary z nieoptymalnym x mogą również prowadzić do nierozkładalnych świadków, czego nie udało mi się zaobserwować we wcześniejszej publikacji [P2]. Ponadto świadkowie splątania skonstruowani z (N, M) -POVM-ów z $x < x_{\text{opt}}$ mogą wykrywać stany splątane niewykrywalne przy wyborze $x = x_{\text{opt}}$. Dla $(5, 1)$ -POVM-a, którego nierozkładalność jest niejednoznaczna, proponuję doskonalszego nierozkładalnego świadka oraz wykrywany przez niego stan PPT, który nie jest wykrywany przez poprzedniego świadka. Przechodząc do układów kukwart-kukwart, konstruuje nierozkładalnego świadka splątania z $(15, 2)$ -POVM-a z optymalnym $x_{\text{opt}} = x = 2$, gdzie operatory pomiaru są projektorami rzędu 2. Dla tego świadka znajduję dwuparametrową rodzinę wykrywalnych stanów PPT.

[P4] *Interpolating between Positive and Completely Positive Maps: A New Hierarchy of Entangled States*

Podczas gdy odwzorowania kompletnie dodatnie zachowujące ślad reprezentują procesy kwantowe, mapy, które są tylko dodatnie, znajdują swoje unikalne zastosowania w wykrywaniu splątania i określaniu niemarkowowskości ewolucji. Pomiedzy odwzorowaniami dodatnimi a kompletnie dodatnimi istnieje cała hierarchia k -dodatnich map. Z definicji Φ jest k -dodatnie, jeśli jego rozszerzenie $\mathbb{1}_k \otimes \Phi$ jest dodatnie. Dodatniość Φ odpowiada $k = 1$, a kompletną dodatniość otrzymuje się dla $k = d$. Mapy pośrednie są używane do scharakteryzowania stopnia niemarkowowskości ewolucji oraz ustanowienia hierarchii stanów splątanych [R23].

W swojej pracy wprowadzam dalsze udoskonalenie klasyfikacji odwzorowań dodatnich zachowujących ślad, inspirowane siłą niemarkowowskości z pracy [R145]. Nowe rodziny k -częściowo kontrakcyjnych map Φ są zdefiniowane w taki sposób, że ich rozszerzenia $\mathbb{1}_k \otimes \Phi$, $k = 1, \dots, d^2$ są kontrakcjami ($\|(\mathbb{1}_k \otimes \Phi)[X]\|_{\text{tr}} \leq \|X\|_{\text{tr}}$), ale tylko na podprzestrzeniach wymiaru $k \times d^2$. Ekstremalne wartości $k = 1$ i $k = d^2$ odpowiadają kolejno dodatnim (PTP) i kompletnie dodatnim (CPTP) odwzorowaniom zachowującym ślad. W rzeczywistości istnieje następująca relacja inkluzji,

$$\text{CPTP maps} = \mathcal{C}_{d^2} \subset \mathcal{C}_{d^2-1} \subset \dots \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 = \text{PTP maps}, \quad (52)$$

gdzie \mathcal{C}_k jest zbiorem k -częściowo kontrakcyjnych map.

Powyższa koncepcja została zilustrowana dla odwzorowań kubitowych, gdzie istnieje jedna klasa interpolacji pomiędzy mapami PTP i CPTP: 3-częściowo kontrakcyjne Φ . Klasa ta rzeczywiście wprowadza udoskonaloną hierarchię map, jako że np. transpozycja jest dodatnia, ale nie 3-częściowo kontrakcyjna. Podano przykłady odwzorowań depolaryzujących i depolaryzujących z transpozycją, które należą do klasy pośredniej. Co ciekawe, istnieje związek między odwzorowaniami 3-częściowo kontrakcyjnymi a mapami Schwarza (dodatnimi, ale nie kompletnie dodatnimi) zdefiniowanymi przez $\Phi[X^\dagger X] \geq \Phi[X^\dagger]\Phi[X]$ [R146, R98]. Dodatkowo częściowo kontrakcyjne odwzorowania zapewniają dokładniejszą charakteryzację stanów splątanych, analogiczną do hierarchii w kategoriach liczby Schmidta [R147, R148]. Zilustrowano to na prostym przykładzie dwukubitowych stanów izotropowych.

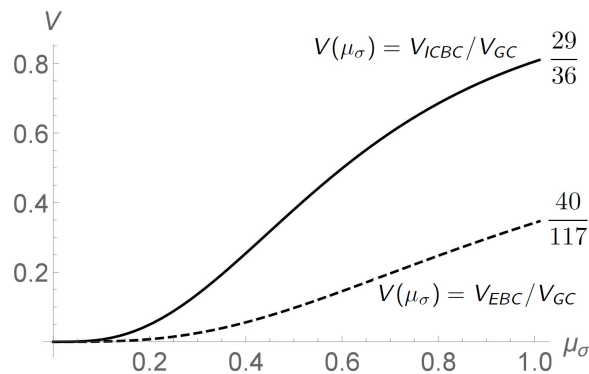
W swoich artykułach przedstawiam nowe rodziny odwzorowań dodatnich zachowujących ślad wraz z zastosowaniami w kwantyfikacji i detekcji splątania. Wyniki obejmują nierozkładalnych świadków splątania, które umożliwiają wykrywanie stanów PPT, skonstruowanych z pomiarów wzajemnie nieobciążonych oraz z pomiarów symetrycznych. Dalsza charakterystyka własności świadków, takich jak ich ekstremalność lub optymalność, jest interesującym otwar-

tym problemem, który wymaga dalszych badań. Innym kierunkiem badawczym jest uogólnienie wyników dla układów złożonych z więcej niż dwóch podukładów. Kolejnym krokiem w rozwoju teorii odwzorowań częściowo kontraktywnych jest skonstruowanie mniej restrykcyjnych warunków wystarczających dla 3-częściowo kontraktywnych map kubitowych. Wówczas można by ustalić całkowitą relację między odwzorowaniami kontraktywnymi a mapami Schwarza. Ostatecznym celem jest ustanowienie metod konstrukcji map k -częściowo kontraktywnych w wyższych wymiarach d oraz ustalenie ich relacji z k -dodatnością. Pozwoliłyby to na lepszą charakteryzację stanów splątanych oraz stopnia niemarkowowskości ewolucji otwartych układów kwantowych.

Geometria kanałów gaussowskich

[P5] *Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels*

W tej publikacji stosuję metody opracowane w [R149, R150] do analizy geometrii jednomodowych kwantowych kanałów gaussowskich. Elementy odległości i objętości Hilberta-Schmidta dla stanów gaussowskich są zdefiniowane na rozmaitości odpowiadających im stanów Choi-Jamiołkowskiego o ustalonym stanie brzegowym. W celu obliczenia objętości kanałów konieczne jest wykonanie lokalnego rozkładu symplektycznego macierzy kowariancji. Całki objętościowe dają się rozwiązać analitycznie z dokładnością do części rozbieżnej, która jest całką po grupie symplektycznej. Ten sam czynnik jest również obecny we wzorach na objętości dla podklas kanałów gaussowskich. Stąd względne objętości wielkości niezmienniczych względem lokalnych przekształceń symplektycznych są skończone. Wykorzystuję ten fakt do znalezienia objętości kanałów łamiących splątanie oraz kanałów łamiących niekompatybilność wśród wszystkich jednomodowych kanałów gaussowskich. Co ciekawe, geometria zależy od wyboru wspólnego stanu brzegowego σ dwumodowych stanów gaussowskich. Wyniki zostały przedstawione na Rys. 11 i mogą być interpretowane jako prawdopodobieństwo napotkania kanału gaussowskiego o danych właściwościach.



Rys. 11: Względne objętości kanałów łamiących splątanie (linia przerywana) i kanałów łamiących niekompatybilność (linia ciągła) w odniesieniu do wszystkich jednomodowych kanałów gaussowskich w funkcji czystości μ_σ stanu brzegowego [P5].

Ostatecznie okazuje się, że nawet przy niepełnej informacji o jednomodowych kanałach gaussowskich można określić ich sterowalność oraz zdolność do łamania splątania kwantowego. Zakładając, że znane są tylko całkowite i brzegowe czystości odpowiednich stanów Choi-Jamiołkowskiego, można znaleźć regiony i objętości stanów separowalnych oraz stanów splątanych. Istnieje również obszar koegzystencji, w którym rozróżnienie między separowalnością a splątaniem jest możliwe tylko przy pełnej wiedzy o układzie.

Interesującą tematyką przyszłych badań jest analiza geometrii innych szczególnych podklas kanałów gaussowskich, takich jak kanały tłumiące amplitudę, ograniczone kanały kwantowe i kanały rozważane w [R151, R152]. Do tej pory moje wyniki zostały zacytowane w pracach, które rozważają geometrię dla metryki Buresa [R153] i geometryczne wejściowe stany spójne

[R154].

4.2.4 Wpływ na przyszłe badania i pytania otwarte

Jako fizyk matematyczny stosuję zaawansowane metody matematyki i fizyki do analizy kanałów Pauliego i ich uogólnień z zastosowaniami w informacji kwantowej, otwartych układach kwantowych, kwantowej komunikacji i przetwarzaniu informacji. Wszystkie wymienione dziedziny są popularnymi, szybko rozwijającymi się obszarami badawczymi. Od daty uzyskania przeze mnie stopnia doktora do momentu napisania tego wniosku, na arXiv opublikowano prawie 9000 preprintów z nazwami wymienionych obszarów badawczych w tytule lub abstrakcie. Samo wyrażenie *Pauli channels* (kanały Pauliego) pojawia się 45 razy w tytułach lub abstraktach innych badaczy. Jest to liczba godna szacunku, biorąc pod uwagę, że kanały Pauliego i ich uogólnienia są często używane jedynie jako pouczające przykłady ilustrujące szersze idee.

Poniżej porównuję stan wiedzy przed i po opublikowaniu prac zawartych w moim osiągnięciu habilitacyjnym. Dla każdego tematu badawczego jasno określłam swój wkład w daną dziedzinę. Krótko komentuję najważniejsze cytowania swoich artykułów.

(1) *Geometria na przestrzeni kanałów kwantowych*

Rozważywszy geometrię zbioru stanów kwantowych, uwagę skierowano ku własnościom kanałów kwantowych. Lovas i Andai [R155] obliczyli objętość unitalnych kanałów kubitowych wśród wszystkich kanałów kubitowych, korzystając z miary Lebesgue'a. Używając miary Hilberta-Schmidta, Szarek i in. [R156] wyprowadzili ograniczenia na objętości dodatnich odwzorowań kubitowych zachowujących ślad. Jagadish i in. [R65] wprowadzili miarę objętości w celu obliczania objętości kanałów Pauliego względem dodatnich, zachowujących ślad odwzorowań Pauliego. Objętości kanałów symulowalnych przez jednokubitowe otoczenie zostały wyznaczone dla kanałów Pauliego [R157] i uogólnionych kanałów tłumiących amplitudę [R158]. Również dla kanałów Pauliego przeanalizowano geometrię odwzorowań osiągalnych przy użyciu półgrupy Lindblada [R159, R160]. Znane są również wyniki dla układów zmiennych ciągłych. Monras i Illuminati [R161] przeanalizowali geometrię kwantowych kanałów gaussowskich w metryce Buresa-Fishera.

Mój wkład w geometrię map kwantowych polega na wyznaczeniu względnych objętości dla ważnych klas kanałów Pauliego, uogólnionych kanałów Pauliego i kanałów fazowo kowariantnych. Stosuję metody opracowane dla kanałów gaussowskich na układach zmiennych ciągłych do przypadków skończeniowymiarowych [P5]. Innymi słowy, wprowadzam struktury geometryczne na przestrzeni odpowiednich stanów Choi-Jamiołkowskiego z metryką indukowaną przez iloczyn wewnętrzny Hilberta-Schmidta. Nowe wyniki obejmują objętości dodatnich i kompletnie dodatnich odwzorowań zachowujących ślad, kanałów łąmiących splątanie, kanałów uzyskiwane za pomocą generatorów lokalnych w czasie, jak również kanałów dodatnio i kompletnie dodatnio podzielnych.

Wpływ moich artykułów na geometryczne prace innych naukowców można zauważyć w cytowaniach. Dla układów kubitowych Zhou i in. [R162] obliczają względne objętości stanów całkowicie reprezentowanych przez wypukłe mieszaniny w zbiorze użytecznych stanów. Shahbeigi i in. [R163] analizują geometrię mieszania unitarnych kanałów kubitowych osiągalnych przez półgrupę Lindblada. Na podobnej zasadzie geometryczne własności zbioru osiągalnych odwzorowań są analizowane w pracy [R164]. Natomiast Jagadish i in. zapoczątkowali nowy kierunek badawczy, jakim jest analiza geometrii kwantowych odwzorowań dynamicznych. Dla kanałów Pauliego autorzy ustalili objętość kompletnie dodatnio niepodzielnych odwzorowań wśród wypukłych kombinacji półgrup markowskich [R72] i ich prostego uogólnienia [R73]. Ponadto dla uogólnionych odwzorowań Pauliego oszacowano ułamek odwracalnych odwzorowań dynamicznych wynikających ze zmieszania map nieodwracalnych [R51].

Dalsze badania obejmują analizę porównawczą geometrii kanałów na przestrzeni stanów kwantowych w ramach innych metryk, takich jak miara Fishera-Rao [R165], miara Buresa [R166, R167] lub miara Hastingsa [R168, R169]. Interesującym kierunkiem badawczym jest kompletna charakteryzacja względnych objętości dla uogólnionych kanałów Pauliego i innych kanałów kuditowych. Kolejny problem otwarty zakłada geometryczne rozważania przy założeniu nieunitalności kanałów kwantowych.

(2) *Klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych*

Zainteresowanie niniejszą tematyką badawczą rozpoczęło się po tym, jak Megier i in. [R67] pokazali, że wiecznie niemarkowowską ewolucję kubitów można zrealizować za pomocą klasycznej mieszaniny dwóch półgrup Pauliego. Ten zaskakujący efekt został później wyjaśniony w kategoriach przepływu informacji przez Breuera i in. [R68]. Podczas swojego doktoratu udowodniłem, że wieczną niemarkowowskość można również odtworzyć w wyniku zmieszania uogólnionych półgrup Pauliego [P7, P10]. Z drugiej strony Wudarski i Chruściński otrzymali markowowską półgrupę dynamiczną poprzez wypukłą kombinację dwóch niemarkowowskich ewolucji kuditowych [R69].

Mój wkład do teorii klasycznych mieszanin odwzorowań dynamicznych prezentuje się następująco. Kiedy zaczynałam analizować temat, jedynymi mieszaninami rozważanymi w literaturze były kombinacje półgrup Markowa i prostych odwzorowań kompletnie dodatnio niepodzielnych [R69]. W związku z tym pojawiło się naturalne pytanie: co się stanie, jeśli zastąpię półgrupy Markowa bardziej ogólnymi mapami? Najpierw rozważam wypukłe kombinacje odwzorowań dynamicznych o kompletnie dodatniej podzielności i pokazałam, że możliwe jest utworzenie wiecznie niemarkowowskiej ewolucji z więcej niż jednym ujemnym współczynnikiem dekoherencji. Następnie skupiam się na odwzorowaniach nieodwracalnych. Udaje mi się pokazać, że mapy dynamiczne opisujące wysoce niemarkowowską ewolucję mogą zostać zmieszane w półgrupę markowowską. Wreszcie porzucam ograniczenia w postaci unitalności oraz komutatywności odwzorowań dynamicznych, udowadniając, że ich mieszaniny zachowują się zdecydowanie inaczej niż mieszaniny map bistochastycznych.

Jednocześnie inna grupa badawcza pracowała nad mieszaninami odwzorowań Pauliego oraz uogólnionych odwzorowań Pauliego. Jagadish i in. [R72] rozpoczęli od zmieszania trzech dynamicznych półgrup Pauliego i pełnego scharakteryzowania otrzymanego w ten sposób simpleksu Pauliego. Następnie autorzy scharakteryzowali obszar niemarkowowskości mieszanin powstających z wypukłych kombinacji trzech kompletnie dodatnio podzielnych odwzorowań Pauliego [R73]. Ich publikacja o eliminowaniu osobliwości poprzez mieszanie map Pauliego [R170] zainspirowała mnie do rozważania nieodwracalnych mieszanin uogólnionych odwzorowań Pauliego [H6]. Natomiast Jagadish i in. [R52] uogólnili mój wynik, udowadniając, że nieodwracalność uogólnionych odwzorowań Pauliego jest konieczna do wytworzenia półgrupy Markowa. Wspomniani autorzy jako pierwsi przeanalizowali geometrię nie kanałów, a odwzorowań dynamicznych [R51], w szczególności objętość odwracalnych mieszanin nieodwracalnych uogólnionych odwzorowań Pauliego. W najnowszym preprintcie [R171] analizują wreszcie nieodwracalność i niemarkowowskość mieszanin dynamicznych odwzorowań Pauliego. Alternatywne podejście do mieszanin półgrup Markowa zostało opracowane przez Budiniego i in. [R172], gdzie kombinacja wypukła jest brana po rozkładzie prawdopodobieństwa w postaci Krausa. Inne grupy badawcze poszerzyły wiedzę na temat wiecznie niemarkowowskiej ewolucji [R173, R174, R175]. Wreszcie moje badania zostały przytoczone w pracy przeglądowej na temat ewolucji niemarkowowskiej [R176].

Pomimo ich znaczącego rozwoju w ostatnich latach, klasyczne mieszaniny odwzorowań dynamicznych są nadal stosunkowo niezbadanym tematem. Spośród wszystkich możliwych przypadków, częściowe wyniki są znane tylko dla kanałów Pauliego, uogólnionych

kanałów Pauliego i kanałów fazowo kowariantnych. Wypukłe kombinacje map jedynie dodatnio podzielnych nie były nigdzie rozważane, podobnie jak z różnymi punktami osobliwości lub z parametrami mieszania zależnymi od czasu. Najbardziej interesujące byłoby wyjście poza uogólnienia odwzorowań Pauliego, by przeanalizować zachowanie jeszcze bardziej ogólnych klas kanałów.

(3) *Poprawa właściwości komunikacyjnych kanałów za pomocą szumów*

Idea rozważania szumu jako korzystnego dla ewolucji kwantowej rozpoczęła się od zaobserwowania, że dekoherencja może zostać wykorzystana jako zasób kwantowy. Pierwsze zastosowania obejmują ulepszone kwantowe przetwarzanie informacji [R84] i inżynierię stanów [R85]. Marshall i in. [R86] opracowali sieci modularne wspomagane dyssypacją, które pozwalają kontrolować utratę koherencji i zgodności. Wykrywanie stanów kubitowych zostało udoskonalone przez Gillarda i in. [R87] poprzez manipulowanie szumem termalnym. Efektów pamięci związane z szumem otoczenia użyto do stłumienia współczynników błędu dla wierności kanału Pauliego [R88]. Podczas doktoratu wykazałam, że podobne zjawiska można zaobserwować podczas inżynierii wierności kanału, splątania kwantowego, entropii von Neumanna i spójności kwantowej dla uogólnionych kanałów Pauliego [P13]. Wyniki te wskazywały, że klasyczna pojemność kanałów kubitowych może również zostać poprawiona z pomocą szumów otoczenia. Niewiele było znanych analitycznych wzorów na pojemność. Ponowne zainteresowanie klasyczną pojemnością kanałów kwantowych zaczęło się po tym, jak Rehman i in. [R94, R95] znaleźli dolną i górną granicę dla pojemności Holevo kanałów Weyla.

Moim wkładem w niniejszym dziedzinę jest znalezienie ograniczeń pojemności Holevo dla uogólnionych kanałów Pauliego. Udowadniam słabą addytywność dolnej granicy pojemności i przedstawiłam analityczne wzory na klasyczną pojemność dwuparametrowych klas kanałów. Wyniki te zostają następnie zastosowane, by pokazać, że pojemność uogólnionych kanałów Pauliego można zwiększyć po zakłóceniu półgrupy Markowa na poziomie równań master z jądrami pamięci. Dla fazowo kowariantnych kanałów kubitowych wprowadzam inne miary jakości transmisji, takie jak ekstremalne wierności kanału i maksymalna czystość na wyjściu. Po zdefiniowaniu formalizmu z jądrami pamięci pokazuję, że zarówno stanami stacjonarnymi, jak i stopniem nieunitalności odwzorowań dynamicznych, można manipulować poprzez tworzenie mieszanin na poziomie map, generatorów lub jąder pamięci. Moje wyniki potwierdzają, że maksymalna wierność kanału na stanach czystych, maksymalna czystość na wyjściu oraz klasyczna pojemność kanału mogą zostać poprawione poprzez wprowadzenie większej nieunitalności do kanału kwantowego.

Kontynuując prace nad pojemnością kanałów, Amosov [R177] obliczył klasyczną pojemność dla deformacji kwantowo-klasycznych kanałów Weyla. Li i Zheng [R178] znaleźli dolne granice klasycznej pojemności dla skorelowanych kanałów dwukubitowych. Podczas gdy korzystna inżynieria szumów pozostaje stosunkowo mało popularną tematyką, kilka technik ograniczania błędów zostało zastosowanych do kanałów Pauliego i ich uogólnień. Teo i in. [R179] wykorzystali wirtualną destylację, aby udowodnić, że wydajność metod ograniczenia błędów można zwiększyć pod działaniem stratnych kanałów wielokubitowych oraz zaszumionych kanałów Pauliego. Rehman i in. [R180] wykorzystali konstrukcję ograniczania błędów pomiarowych w celu zmniejszenia szumu stanów sondy kwantowej spowodowanego przez uogólnione kanały Pauliego. Lee i in. [R181] doświadczalnie zaimplementowali wariacyjny solver wartości własnej (VQE) wyposażony w skuteczny protokół redukcji szumów Pauliego w celu oszacowania energii stanu podstawowego kationu. Roncallo i in. [R182] wprowadzili technikę dekonwolucji szumu, by uzyskać bezszumowe wartości oczekiwane zaszumionych obserwabli na wyjściu, zarówno dla kanałów Pauliego, jak i innych kanałów.

Interesującym problemem otwartym jest znalezienie dokładnych formuł lub ograniczeń

na pojemność kanału dla szerszych rodzin uogólnionych kanałów Pauliego i kanałów fazowo kowariantnych. Dokładniejsza charakteryzacja pojemności klasycznej, kwantowej i klasycznej wspomaganej splątaniem jest jednym z moich celów badawczych w ramach grantu SONATA. Alternatywne przyszłe badania mogą obejmować dalsze uogólnienia metod inżynierii korzystnych szumów na nieunitalne kanały kuditowe. Jedną z możliwości jest rozważenie kuditowych kanałów fazowo kowariantnych [R183, R184, R185].

(4) *Dalsze uogólnienia kanałów Pauliego*

Istnieją dwa sposoby, w jaki kanały Pauliego mogą być uogólniane: na odwzorowania kuditowe lub na nieunitalne odwzorowania kubitowe. Problem z uogólnieniami na wyższe wymiary polega na tym, że nie ma sposobu na zachowanie wszystkich własności macierzy Pauliego. Jeśli σ_α zostaną zastąpione (unitarnymi) operatorami Weyla, wówczas wynikowy kanał (Weyla lub Weyl-kowariantny) jest kanałem mieszanie unitarnym. Uogólnienia poprzez (hermitowskie) macierze Gell-Manna można dokonać na dwa nierównoważne sposoby: poprzez zastąpienie nimi σ_α w reprezentacji Krausa lub w równaniach własnych [P11]. Jeśli operatory uogólniające macierze Pauliego mają wzajemnie nieobciążone bazy własne, wówczas odtwarza się uogólnione kanały Pauliego Nathansona i Ruskai [R48]. Takie operatory mogą zostać zgrupowane w zbiory wzajemnie komutujących operatorów unitarnych, które tworzą podalgebry komutatywne. Konstrukcję uogólnia się dalej, zastępując podalgebry komutatywne komplementarnymi podalgebrami niekomutatywnymi. Wówczas otrzymuje się uogólnienie kanałów Pauliego Ohno i Petza [R45].

W moim artykule przedstawiam nowe uogólnienie kanałów Pauliego, opierając jego konstrukcję na pomiarach wzajemnie nieobciążonych (MUM). Przeprowadzam ich częściową analizę, w tym warunki na kompletną dodatniość oraz na łamanie splątania kwantowego.

Jak dotąd nie opublikowano kolejnych prac na temat mojej propozycji uogólnienia kanałów Pauliego. W swojej publikacji dotyczącej wykrywania splątania [P2] charakteryzuję odwzorowania dodatnie, ale nie kompletnie dodatnie, które stanowią uogólnienie wspomnianych kanałów. Obecnie pracuję nad sformułowaniem lokalnego i Nielokalnego w czasie opisu odpowiadającej im dynamiki. Spodziewam się, że może istnieć pewien związek między stopniem niemarkowowskości ewolucji a współczynnikiem czystości, który charakteryzuje MUM-y.

Badania do habilitacji realizowałam, pracując w trzech grantach Narodowego Centrum Nauki: PRELUDIUM, MAESTRO i SONATA. W trakcie badań odkryłam wiele interesujących problemów otwartych, które chciałabym zbadać w ramach trwającego grantu SONATA. Niektóre z tych problemów są bezpośrednio związane z moją pracą podczas doktoratu i później. Inne są nowymi kierunkami badań, które poszerzą moje horyzonty. Mój plan badawczy obejmuje wyprowadzenie formuł na klasyczne i kwantowe pojemności kanałów, charakteryzację technik niwelowania wpływu błędów w otwartych układach kwantowych, konstrukcję i analizę nowych świadków splątania oraz dalsze ulepszanie hierarchizacji odwzorowań dodatnich. Oprócz tego chciałabym wykorzystać pomiary symetryczne do skonstruowania kanałów kwantowych i wykonania tomografii stanów kwantowych, a także kontynuować prace nad mieszaninami odwzorowań dynamicznych.

4.2.5 Bibliografia

H. Artykuły wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego

[H1] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **100**, 062331 (2019).

[H2] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **101**, 062323 (2020).

[H3] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **102**, 062615 (2020).

- [H4] K. Siudzińska, *Geometry of phase-covariant qubit channels* (2023), doi: 10.1088/2399-6528/ace0f4.
- [H5] K. Siudzińska and D. Chruściński, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 375305 (2020).
- [H6] K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **103**, 022605 (2021).
- [H7] K. Siudzińska, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 215201 (2022).
- [H8] K. Siudzińska, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 405303 (2022).
- [H9] K. Siudzińska, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 445301 (2020).
- [H10] K. Siudzińska, A. Das, and A. Bera, *Entropy* **23**, 1382 (2021).
- [H11] K. Siudzińska and M. Studziński, *J. Phys. A: Math. Theor.* **56**, 205301 (2023).
- [H12] K. Siudzińska, *J. Phys. A: Math. Theor.* **56**, 235301 (2023).
- [H13] K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **102**, 032603 (2020).

P. Inne artykuły habilitantki

- [P1] K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **105**, 042209 (2022).
- [P2] K. Siudzińska and D. Chruściński, *Sci. Rep.* **11**, 22988 (2021).
- [P3] K. Siudzińska, *Sci. Rep.* **12**, 10785 (2022).
- [P4] K. Siudzińska, S. Chakraborty, and D. Chruściński, *Entropy* **23**, 625 (2021).
- [P5] K. Siudzińska, K. Luoma, and W. T. Strunz, *Phys. Rev. A* **100**, 062308 (2019).
- [P6] K. Siudzińska and D. Chruściński, *J. Phys. A: Math. Theor.* **48**, 405202 (2015).
- [P7] D. Chruściński and K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **94**, 022118 (2016).
- [P8] K. Siudzińska and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **96**, 022129 (2017).
- [P9] K. Siudzińska, *Rep. Math. Phys.* **80**, 361–372 (2017).
- [P10] K. Siudzińska and D. Chruściński, *J. Math. Phys.* **59**, 033508 (2018).
- [P11] K. Siudzińska, *Rep. Math. Phys.* **81**, 321–345 (2018).
- [P12] K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **99**, 012340 (2019).
- [P13] K. Siudzińska and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **100**, 012303 (2019).

R. Referencje innych autorów

- [R1] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge 2018.
- [R2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [R3] P. Zoller and et al., *Eur. Phys. J. D* **36**, 203–228 (2005).
- [R4] M. F. Riedel, D. Binosi, R. Thew, and T. Calarco, *Quantum Sci. Technol.* **2**, 030501 (2017).
- [R5] M. Pavicic, *Quantum Computation and Quantum Communication: Theory and Experiments*, Springer US, New York 2006.

- [R6] D. Heiss, ed., *Fundamentals of Quantum Information: Quantum Computation, Communication, Decoherence and All That*, Springer-Verlag, Berlin 2002.
- [R7] E. Brüning and F. Petruccione, eds., *Theoretical Foundations of Quantum Information Processing and Communication*, Springer, Berlin 2010.
- [R8] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Verlag, Berlin 1983.
- [R9] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Oxford 2003.
- [R10] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore 2012.
- [R11] W. F. Stinespring, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 211 (1955).
- [R12] I. de Vega and D. Alonso, Rev. Mod. Phys. **89**, 15001 (2017).
- [R13] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. Sudarshan, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
- [R14] G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [R15] N. K. Bernardes, A. Cuevas, A. Orioux, C. H. Monken, P. Mataloni, F. Sciarrino, and M. F. Santos, Sci. Rep. **5**, 17520 (2015).
- [R16] J. Jin, V. Giovannetti, R. Fazio, F. Sciarrino, P. Mataloni, A. Crespi, and R. Osellame, Phys. Rev. A **91**, 012122 (2015).
- [R17] K.-D. Wu, Z. Hou, G.-Y. Xiang, C.-F. Li, G.-C. Guo, D. Dong, and F. Nori, npj Quantum Inf. **6**, 55 (2020).
- [R18] T. de Lima Silva, S. P. Walborn, M. F. Santos, G. H. Aguilar, and A. A. Budini, Phys. Rev. A **101**, 042120 (2020).
- [R19] S. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **20**, 948 (1958).
- [R20] R. Zwanzig, J. Chem. Phys. **33**, 1338 (1960).
- [R21] A. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **105**, 050403 (2010).
- [R22] M. M. Wolf, J. Eisert, T. S. Cubitt, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **101**, 150402 (2008).
- [R23] D. Chruściński and S. Maniscalco, Phys. Rev. Lett. **112**, 120404 (2014).
- [R24] W. J. Huggins, J. R. McClean, N. C. Rubin, Z. Jiang, N. Wiebe, K. B. Whaley, and R. Babbush, npj Quantum Inf. **7**, 23 (2019).
- [R25] C. Monroe, W. C. Campbell, L.-M. Duan, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, P. W. Hess, R. Islam, K. Kim, N. M. Linke, G. Pagano, P. Richerme, C. Senko, and N. Y. Yao, Rev. Mod. Phys. **93**, 025001 (2021).
- [R26] J. Preskill, Quantum **2**, 79 (2018).
- [R27] G. García-Pérez, M. A. C. Rossi, and S. Maniscalco, npj Quantum Inf. **6**, 1 (2020).
- [R28] B.-X. Wang, M.-J. Tao, Q. Ai, T. Xin, N. Lambert, D. Ruan, Y.-C. Cheng, F. Nori, F.-G. Deng, and G.-L. Long, npj Quantum Inf. **4**, 52 (2018).
- [R29] R. Croce and H. van Amerongen, Science **369**, eaay2058 (2020).
- [R30] S. Rafiq and G. D. Scholes, J. Am. Chem. Soc. **141**, 708–722 (2019).
- [R31] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Springer, Berlin 1987.

- [R32] K. M. R. Audenaert and S. Scheel, *New J. Phys.* **10**, 023011 (2008).
- [R33] K. Życzkowski, P. Horodecki, M. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Rev. A* **65**, 012101 (2001).
- [R34] M. Gregoratti and R. F. Werner, *J. Mod. Opt.* **50**, 915 (2003).
- [R35] C. King and M. B. Ruskai, *IEEE Trans. Info. Theory* **47**, 192–209 (2001).
- [R36] L. J. Landau and R. F. Streater, *Linear Algebra Appl.* **193**, 107–127 (1993).
- [R37] A. Fujiwara and P. Algoet, *Phys. Rev. A* **59**, 3290 (1999).
- [R38] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [R39] C. H. Bennett, C. A. Fuchs, and J. A. Smolin, in: O. Hirota, A. S. Holevo, C. M. Caves (eds), *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, Springer, Boston, MA 79–88 (1997).
- [R40] D. Chruściński, A. Rivas, and E. Stormer, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 080407 (2018).
- [R41] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 021002 (2016).
- [R42] J. Cresser and C. Facer, *Opt. Commun.* **283**, 773–780 (2010).
- [R43] S. Daffer, K. Wódkiewicz, J. D. Cresser, and J. K. McIver, *Phys. Rev. A* **70**, 010304(R) (2004).
- [R44] T. Rybar, S. N. Filippov, M. Ziman, and V. Buzek, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45**, 154006 (2012).
- [R45] D. Petz and H. Ohno, *Acta Math. Hungar.* **124**, 165 (2009).
- [R46] D. Chruściński and F. A. Wudarski, *Phys. Rev. A* **91**, 012104 (2015).
- [R47] S. Bandyopadhyay, P. Boykin, V. Roychowdhury, and F. Vatan, *Algorithmica* **34**, 512 (2002).
- [R48] M. Nathanson and M. B. Ruskai, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 8171 (2007).
- [R49] J. U. Rehman and H. Shin, *Simultaneous Communication and Parameter Estimation of Pauli Channels*, in *ICC 2022 - IEEE International Conference on Communications*, 648–653, Seoul, Republic of Korea 2022.
- [R50] J. U. Rehman and H. Shin, *Quantum* **5**, 490 (2021).
- [R51] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **106**, 012438 (2022).
- [R52] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **105**, 032422 (2022).
- [R53] A. Smirne, J. Kołodyński, S. F. Huelga, and R. Demkowicz-Dobrzański, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 120801 (2016).
- [R54] S. N. Filippov, A. N. Glinov, and L. Leppäjärvi, *Lobachevskii J. Math.* **41**, 617–630 (2020).
- [R55] J. Lankinen, H. Lyyra, B. Sokolov, J. Teittinen, B. Ziaei, and S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **93**, 052103 (2016).
- [R56] J. F. Haase, A. Smirne, J. Kołodyński, R. Demkowicz-Dobrzański, and S. F. Huelga, *New J. Phys.* **20**, 053009 (2018).
- [R57] J. Bouda, M. Koniorczyk, and A. Varga, *Eur. Phys. J. D* **53**, 365–372 (2009).
- [R58] A. Harrow, P. Hayden, and D. Leung, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187901 (2004).
- [R59] B. Collins and I. Nechita, *Comm. Math. Phys.* **279**, 345–370 (2010).
- [R60] B. Collins and I. Nechita, *Adv. Math.* **226**, 1181–1201 (2011).

- [R61] B. Collins and I. Nechita, *Ann. Appl. Probab.* **21**, 1136–1179 (2011).
- [R62] M. Fukuda and I. Nechita, *IEEE Trans. Inf. Theory* **64**, 17472877 (2018).
- [R63] M.-D. Choi, *Linear Algebra Appl.* **10**, 285–290 (1975).
- [R64] A. Jamiołkowski, *Rep. Math. Phys.* **3**, 275–278 (1972).
- [R65] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **99**, 022321 (2019).
- [R66] M. J. W. Hall, J. D. Cresser, L. Li, and E. Andersson, *Phys. Rev. A* **89**, 042120 (2014).
- [R67] N. Megier, D. Chruściński, J. Piilo, and W. T. Strunz, *Sci. Rep.* **7**, 6379 (2017).
- [R68] H.-P. Breuer, G. Amato, and B. Vacchini, *New J. Phys.* **20**, 043007 (2018).
- [R69] F. A. Wudarski and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **93**, 042120 (2016).
- [R70] S. A. Uriri, F. Wudarski, I. Sinayskiy, F. Petruccione, and M. S. Tame, *Phys. Rev. A* **101**, 052107 (2020).
- [R71] O. Siltanen, T. Kuusela, and J. Piilo, *Phys. Rev. A* **103**, 032223 (2021).
- [R72] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **101**, 062304 (2020).
- [R73] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Lett. A* **384**, 126907 (2020).
- [R74] B. Bylicka, M. Johansson, and A. Acin, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 120501 (2017).
- [R75] B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* **55**, 2290–2303 (1996).
- [R76] A. J. van Wonderen and K. Lendi, *J. Stat. Phys.* **100**, 633–658 (2000).
- [R77] E. Andersson, J. D. Cresser, and M. J. W. Hall, *J. Mod. Opt.* **54**, 1695 (2007).
- [R78] S. Chakraborty and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **99**, 042105 (2019).
- [R79] D. A. Lidar, *Adv. Chem. Phys.* **154**, 295–354 (2014).
- [R80] J. Roffe, *Contemp. Phys.* **60**, 226–245 (2019).
- [R81] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2594 (1998).
- [R82] E. Knill, R. Laflamme, and L. Viola, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2525 (2000).
- [R83] L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2417 (1999).
- [R84] F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. I. Cirac, *Nat. Phys.* **5**, 633–636 (2009).
- [R85] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **59**, 2468–2475 (1999).
- [R86] J. Marshall, L. C. Venuti, and P. Zanardi, *Phys. Rev. A* **94**, 052339 (2016).
- [R87] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **507**, 219–230 (2018).
- [R88] J. Marshall, L. C. Venuti, and P. Zanardi, *Phys. Rev. A* **96**, 052113 (2017).
- [R89] A. Shabani and D. A. Lidar, *Phys. Rev. A* **71**, 020101(R) (2005).
- [R90] D. Chruściński and A. Kossakowski, *Phys. Rev. A* **95**, 042131 (2017).
- [R91] A. S. Holevo, *IEEE Trans. Info. Theor.* **44**, 269–273 (1998).
- [R92] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, *Phys. Rev. A* **56**, 131–138 (1997).
- [R93] M. B. Hastings, *Nat. Phys.* **5**, 255–257 (2009).

- [R94] J. ur Rehman, Y. Jeong, J. S. Kim, and H. Shin, *Sci. Rep.* **8**, 17457 (2018).
- [R95] J. ur Rehman, Y. Jeong, and H. Shin, *Phys. Rev. A* **99**, 042312 (2019).
- [R96] M. Raginsky, *Phys. Lett. A* **290**, 11–18 (2001).
- [R97] K. Życzkowski and H.-J. Sommers, *Phys. Rev. A* **71**, 032313 (2005).
- [R98] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton 2006.
- [R99] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [R100] K. Audenaert, F. Verstraete, and B. D. Moor, *Phys. Rev. A* **64**, 052304 (2001).
- [R101] H. Li-Zhen and F. Mao-Fa, *Chinese Phys.* **16**, 1843 (2007).
- [R102] H. Li-Zhen and F. Mao-Fa, *Chinese Phys. Lett.* **24**, 2482 (2007).
- [R103] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 057901 (2002).
- [R104] A. Kalev and G. Gour, *New J. Phys.* **16**, 053038 (2014).
- [R105] D. Chruściński, G. Sarbicki, and F. A. Wudarski, *Phys. Rev. A* **97(12)**, 032318 (2018).
- [R106] E. Prugovečki, *Int. J. Theor. Phys.* **16**, 321–331 (1977).
- [R107] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, and C. M. Caves, *J. Math. Phys.* **45**, 2171 (2004).
- [R108] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **46**, 570 (1960).
- [R109] M. B. Ruskai, S. Szarek, and E. Werner, *Linear Algebra Appl.* **347(1-3)**, 159–187 (2002).
- [R110] R. B. A. Adamson and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030406 (2010).
- [R111] A. J. Scott, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 13507 (2006).
- [R112] J. M. Renes, *Phys. Rev. A* **70**, 052314 (2004).
- [R113] N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 127902 (2002).
- [R114] C. Spengler, M. Huber, S. Brierley, T. Adaktylos, and B. C. Hiesmayr, *Phys. Rev. A* **86**, 022311 (2012).
- [R115] J. Shang, A. Asadian, H. Zhu, and O. Gühne, *Phys. Rev. A* **98**, 022309 (2018).
- [R116] W. K. Wootters, *Found. Phys.* **36**, 112–126 (2006).
- [R117] A. E. Rastegin, *Eur. Phys. J. D* **67**, 269 (2013).
- [R118] R. Beneduci, T. Bullock, P. Busch, C. Carmeli, T. Heinosaari, and A. Toigo, *Phys. Rev. A* **88**, 032312 (2013).
- [R119] A. Tavakoli, M. Farkas, D. Rosset, J.-D. Bancal, and J. Kaniewski, *Sci. Adv.* **7**, eabc3847 (2021).
- [R120] A. Kalev and G. Gour, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 335302 (2014).
- [R121] B. Chen, T. Ma, and S.-M. Fei, *Phys. Rev. A* **89**, 064302 (2014).
- [R122] B. Chen, T. Li, and S.-M. Fei, *Quant. Inf. Proc.* **14**, 2281–2290 (2015).
- [R123] L. Tang and F. Wu, *Phys. Scr.* **98**, 065114 (2023).
- [R124] L. Tang, *Quantum Inf. Process.* **22**, 57 (2023).
- [R125] L. Lai and S. Luo, *Commun. Theor. Phys.* **75**, 065101 (2022).

- [R126] L. Tang and F. Wu, *Improved bounds on some entanglement criteria in bipartite quantum systems* (2023), doi: 10.1016/j.rinp.2023.106663.
- [R127] F. Huang, L. Tang, and M.-Q. Bai, *Int. J. Theor. Phys.* **62**, 126 (2023).
- [R128] L. Tang and F. Wu, *Quantum Inf. Process.* **22**, 65 (2023).
- [R129] M. Schumacher and G. Alber, *Bipartite entanglement detection by local generalized measurements* (2023), arXiv:2305.14226 [quant-ph].
- [R130] M. Schumacher and G. Alber, *Typical bipartite steerability and generalized local quantum measurements* (2023), arXiv:2305.17985 [quant-ph].
- [R131] F. Bouchard, K. Heshami, D. England, R. Fickler, R. W. Boyd, B.-G. Englert, L. L. Sánchez-Soto, and E. Karimi, *Quantum* **2**, 111 (2018).
- [R132] M. A. Graydon and D. M. Appleby, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49**, 085301 (2016).
- [R133] P. Horodecki, Ł. Rudnicki, and K. Życzkowski, *PRX Quantum* **3**, 010101 (2022).
- [R134] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [R135] L. Masanes, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 150501 (2006).
- [R136] J. Bae, D. Chruściński, and M. Piani, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 140404 (2019).
- [R137] L. Gurvits, *J. Comput. Syst. Sci.* **69**, 448–484 (2004).
- [R138] P. Horodecki, *Phys. Lett. A* **232**, 333–339 (1997).
- [R139] B. M. Terhal, *Linear Algebra Appl.* **323**, 61–73 (2001).
- [R140] J. Bae, A. Bera, D. Chruściński, B. C. Hiesmayr, and D. McNulty, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 505303 (2022).
- [R141] B. C. Hiesmayr, D. McNulty, S. Baek, S. S. Roy, J. Bae, and D. Chruściński, *New J. Phys.* **23**, 093018 (2021).
- [R142] M. Salehi, S. J. Akhtarshenas, M. Sarbishaei, and H. Jaghouri, *Quantum Inf. Process.* **20**, 401 (2021).
- [R143] T. Li, L.-M. Lai, D.-F. Liang, S.-M. Fei, and Z.-X. Wang, *Int. J. Theor. Phys.* **59**, 3549–3557 (2020).
- [R144] S. Yu and N.-I. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 150504 (2005).
- [R145] S. Chakraborty, *Phys. Rev. A* **97**, 032130 (2018).
- [R146] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [R147] B. M. Terhal and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* **61**, 040301(R) (2000).
- [R148] B. M. Terhal and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* **61**, 040301(R) (2000).
- [R149] J. Kiukas, C. Budroni, R. Uola, and J.-P. Pellonpää, *Phys. Rev. A* **96**, 042331 (2017).
- [R150] P. Sohr, V. Link, K. Luoma, and W. T. Strunz, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 035301 (2018).
- [R151] A. S. Holevo, *Probl. Inform. Transm.* **43**, 1–11 (2007).
- [R152] F. Caruso, V. Giovannetti, and A. S. Holevo, *New J. Phys.* **8**, 310 (2006).
- [R153] L. Mancino, M. G. Genoni, M. Barbieri, and M. Paternostro, *Phys. Rev. Research* **2**, 033498 (2020).

- [R154] Y. S. Teo, K. Park, S. Shin¹, H. Jeong¹, and P. Marek, *New J. Phys.* **23**, 063024 (2021).
- [R155] A. Lovas and A. Andai, *Rev. Math. Phys.* **30**, 1850019 (2018).
- [R156] S. J. Szarek, E. Werner, and K. Życzkowski, *J. Math. Phys.* **49**, 032113 (2008).
- [R157] G. Narang and Arvind, *Phys. Rev. A* **75**, 032305 (2007).
- [R158] E. Jung, M.-R. Hwang, Y. H. Ju, D. K. Park, H. Kim, M.-S. Kim, and J.-W. Son, *J. Phys. A: Math. and Theor.* **41**, 045306 (2008).
- [R159] S. N. Filippov, J. Piilo, S. Maniscalco, and M. Ziman, *Phys. Rev. A* **96**, 032111 (2017).
- [R160] Z. Puchała, Ł. Rudnicki, and K. Życzkowski, *Phys. Lett. A* **383**, 2376–2381 (2019).
- [R161] A. Monras and F. Illuminati, *Phys. Rev. A* **81**, 062326 (2010).
- [R162] H. Q. Zhou, T. Gao, and F. L. Yan, *EPL* **136**, 20002 (2021).
- [R163] F. Shahbeigi, D. Amaro-Alcalá, Z. Puchała, and K. Życzkowski, *J. Math. Phys.* **62**, 072105 (2021).
- [R164] K. Sadri, F. Shahbeigi, Z. Puchała, and K. Życzkowski, *Open Sys. Inf. Dyn.* **29**, 2250002 (2022).
- [R165] R. A. Fisher, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22**, 700 (1925).
- [R166] D. Bures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **135**, 199–212 (1969).
- [R167] A. Uhlmann, *Rep. Math. Phys.* **9**, 273–279 (1976).
- [R168] M. B. Hastings, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 095305 (2012).
- [R169] M. Fukuda, C. King, and D. Moser, *Commun. Math. Phys.* **296**, 111–143 (2010).
- [R170] S. Utagi, V. N. Rao, R. Srikanth, and S. Banerjee, *Phys. Rev. A* **103**, 042610 (2021).
- [R171] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Noninvertibility and non-Markovianity of quantum dynamical maps* (2023), arXiv:2306.12773 [quant-ph].
- [R172] A. A. Budini and J. P. Garrahan, *Phys. Rev. A* **104**, 032206 (2021).
- [R173] U. Shrikant, R. Srikanth, and S. Banerjee, *On the eternal non-Markovianity of non-unital quantum channels* (2022), arXiv:2203.10625 [quant-ph].
- [R174] A. Das, A. Bera, S. Chakraborty, and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **104**, 042202 (2021).
- [R175] A. Dąbrowska, D. Chruściński, S. Chakraborty, and G. Sarbicki, *New J. Phys.* **23**, 123019 (2021).
- [R176] D. Chruściński, *Phys. Rep.* **992**, 1–85 (2022).
- [R177] G. G. Amosov, *Quantum Inf. Process.* **19**, 401 (2020).
- [R178] M.-X. Li and Z.-J. Zheng, *EPJ Plus* **137**, 444 (2022).
- [R179] Y. S. Teo, S. Shin, H. Kwon, S.-H. Lee, and H. Jeong, *Phys. Rev. A* **107**, 022608 (2023).
- [R180] J. ur Rehman H. Shin, *Quantum* **5**, 490 (2021).
- [R181] D. Lee, J. Lee, S. Hong, H.-T. Lim, Y.-W. Cho, S.-W. Han, H. Shin, J. ur Rehman, and Y.-S. Kim, *Optica* **9**, 88–95 (2022).
- [R182] S. Roncallo, L. Maccone, and C. Macchiavello, *Phys. Rev. A* **107**, 022419 (2023).
- [R183] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, *Phys. Rev. A* **71**, 042327 (2005).
- [R184] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, *Phys. Rev. A* **72**, 062311 (2005).
- [R185] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, 363–370 (2007).

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Staż naukowy w Drezdeńskim Uniwersytecie Technicznym w Niemczech (grupa prof. dr. hab. Waltera T. Strunza), od 11.2018 r. do 04.2019 r. (6 miesięcy). Rezultatem stażu jest publikacja w Physical Review A i kontynuowana współpraca naukowa.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

6.1 Dydaktyka

Zajęcia dydaktyczne prowadzone na WFAiIS UMK:

- Analiza matematyczna (ćwiczenia) – 400 godzin;
- Matematyka dla nauk technicznych (ćwiczenia) – 180 godzin;
- Metody matematyczne fizyki (ćwiczenia) – 70 godzin;
- Wprowadzenie do studiowania (laboratorium) – 64 godziny;
- Wstęp do kwantowych układów otwartych (wykład w języku angielskim) – 60 godzin;
- Algebra 2 (ćwiczenia) – 60 godzin;
- Podstawy fizyki (wykład i ćwiczenia, fragmenty) – 8 godzin;
- Elektrodynamika klasyczna (ćwiczenia, fragmenty) – 4 godziny.

Przygotowanie materiałów dydaktycznych w formie skryptu do ćwiczeń z przedmiotu Advanced mathematical methods (45 godzin, język angielski) dedykowanego anglojęzycznemu kierunkowi studiów Physics and Astronomy na WFAiIS UMK.

6.2 Organizacja

- Członek komitetu organizacyjnego międzynarodowej konferencji Sympozjum Fizyki Matematycznej w roku 2023 (edycja 54.).
- Członek komisji oceniającej prace konkursowe w ogólnopolskim Konkursie Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST) w latach 2021–2023 (edycje XII–XIII).
- Pomoc w organizacji międzynarodowej konferencji Sympozjum Fizyki Matematycznej w latach 2015–2022 r. (edycje 45.–52.).
- Pomoc w organizacji ogólnopolskiego Konkursu Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST) w latach 2010–2021 (edycje I–XI).

7 Dodatkowe informacje

7.1 Nagrody i wyróżnienia

- 2023 r. – Laureatka 8. edycji konkursu Nagrody Oddziału PAN w Gdańsku dla młodych naukowców w zakresie nauk ścisłych i o Ziemi.
- 2022 r. – Laureatka Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców.
- 2022 r. – Wyróżnienie w 7. edycji konkursu Nagrody Oddziału PAN w Gdańsku dla młodych naukowców w zakresie nauk ścisłych i o Ziemi.
- 2021 r. – Wyróżnienie indywidualne J. M. Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za pracę naukową w roku 2020.
- 2021 r. – Laureatka Programu START 2021 Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.
- 2020 - 2022 r. – ekspert udzielający wsparcia merytorycznego w procesie przygotowania wniosku grantowego z funduszy zewnętrznych w ramach programu Inicjatywa Doskonałości – Ekspert
- 2020 r. – Wyróżnienie za pracę doktorską pt. *Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels* w ramach ogólnopolskiego konkursu Srebrna Nagroda KCIK odbywającego się pod patronatem J. M. Rektora Uniwersytetu Gdańskiego.
- 2016 r. – Kierownik grantu "Na dobry początek" pt. *Geometryczne sformułowanie teorii nieoddziałujących pól kwantowych* (5 000 PLN), Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, czas realizacji: 12 miesięcy.

7.2 Referaty wygłoszone w macierzystym ośrodku naukowym

- 2023 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation.*
- 2022 r. – Seminarium Uniwersyteckiego Centrum Doskonałości *Dynamika, analiza matematyczna i sztuczna inteligencja*
tytuł referatu: *Enhancing properties of quantum dynamical maps with memory kernels.*
- 2022 r. – Prezentacja Katedry Fizyki Matematycznej na Dzień Otwarty, Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
tytuł referatu: *Otwarte układy kwantowe.*
- 2022 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps.*
- 2021 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *All classes of informationally complete symmetric measurements infinite dimensions.*
- 2021 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels.*
- 2020 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Markovian semigroup from mixing non-invertible dynamical maps.*

- 2020 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Geometry of Pauli and generalized Pauli channels.*
- 2019 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Unitarily covariant quantum channels in the evolution of open quantum systems.*

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

- 2017 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Coarse graining a non-Markovian collisional model.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Wigner function of a qubit.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Quasiprobability representation of quantum mechanics with minimal negativity.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Evolution equation for geometric quantum correlation measures.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Exploring complete positivity in hierarchy equations of motion.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *Equivalence between contextuality and negativity of the Wigner function for qudits.*
- 2016 r. – Seminarium grupy badawczej
tytuł referatu: *The Jordan-Lie-Banach algebra of functions on a Kähler manifold.*
- 2016 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *The Kähler functions approach to the problem of qubit decoherence.*
- 2015 r. – Seminarium Katedry Fizyki Matematycznej
tytuł referatu: *Geometrical approach to quantum states.*

.....
(podpis wnioskodawcy)

Summary of Professional Accomplishments

1 Name: Katarzyna Barbara Siudzińska

2 Diplomas, degrees conferred in specific areas of science or arts, including the name of the institution which conferred the degree, year of degree conferment, title of the PhD dissertation

- 2019 – Doctor’s degree in physics
Nicolaus Copernicus University in Toruń
PhD thesis title: *Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels*
PhD thesis advisor: Prof. Dariusz Chruściński
- 2016 – Master’s degree in English studies, specialization: translation studies
Nicolaus Copernicus University in Toruń
MA thesis title: *The analysis of self-translatorial errors based on selected scientific publications in mathematical physics*
MA thesis advisor: Dr. Monika Linke-Ratuszny
- 2014 – Master’s degree in physics, specialization: theoretical physics
Nicolaus Copernicus University in Toruń
MSc thesis title: *Geometric approach to classical and quantum mechanics*
MSc thesis advisor: Prof. Dariusz Chruściński
- 2012 r. – Bachelor’s degree in physics, specialization: theoretical physics
Nicolaus Copernicus University in Toruń
BSc thesis title: *Exact vacuum solutions of Einstein’s field equations for point masses*
BSc thesis advisor: Prof. Dariusz Chruściński

3 Information on employment in research institutes or faculties/departments or school of arts

- since October 2021: Assistant Professor in the Department of Mathematical Physics at the Institute of Physics, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń
- October 2019 – September 2021: Assistant in the Department of Mathematical Physics at the Institute of Physics, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń

4 Description of the achievements, set out in art. 219 para 1 point 2 of the Act

4.1 Achievement title

Analysis and applications of the Pauli channels and their generalizations

4.2 Research objectives, results and description of the publications based on them, influence on future research

4.2.1 Introduction, research goals, and motivation

The habilitation achievement presented in this application consists in an analysis and characterization of quantum Pauli channels and their generalizations. This includes significant applications in open quantum systems, quantum communication, and quantum information processing. In the introductory section, I give brief scientific background and provide definitions important for the main part, where I describe my achievement in more details. Everything is summarized in the conclusions section, which also lists open problems that arose during my research, as well as its current and possible future impact on the field.

Introduction and motivation

For quantum communication purposes, it is crucial to understand how to reliably transmit, manipulate, and preserve quantum information sent through a noisy quantum channel. However, in practice, there exist no ideal (noiseless) communication channels, and therefore some information is lost during transmit. All realistic physical systems interact with the external environment, causing correlations to appear, which forces us to treat quantum systems not as isolated but open. This is the reason why the evolution of subsystems that constitute a quantum computer is non-unitary, and hence irreversible. The loss of quantum coherence, also known as decoherence, is unavoidable, as quantum systems can interact even with the vacuum state, where no external particles or fields are present. Due to scientific and technological advancement, logic gates and other electronic devices are approaching atomic scales. Therefore, it becomes increasingly important to develop satisfactory data transfer methods.

In quantum information theory, a quantum channel is an operation that characterizes a quantum process [R1, R2]. Changes in quantum states can be made either by discrete jumps or time-continuous evolution. Quantum maps are widely used in quantum information processing and communication (QIPC). This is an interdisciplinary field that connects physics, mathematics, computer science, and material engineering, whose development is an important European research strategy that can revolutionize both science and technology [R3, R4]. Its computational methods are used in the construction of quantum computers, whose computational power is out of reach for classical computers. Connections between the computers are realized through quantum communication with the use of entangled states, quantum teleportation, and quantum cryptography, which makes it possible to obtain completely safe protocols and encryption systems [R5, R6, R7].

Mathematically, a quantum map is a linear mapping $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ acting between two Banach spaces $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ of bounded operators on the respective Hilbert space \mathcal{H}_k . Now, Φ is trace preserving if $\text{Tr} \Phi[X] = \text{Tr} X$ for any $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$. Moreover, Φ is a positive map if $\Phi[X] \geq 0$ for all $X \geq 0$. The complete positivity property requires that Φ satisfies the condition $(\mathbb{1} \otimes \Phi)[X] \geq 0$ for arbitrary positive $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$, which is stronger than positivity. Completely positive, trace-preserving maps, also known as quantum channels, are used to describe the evolution $\rho \mapsto \rho' = \Phi[\rho]$ of quantum states represented by density operators

ρ . Any quantum channel can be written in the Kraus representation [R8]

$$\Phi[\rho] = \sum_{k=0}^{d^2-1} M_k \rho M_k^\dagger, \quad (1)$$

where M_k satisfying $\sum_{k=0}^{d^2-1} M_k^\dagger M_k = \mathbb{I}_d$ are the Kraus operators. Notably, such Φ 's cover all admissible quantum operations, from quantum measurements to time-continuous evolution.

Quantum channels find applications in the theory of open quantum systems, where their time-parameterized families $\{\Phi(t); t \geq 0, \Phi(0) = \mathbb{1}\}$ (dynamical maps) describe evolution of physical systems interacting with an external environment [R9, R10]. It is assumed that there always exists a closed (unitarily evolving) composite system with the underlying Hilbert space $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$, where \mathcal{H} and \mathcal{H}_E are the Hilbert spaces of the physical system and the environment, respectively. The evolved state of the system $\rho(t)$ can be recovered through the Stinespring dilation [R11] by taking the partial trace Tr_E over the environment,

$$\rho(t) = \Phi(t)[\rho] = \text{Tr}_E [U(t)(\rho \otimes \rho_E)U^\dagger(t)]. \quad (2)$$

In the above formula, $U(t)$ is a unitary operator, and ρ_E denotes the initial state of the environment. Examples of open quantum systems include multi-body systems, like atoms and molecules, that interact with light or with other particles. They have applications in many branches of physics, including quantum optics, solid state physics, quantum biology, and chemical physics [R12].

Alternatively, open quantum systems dynamics is provided via the master equations. In the simplest scenario, it is assumed that the coupling between the system and the environment is weak and that time scales between consecutive interactions are relatively large. Then, the evolution is given by the Markovian semigroup master equation $\dot{\Phi}(t) = \mathcal{L}\Phi(t)$, where the Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) generator [R13, R14]

$$\mathcal{L}[\rho] = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{d} \sum_{\alpha=1}^{d^2-1} \gamma_\alpha \left(V_\alpha \rho V_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}[V_\alpha^\dagger V_\alpha, \rho]_+ \right), \quad (3)$$

with the noise operators V_α , decoherence rates $\gamma_\alpha \geq 0$, and the effective Hamiltonian H . However, the more complex the system, the greater the likelihood of losing information from the system to the environment. This process is called *decoherence*. If the interaction between a physical system and its environment is strong or long enough, then the state of the system starts to depend on the history of its earlier states. Memory effects begin to play an important role, making it necessary to consider models of evolution beyond the Markov regime [R15, R16, R17, R18]. One way to account for the strong influence of the environmental effects is to describe the evolution using the master equations with time-local generators $\mathcal{L}(t)$. These generators have the GKSL form as in eq. (3) but with time-dependent $H(t)$, $V_\alpha(t)$, and $\gamma_\alpha(t)$. The main difference is that the decoherence rates no longer have to be positive to describe a valid physical evolution. Another option to include non-Markovian effects is to consider the Nakajima-Zwanzig master equations [R19, R20] $\dot{\Phi}(t) = \int_0^t K(t-\tau)\Phi(\tau) d\tau$ with non-local memory kernels $K(t)$. Being integro-differential equations, they are more difficult to solve or analyze.

In my works, I use the definition of quantum Markovianity that is related to divisibility of dynamical maps [R21, R22]. A dynamical map $\Phi(t)$ is divisible if for any $t \geq s \geq 0$ there exists a propagator $V(t, s)$ such that $\Phi(t) = V(t, s)\Phi(s)$. Now, a positive $V(t, s)$ defines a P-divisible map. Analogically, CP-divisible $\Phi(t)$ corresponds to a completely positive propagator and describes a Markovian evolution [R21, R23]. For invertible dynamical maps, $V(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ is always well defined, and the Markovianity of $\Phi(t)$ is equivalent to the positivity of the decoherence rates $\gamma_\alpha(t)$ of its time-local generator $\mathcal{L}(t)$. Otherwise, the evolution is non-Markovian, where the degree of non-Markovianity can be further distinguished via a hierarchy of divisible maps [R23]. Open quantum systems with dissipative dynamics are simulated using Noisy

Intermediate Scale Quantum (NISQ) devices [R24, R25, R26]. Examples include decoherence channels on superconducting quantum computers [R27], photosynthetic systems with dephasing noises [R28], photosynthetic light harvesting [R29], and electron transfer in organic materials [R30].

My work on quantum channels and open quantum systems began during PhD studies. Below, I recall the definitions and properties of important classes of channels. These are crucial for understanding the following descriptions of publications from the habilitation achievement.

Pauli channels

The theory of open quantum systems describes physical systems that interact with an external system called the *environment*. Therefore, their evolution is no longer unitary. However, if a unitary evolution is disrupted by errors that are classical in nature, the open system dynamics is provided by mixed unitary channels [R1, R31], also known in the literature under the names *random unitary channels* [R32] or *channels of the random external field type* [R31, R33]. An important feature of mixed unitary channels is that their noise can be corrected using classical information obtained from measurements on the environment [R34].

The most general bistochastic evolution of a qubit is given by a completely positive, trace-preserving, unital map $\Phi = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}$ such that \mathcal{U}, \mathcal{V} are unitary channels and Λ is the Pauli channel [R35, R36]. The Kraus representation of the Pauli channel reads

$$\Lambda[\rho] = \sum_{\alpha=0}^3 p_{\alpha} \sigma_{\alpha} \rho \sigma_{\alpha}, \quad (4)$$

where σ_{α} denote the Pauli matrices and p_{α} is a probability distribution. Recall, however, that the Kraus representation of a channel is not unique, and hence it can be preferred to define the Pauli channel with its (unique) eigenvalue equations $\Lambda[\sigma_{\alpha}] = \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha}$, where $\lambda_0 = 1$ and $\lambda_k = 2(p_0 + p_k)$, $k = 1, 2, 3$. Complete positivity of Λ is then guaranteed by the Fujiwara-Algoet conditions [R37, R35]

$$-1 \leq \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \leq 1 + 2 \min_{\alpha} \lambda_{\alpha}. \quad (5)$$

The family of Pauli channels includes many important cases, like phase-damping, depolarizing, and two-Pauli maps [R38, R39]. Unital qubit maps are among the most basic and commonly considered channels in quantum information theory.

The Pauli dynamical maps $\Lambda(t)$ are usually considered as solutions to the master equations with time-local generators $\mathcal{L}(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \gamma_{\alpha}(t) \mathcal{L}_{\alpha}$ or memory kernels $K(t) = \sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha}(t) \mathcal{L}_{\alpha}$, where

$$\mathcal{L}_{\alpha}[\rho] = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha} \rho \sigma_{\alpha} - \rho). \quad (6)$$

Besides being of the same form, $\mathcal{L}(t)$ and $K(t)$ share an additional property. Namely, their eigenvectors are again the Pauli matrices, operators constant in time. Therefore, to solve the master equations, it is enough to work on time-dependent eigenvalues, which simplifies calculations significantly. Another consequence is that divisibility properties of the Pauli dynamical maps are well characterized. An invertible $\Lambda(t)$ is CP-divisible if and only if $\gamma_{\alpha}(t) \geq 0$, whereas it is only P-divisible if and only if $\gamma_{\alpha}(t) + \gamma_{\beta}(t) \geq 0$ for all $\alpha \neq \beta$. Therefore, the non-Markovianity degree of the corresponding evolution is fully encoded into the decoherence rates.

An increasing attention is being given to non-invertible Pauli dynamical maps. For such maps, the propagator is not uniquely defined, and the associated time-local generator has decoherence rates exploding to infinity [R40]. Examples include two-level systems in dissipative environment [R41], driven by phase noisy lasers [R42, R43], and quantum NOT gate implementations [R44].

Generalized Pauli channels

There are multiple ways to introduce generalizations of the Pauli channels for qudit evolution [R45, R46], [P11], depending on the properties one wishes to carry over. An important characteristic of the Pauli matrices σ_α is that their eigenvectors $\{\psi_0^{(\alpha)}, \psi_1^{(\alpha)}\}$ form three mutually unbiased bases (MUBs). By definition, two orthonormal bases in $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$ are mutually unbiased if and only if

$$\left| \langle \psi_k^{(\alpha)} | \psi_l^{(\beta)} \rangle \right|^2 = \frac{1}{d}, \quad \alpha \neq \beta, \quad k = 0, \dots, d-1. \quad (7)$$

Assuming that the Hilbert space admits the maximal number of $d+1$ MUBs [R47], which is known to hold in prime and power prime dimensions, one defines $d^2 - 1$ unitary operators

$$U_\alpha^k = \sum_{\ell=0}^{d-1} \omega^{k\ell} P_\ell^{(\alpha)}, \quad \omega = e^{2\pi i/d}, \quad (8)$$

where $P_k^{(\alpha)} = |\psi_k^{(\alpha)}\rangle\langle\psi_k^{(\alpha)}|$ are rank-1 projectors onto MUB vectors. These operators are then used to construct Nathanson and Ruskai's generalized Pauli channels [R48]

$$\Lambda[\rho] = p_0\rho + \frac{1}{d-1} \sum_{\alpha=1}^{d+1} p_\alpha \sum_{k=1}^{d-1} U_\alpha^k \rho U_\alpha^{k\dagger}, \quad (9)$$

where p_α denote a probability distribution. Alternatively, the generalized Pauli channels can be rewritten in the form

$$\Lambda = \pi_0 \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^{d+1} \pi_\alpha \Phi_\alpha \quad (10)$$

using $d+1$ quantum-classical channels

$$\Phi_\alpha[\rho] = \sum_{k=0}^{d-1} P_k^{(\alpha)} \rho P_k^{(\alpha)}. \quad (11)$$

The Pauli channels are reproduced for $d=2$. Apart from the MUB property, what carries over to $d > 2$ is Λ being both mixed unitary and Hermitian. Moreover, the eigenvalue equations

$$\Lambda[U_\alpha^k] = \lambda_\alpha U_\alpha^k, \quad k = 1, \dots, d-1, \quad \Lambda[\mathbb{1}_d] = \mathbb{1}_d \quad (12)$$

show that the generalized Pauli channels are unital maps with real and $(d-1)$ -times degenerated eigenvalues

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{d-1} [d(p_0 + p_\alpha) - 1]. \quad (13)$$

The eigenvectors U_α^k are, just like for the Pauli channels, unitary and constant in time. The complete positivity of Λ is fully controlled by its eigenvalues. The necessary and sufficient conditions are provided by the generalized Fujiwara-Algoet conditions [R37, R48, R38]

$$-\frac{1}{d-1} \leq \sum_{\beta=1}^{d+1} \lambda_\beta \leq 1 + d \min_{\beta>0} \lambda_\beta. \quad (14)$$

The qudit dynamics provided by the generalized Pauli dynamical maps $\Lambda(t)$ obeys the master equations with time-local generators $\mathcal{L}(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} \gamma_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$ or memory kernels $K(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} k_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha$, where

$$\mathcal{L}_\alpha[\rho] = \frac{1}{d} \left[\sum_{k=1}^{d-1} U_\alpha^k \rho U_\alpha^{k\dagger} - (d-1)\rho \right]. \quad (15)$$

Analogically to the qubit scenario, $\Lambda(t)$, $\mathcal{L}(t)$, and $K(t)$ have common (time-independent) eigenvectors U_α^k . Hence, differential and integro-differential evolution equations on operators can once again be reduced to evolution equations on time-dependent eigenvalues. Developing the mathematical formalism for the evolution of $\Lambda(t)$ with memory was a topic of my PhD [P7, P8]. Due to the lack of general construction methods for positive maps, there are only known P-divisibility conditions that are either sufficient or necessary [P10]. The generalized Pauli channels and their dynamics are analyzed in terms of non-Markovianity [P7, P8, P10], channel fidelity [P12, P13], parameter estimation [R49, R50], and invertibility properties [R51, R52].

Phase-covariant channels

The Pauli channels do not describe the most general evolution of a qubit. Beyond the unital maps, there exists a large class of quantum channels that are non-unital – that is, their stationary state is no longer the maximally mixed state. An important class of non-unital qubit maps consists in the phase-covariant maps Φ , which satisfy the covariance property

$$\forall_{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \phi \in \mathbb{R}} \quad \Phi[e^{-i\sigma_3\phi} X e^{i\sigma_3\phi}] = e^{-i\sigma_3\phi} \Phi[X] e^{i\sigma_3\phi}. \quad (16)$$

In other words, the evolution provided by Φ commutes with the unitary evolution $\mathcal{U}(\theta)[\rho] = \exp(-i\sigma_3\theta)\rho \exp(i\sigma_3\theta)$ that describes rotations on the Bloch ball. The class of phase-covariant channels covers any dynamics that arises from a composition of energy absorption, energy emission, and pure dephasing [R53, R54]. They were first introduced as solutions to phenomenological master equations to characterize thermalization and dephasing processes beyond the Markovian approximation [R55]. A microscopic derivation was later presented for a weakly-coupled spin-boson model under the secular approximation [R56].

The most general phase-covariant channel is represented by $\Phi = \Lambda\mathcal{U}(\theta)$, where [R54, R53]

$$\Lambda[\rho] = \frac{1}{2} [(\mathbb{I} + \lambda_*\sigma_3) \text{Tr} \rho + \lambda_1\sigma_1 \text{Tr}(\rho\sigma_1) + \lambda_2\sigma_2 \text{Tr}(\rho\sigma_2) + \lambda_3\sigma_3 \text{Tr}(\rho\sigma_3)]. \quad (17)$$

For $\lambda_* = 0$, one recovers a subclass of Pauli channels with $\lambda_2 = \lambda_1$. From the above form, it follows that the Pauli matrices are the eigenvectors of Λ to the eigenvalues λ_1 (two-times degenerate) and λ_3 . The last eigenvalue equation, $\Lambda[\rho_*] = \rho_*$, shows that the final eigenvector is the stationary state (preserved by Λ)

$$\rho_* = \frac{1}{2} \left[\mathbb{I} + \frac{\lambda_*}{1 - \lambda_3} \sigma_3 \right]. \quad (18)$$

If $\lambda_* \neq 0$, then Λ is non-unital ($\Lambda[\mathbb{I}] \neq \mathbb{I}$). Hence, this property is fully controlled by a single parameter λ_* . Because the Pauli matrices are Hermitian, λ_1 , λ_3 , and λ_* are real numbers. Also, they provide the necessary and sufficient conditions for complete positivity of Λ [R54],

$$|\lambda_3| + |\lambda_*| \leq 1, \quad 4\lambda_1^2 + \lambda_*^2 \leq (1 + \lambda_3)^2. \quad (19)$$

An important property of phase-covariant channels is their non-commutativity. Namely, if Λ_1 and Λ_2 are both phase-covariant, then in general $\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$. This could not be observed for unital (Pauli) maps.

For the phase-covariant dynamical maps $\Lambda(t)$, one considers the master equations with the time-local generators $\mathcal{L}(t) = \gamma_+(t)\mathcal{L}_+ + \gamma_-(t)\mathcal{L}_- + \gamma_3(t)\mathcal{L}_3$ or memory kernels $K(t) = k_+(t)\mathcal{L}_+ + k_-(t)\mathcal{L}_- + k_3(t)\mathcal{L}_3$ where

$$\mathcal{L}_\pm[\rho] = \sigma_\pm \rho \sigma_\mp - \frac{1}{2} \{ \sigma_\mp \sigma_\pm, \rho \}, \quad \mathcal{L}_3[\rho] = \frac{1}{4} (\sigma_3 \rho \sigma_3 - \rho). \quad (20)$$

In the above equation, $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ are the raising and lowering (ladder) operators. Now, contrary to the unital case with Pauli maps, only three out of four eigenvectors of a non-unital

$\Lambda(t)$ are time-independent. Also, one of its eigenvectors, namely the stationary state $\rho_*(t)$, depends on time, even though its eigenvalue is constant. Despite this added complexity, the dynamical equations for phase-covariant maps can still be reduced to equations on functions: the eigenvalues $\lambda_1(t)$, $\lambda_3(t)$, and the parameter $\lambda_*(t)$.

From the form of $\mathcal{L}(t)$, it is evident that it includes the amplitude damping ($\gamma_+(t) = \gamma_3(t) = 0$), inverse amplitude damping ($\gamma_-(t) = \gamma_3(t) = 0$), generalized amplitude damping ($\gamma_3(t) = 0$), and pure dephasing ($\gamma_{\pm}(t) = 0$) [R2]. The general CP-divisibility conditions for $\Lambda(t)$ are $\gamma_{\pm}(t) \geq 0$, $\gamma_3(t) \geq 0$. The necessary and sufficient conditions for P-divisibility are not yet known, although partial results have been shown in ref. [R54].

Research goals

My scientific articles contain theoretical considerations with discussions on potential experimental applications. During my research, I implement advanced methods of theoretical and mathematical physics from the fields of quantum information theory and open quantum systems theory to expand the knowledge on properties and implementations of selected quantum maps. Among the utilized mathematical tools are elements of operator algebra, mathematical analysis, Riemannian geometry, and theory of Laplace transforms. The main challenges I undertake are listed below.

- (1) *Geometry on the space of quantum channels.* Geometrical characterization is provided for positive and completely positive, trace-preserving maps. Quantitative results for relative volumes help to characterize properties of random quantum channels.
- (2) *Classical mixtures of dynamical maps.* Convex combinations of dynamical maps are analyzed, going beyond mixtures of Markovian semigroups, invertible maps, and finally commutative maps. Non-convexity is proven for the sets of dynamical maps that are Markovian, non-Markovian, non-unital, commutative, and non-invertible. The Markovian semigroup is recovered from mixtures of strongly non-Markovian maps.
- (3) *Enhancing communication properties of channels with noise.* Beneficial decoherence and classical noises are used to improve classical capacity and other measures of quantum channels. For classical capacity, non-unitality turns out to be a better resource than entanglement.
- (4) *Further generalizations of Pauli channels.* A generalization of generalized Pauli channels is introduced by replacing the mutually unbiased bases with mutually unbiased measurements. It provides a class of symmetric channels in any finite dimension.

4.2.2 Results and description of the publications based on them

The papers included in my habilitation achievement concern theoretical analysis and applications of the Pauli channels, generalized Pauli channels, and phase-covariant channels. In my subsequent publications, I often expanded upon the results obtained in previous works. For this reason, I have decided to organize the publications thematically rather than chronologically. The topics are consistent with the list of research goals presented in the introductory section.

Geometry on the space of quantum channels

I started working with the Pauli channels during my PhD, where my first published article considered bistochastic qubit evolution on the manifold of Kähler functions [P6] (later generalized in [P9]). This was the beginning of my interest in the geometry of quantum channels, which was later continued during my internship in Germany. This series of papers was inspired by the research conducted with prof. Walter Strunz's group, whose results were published in the article

on geometry of Gaussian quantum channels [P5]. These mappings are defined on continuous variable systems, whose underlying Hilbert space has infinite dimensions. As a result, volumes occupied by quantum channels are infinite. However, relative volumes – e.g. of entanglement breaking Gaussian channels among all Gaussian channels – are themselves finite. Interesting properties could be observed even under partial knowledge about quantum maps. My goal was to carry out a similar analysis for the Pauli channels and their generalizations.

The motivation behind considering relative volumes of quantum maps is to determine expected properties of a randomly selected channel. One example would be a noisy evolution with only a partial knowledge of its defining parameters. Applications of random channels include qubit encryption [R57] and superdense coding [R58]. Through the analysis of the underlying geometry, it becomes possible to find regions occupied by the desired classes of quantum maps. Relative volumes can be interpreted as probabilities that given channels possess certain physical properties. In particular, even incomplete information about quantum evolution can be sufficient to determine its characteristics, such as bounds on minimal output entropy and its asymptotic behavior [R59, R60, R61, R62].

The mathematical formalism and methodology is similar among all my papers on geometry. Geometrical properties of positive, trace-preserving quantum maps and quantum channels Λ are analyzed on the manifold of the Choi-Jamiołkowski states ρ_Λ . These states arise from the one-to-one correspondence between quantum maps and quantum states [R63, R64]. I introduce the metric tensor using the Hilbert-Schmidt inner product $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$, which allows me to calculate the line $ds^2 = \text{Tr}(d\rho_\Lambda)^2$ and volume $dV = \sqrt{\det g} \prod_\alpha d\lambda_\alpha$ elements in terms of the channel eigenvalues and non-unitality parameters λ_α . After determining appropriate integration regions, I analytically derive the volumes of interesting classes of trace-preserving maps, like positive and completely positive maps, entanglement breaking channels, and maps arising from physical (no infinite rates) time-local generators. Where the conditions are known, I also find the volumes occupied by positive and completely positive divisible channels.

In my works, I analyze the geometry of Pauli channels and generalized Pauli channels and phase-covariant channels. The results obtained in each publication are listed below in more details.

[H1] *Geometry of Pauli maps and Pauli channels*

The first paper focuses on a thorough analysis of positive, trace-preserving Pauli maps. Relative volumes are analytically calculated for the channels that break quantum entanglement, arise from the master equations with regular time-local generators, and possess desired divisibility properties. For each subclass of maps, I plotted the integration regions, including the tetrahedron of completely positive maps and the octahedron of entanglement breaking channels. The results are summarized with two quantitative graphical representations, one of which is presented in Fig. 1. Importantly, I find that there are twice as many completely positive than positive but not completely positive maps, which reproduces the result from ref. [R65] for the Haar measure. This raises a question on the relationship between relative volumes with respect to different metrics.

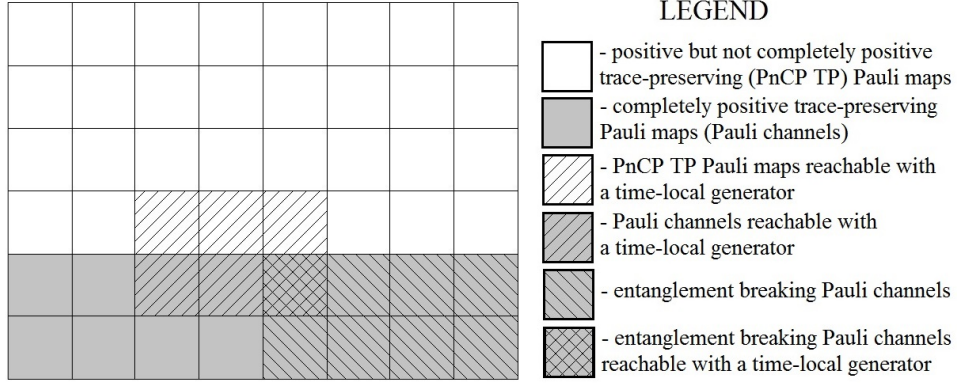


Fig. 1: A quantitative representation of the volumes for Pauli maps [H1]. One square covers the region of $1/48$.

[H2] Geometry of generalized Pauli channels

The second paper uses a more general definition of generalized Pauli channels than the one presented in eq. (10). Namely, $N \leq d + 1$ mutually unbiased bases can be used to construct the generalized Pauli map [R48]

$$\Lambda = \pi_{N+1} \mathbb{1} + \pi_0 \Phi_0 + \sum_{\alpha=1}^N \pi_\alpha \Phi_\alpha, \quad (21)$$

where $\Phi_0[X] = \text{Tr}(X)\mathbb{I}_d/d$ is the completely depolarizing channel. As construction of positive maps is an open problem, Therefore, I propose necessary positivity conditions and provide the upper bound on the volume of positive, trace-preserving generalized Pauli maps for any d and $N \leq d + 1$. Due to difficulties in establishing analytical regions of integration for arbitrary N and d , this work focuses on $N = d + 1$ (maximal number of MUBs), $N = d$, and $N = 3$ (minimal number of MUBs). In each case, I derive the integration regions in such a way that it is possible to analytically calculate the volume integrals for the generalized Pauli channels (V_{CP}), as well as the subset of channels that are provided with legitimate generator (V_G) and entanglement breaking channels (V_{EB}). As can be seen in Fig. 2, the resulting volumes depend on the dimension d . Note that the only function that does not monotonically decrease with the increase of d is $V_G(d)/V_{CP}(d)$. Indeed, it instead increases and for $d \rightarrow \infty$ approaches $1/e$ ($N = d, d + 1$) or 1 ($N = 3$).

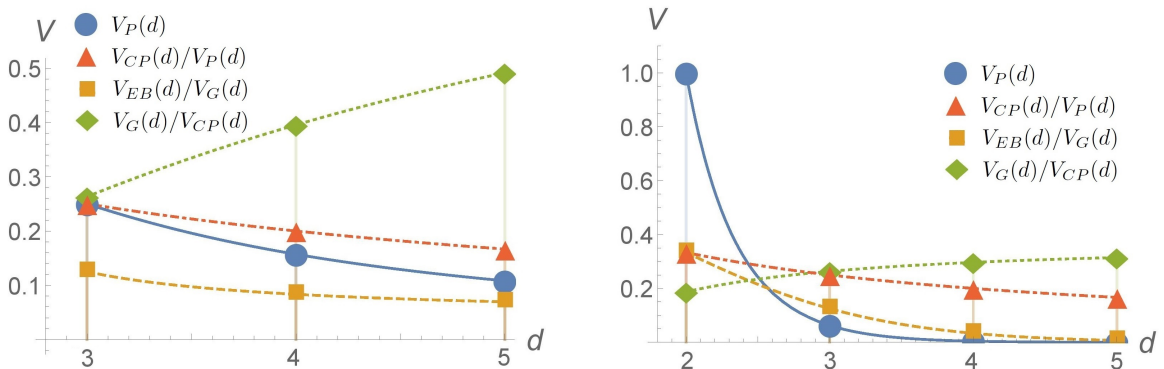


Fig. 2: A graphical representation of the volumes for selected classes of the generalized Pauli trace-preserving maps constructed from three (left), d , or $d + 1$ (right) mutually unbiased bases [H2].

[H3] Geometry of symmetric and noninvertible Pauli channels

The third paper applies the earlier results to the Pauli maps that are characterized by no more than two distinct nonzero parameters. This class, completely omitted in ref. [H1] due

to having zero volume in this metric, includes two important subclasses: non-invertible Pauli maps, for which at least one of the three eigenvalues vanishes, and symmetric Pauli maps, whose eigenvalues are degenerated. Many interesting channels fall into these categories – e.g., the two-Pauli channels, axial channels, dephasing channels, depolarizing channels, and extreme entanglement breaking channels. For each case, I present the integration regions inside the tetrahedron of all Pauli channels – see Fig. 3 for an example of non-invertible maps with no degenerate eigenvalues. Next, I analyze and compare the relative volumes between different classes of Pauli maps. In addition, I also demonstrate the volumes for all positive, trace-preserving Pauli maps and divisible Pauli channels in two collective charts. This gives a quantitative idea and intuition on the properties of the considered maps. There are some substantial differences with respect to the results of ref. [H1], which I list and discuss in the corresponding sections. One example is the need to separately consider L-divisibility (divisibility into semigroups) of quantum maps, which does not always equal CP-divisibility if one allows for non-invertibility.

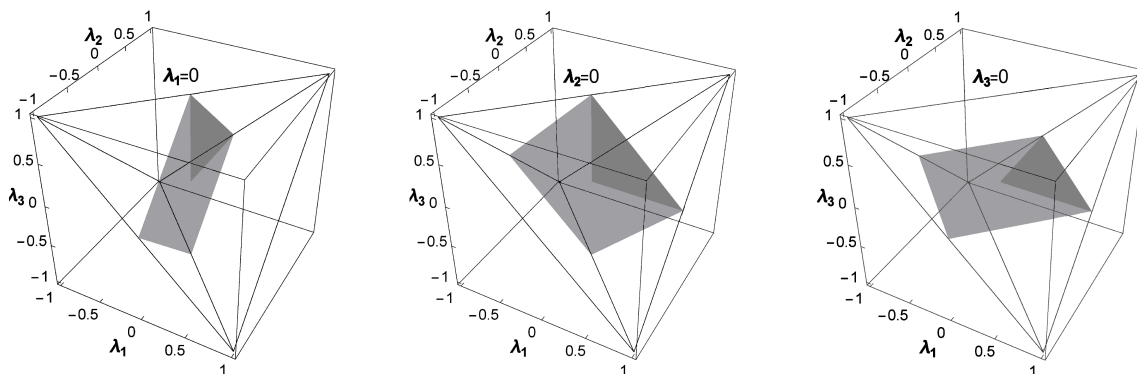


Fig. 3: A graphical representation of the range of eigenvalues λ_1 , λ_2 , λ_3 that correspond to the non-invertible channels with two distinct non-zero eigenvalues (gray flat surfaces) [H3]. From left to right, complete positivity regions are plotted for $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, and $\lambda_3 = 0$, respectively. The dark gray triangles represent the channels obtainable with time-local generators.

[H4] *Geometry of phase-covariant qubit channels*

Many questions that have been answered for unital qubit maps are still open for non-unital channels, including their geometrical characterization. In this most recent paper, I answer some of these questions for phase-covariant channels. Whereas the underlying geometrical structures on the manifold they live in seem similar to those of the Pauli maps, the regions occupied by channels are rather different. In Fig. 4, I present a comparison between the spaces of Pauli maps and phase-covariant maps. Evidently, the entanglement breaking regions have similar symmetry properties, however the same conclusion cannot be drawn for either positive or completely positive maps. Interestingly, among three-parameter invertible maps, all the considered relative volumes are greater for the phase-covariant maps than the Pauli maps. A similar relation does not hold for phase-covariant maps with different non-unitality parameters λ_* , among which $\lambda_* = 0$ corresponds to the Pauli map with a degenerated eigenvalue. The analysis of entanglement breaking and time-local generated subclasses is performed for general phase-covariant maps as well as non-invertible or symmetric maps. This includes popular amplitude damping and general amplitude damping channels. Divisibility properties are not analyzed due to problems with deriving necessary and sufficient conditions.

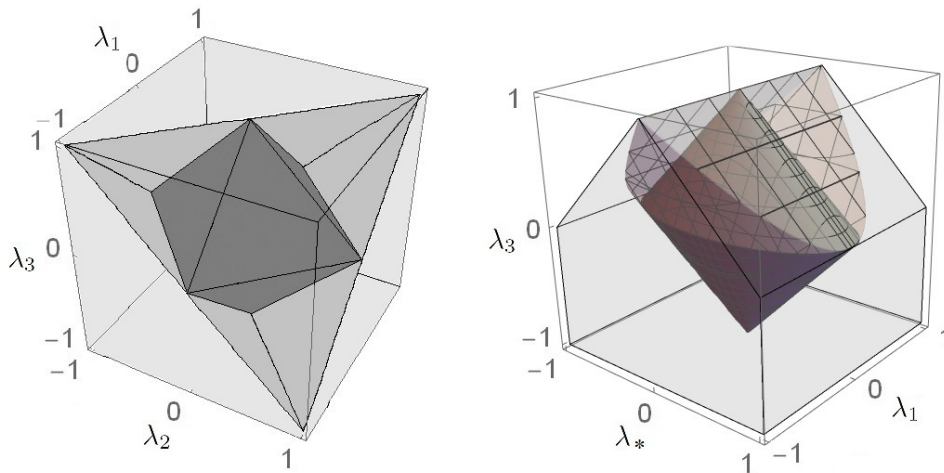


Fig. 4: Regions occupied by positive, trace-preserving maps (light gray), quantum channels (gray), and entanglement breaking channels (dark gray) for the Pauli maps (left) [H1] and phase-covariant maps (right) [H4].

The results I obtain show that only a small percentage of quantum channels can be obtained using the master equations with physical time-local generators. Therefore, it further validates the necessity to develop the memory kernel approach. In a similar manner, the ratio of divisible to indivisible channels sheds more light on the dynamical maps corresponding to Markovian and non-Markovian quantum evolutions. My results also partially answer the question about compatibility between the formalisms of quantum channels and dynamical maps arising from master equations.

Classical mixtures of dynamical maps

The concept of mixtures (or convex combinations) of dynamical maps is based on a simple premise that a probabilistic mix $\Lambda(t) = p\Lambda_1(t) + (1-p)\Lambda_2(t)$, $0 \leq p \leq 1$, of two dynamical maps $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ is a dynamical map itself. This topic gained an increased interest after it was shown that eternally non-Markovian qubit evolution can arise from a convex combination of two Pauli dynamical semigroups [R66, R67]. During my PhD, I extended this result to qudit evolution, proving that certain mixtures of generalized Pauli semigroups produce dynamical maps with one [P7] or more [P10] eternally negative decoherence rates. Initially, the observation that non-Markovianity emerges from convex combinations of Markovian semigroups appeared to be counter-intuitive. However, it was later shown that mixing-induced non-Markovianity can be explained in terms of correlations and information flow between the system and the environment [R68]. Interestingly, the inverse relation is also true as, under certain conditions, a combination of two non-Markovian qudit evolutions leads back to a Markovian semigroup [R69].

Experimental realizations of mixing qubit channels have recently been achieved by using the Mach-Zender interferometer [R70, R71]. Qubit states are encoded in the photon polarization, which interacts with the photon frequency (environment). The beam splitter, whose splitting properties are characterized by p , divides the beam into two branches. On each branch, $\Lambda_1(t)$ and $\Lambda_2(t)$ operate independently before the beams are recombined. Due to the set of Markovian semigroups being non-convex, it is then experimentally shown that the resulting dynamics is indeed non-Markovian.

In my series of papers, I analyze mixtures of Pauli channels, generalized Pauli channels, and phase-covariant channels, respectively. Going beyond convex combinations of Markovian semigroups, I consider mixtures of CP-divisible and non-invertible (including indivisible) dynamical maps. Finally, even the unitality and commutativity conditions are relaxed. For the resulting dynamics, I construct the corresponding time-local generators and memory kernels. Next, I analyze their non-Markovianity properties depending on the mixing parameters.

Positive decoherence rates $\gamma_\alpha(t)$ of time-local generators are associated with Markovianity of quantum evolution. However, $\gamma_\alpha(t) \not\geq 0$ can also lead to a physical evolution. An interesting scenario occurs when some rates remain negative at all times. An instructive example of qubit dynamics was proposed for two positive $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 1$ and one always negative $\gamma_3(t) = -\tanh t$ decoherence rates [R66]. The corresponding Pauli channel arises from a simple mixture of two Markovian semigroups,

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2} \left(e^{2t\mathcal{L}_1} + e^{2t\mathcal{L}_2} \right), \quad (22)$$

with \mathcal{L}_α given by eq. (6). Because the rate $\gamma_3(t) < 0$, this example was called *eternally non-Markovian evolution*.

This paper generalizes the concept of eternal non-Markovianity to the qudit scenario. I consider convex combination of CP-divisible generalized Pauli dynamical maps

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} x_\alpha e^{w_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha}, \quad w_\alpha(t) \geq 0, \quad (23)$$

where \mathcal{L}_α are defined in eq. (15). Necessary conditions for P-divisibility of $\Lambda(t)$ are derived, which become also sufficient for $d = 2$. I propose an example of mixtures that have all $d + 1$ rates negative but only temporarily. Next, I prove that the probability distribution p_α that appears in its Kraus representation obeys the time-local rate equation $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathfrak{L}(t)\mathbf{p}(t)$. Moreover, I present conditions upon $w_\alpha(t)$ guaranteeing that this is the classical Pauli rate equation. In particular, for the Pauli channels,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{L}(t) \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

with the time-dependent generator

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -W & 2\dot{w}_1 - W & 2\dot{w}_2 - W & 2\dot{w}_3 - W \\ \dot{w}_1 x_1 & -(2 - x_1)\dot{w}_1 & \dot{w}_1 x_1 & \dot{w}_1 x_1 \\ \dot{w}_2 x_2 & \dot{w}_2 x_2 & -(2 - x_2)\dot{w}_2 & \dot{w}_2 x_2 \\ \dot{w}_3 x_3 & \dot{w}_3 x_3 & \dot{w}_3 x_3 & -(2 - x_3)\dot{w}_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

is the classical Pauli rate equation if $\dot{w}_\alpha(t) \geq 0$ and $\dot{w}_k(t) \geq \frac{1}{2}W(t)$, where $W(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \dot{w}_\alpha(t)$.

As a case study, I consider convex combinations of Markovian semigroups where $w_\alpha(t) = w > 0$. Here, examples are presented with up to $d - 1$ rates $\gamma_\alpha(t)$ that are eternally negative. Because each rate is $(d - 1)$ -times degenerate, I actually present a legitimate dynamics with as many as $(d - 1)^2$ out of $d^2 - 1$ always negative decoherence rates. Every mixture of semigroups satisfies necessary P-divisibility conditions, but there are also examples of dynamical maps for which the sufficient conditions from ref. [P10] hold. Finally, in Fig. 5, I plot the CP-divisibility region of $\Lambda(t)$ for $d = 3$, depending on the choice of the mixing parameters x_α . This region is shown in relation to a simplex corresponding to all possible choices of x_α . It can be observed that the CP-divisibility region is relatively small, and hence most of the mixtures describe non-Markovian evolution. The further from the center of the simplex, the less freedom in fixing x_α that do not break the Markovianity.

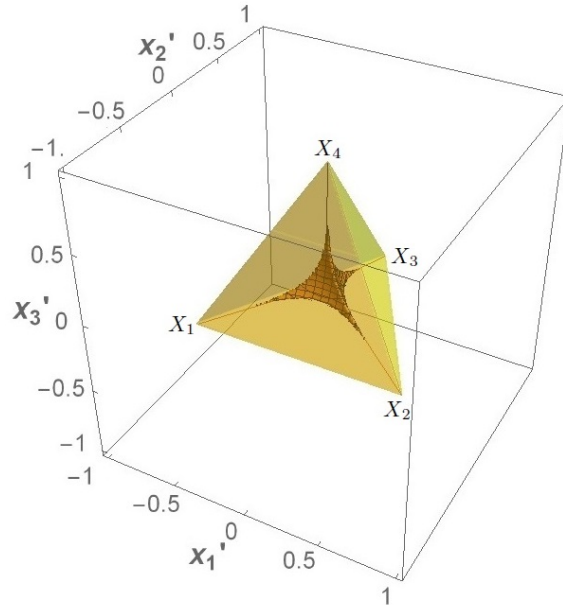


Fig. 5: The range of simplex parameters x'_α in $d = 3$ for which $\gamma_\alpha(t) \geq 0$ at all times $t \geq 0$ [H5].

[H6] *Markovian semigroup from mixing noninvertible dynamical maps*

So far, there were several attempts to go beyond convex combinations of Markovian semigroups by analyzing mixtures of CP-divisible dynamical maps [H5], [R72, R73]. However, the mixing maps were always invertible, which means that $\Lambda^{-1}(t)$ was always well defined. This approach inadvertently excludes numerous interesting physical evolutions described by non-invertible dynamical maps. Examples include an amplitude damping model on resonance with Lorentzian reservoir spectrum [R74], a damped two-level atom interacting with a single-mode field in the Jaynes-Cummings model [R75, R76, R77], a two-level atom driven by a phase noisy laser [R42], and a quantum NOT gate implementation [R44].

This motivated me to consider more general mixtures of dynamical maps, where invertibility was not guaranteed. Namely, I construct convex combinations

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{d+1} x_\alpha \Lambda_\alpha(t), \quad (26)$$

of generalized Pauli dynamical maps

$$\Lambda_\alpha(t) = (1 - p(t))\mathbb{1} + \frac{p(t)}{d-1}U_\alpha, \quad 0 \leq p(t) \leq 1. \quad (27)$$

I prove that non-invertible maps can be mixed into invertible maps while the inverse is not true. I provide necessary and sufficient conditions for $\Lambda(t)$ to be an invertible dynamical map, which depends only on the lower bound of $\lambda(t)$ and $\min_\alpha x_\alpha$ ($x_\alpha \neq 0$). This shows that singularities can be removed via classical mixing. Next, I consider a special class of mixtures with $k \leq d$ identical parameters $x_\alpha = 1/k$ for $\alpha = 1, \dots, k$ (and zero otherwise). For such a choice, the resulting $\Lambda(t)$ has two distinct eigenvalues, which can reach zero at different points in time. This illustrates how to fix the mixing parameters to generate additional singularities. However, it turns out that through mixtures one can not only add and remove singularities of dynamical maps but also shift them to different points in time. A good example is provided by a convex combination of Pauli dynamical maps with $x_\alpha = 1/3$ and oscillating eigenvalues $\lambda(t) = 1 - 2p(t)$ – see Fig. 6. Observe that all roots of $\lambda(t)$ are shifted by the same time interval.

The main result of this paper expands on the case with removing singularities through mixing. I analyze the behavior of time-local generators upon mixing the dynamical maps and

show the relation between decoherence rates associated with $\Lambda(t)$ and $\Lambda_\alpha(t)$. I propose a parametrization of $d + 1$ dynamical maps such that the resulting convex combination is invertible and CP-divisible (Markovian evolution). In a special case, $d + 1$ non-invertible dynamical maps can be used to construct the Markovian semigroup (it was later shown that one map can be invertible [R52]).

Finally, I also analyze the corresponding memory kernel master equations. It turns out that every convex combination of the generalized Pauli dynamical maps is provided by a memory kernel defined via a probability distribution and a single memory function. Interestingly, the maps whose mixture is the Markovian semigroup are the solutions of master equations with time-local generators and memory kernels that are not regular (contain infinities).

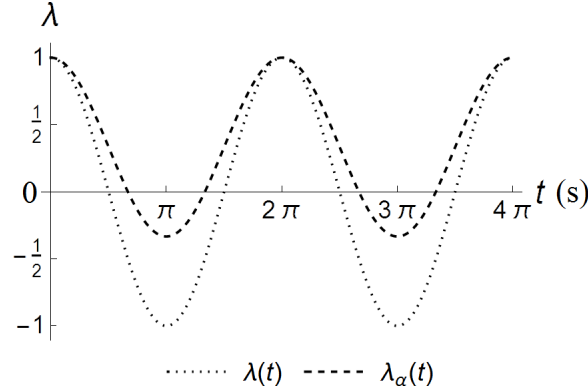


Fig. 6: The eigenvalues of $\Lambda_\alpha(t)$ and their mixture $\Lambda(t)$ for $\lambda(t) = \cos t$ [H6].

[H7] *Non-Markovianity criteria for mixtures of noninvertible Pauli dynamical maps*

This paper expands on the results of ref. [H6] by investigating the non-Markovianity degree of Pauli dynamical maps that result from classical mixtures of non-invertible dynamical maps. Such analysis has so far been performed only for invertible Pauli maps, including convex combinations of Markovian semigroups [R66, R67, R72] and CP-divisible dynamical maps [H5], [R73]. The divisibility of an invertible dynamical map $\Lambda(t)$ is fully characterized by the properties of the associated propagator $V(t, s) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(s)$. The problem becomes more complicated when one allows for noninvertible maps, for which $V(t, s)$ is not unique.

Using the results for image non-increasing dynamical maps [R40, R78], I formulate the divisibility conditions for Pauli dynamical maps. In particular, I analyze the non-Markovianity degree for mixtures of non-invertible Pauli dynamical maps

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \Lambda_\alpha(t), \quad \Lambda_\alpha(t)[\rho] = (1 - p(t))\rho + p(t)\sigma_\alpha \rho \sigma_\alpha, \quad (28)$$

where $0 \leq p(t) \leq 1$. It turns out that there are no P-divisible $\Lambda_\alpha(t)$ that are not CP-divisible. Examples of $\Lambda_\alpha(t)$ with every possible degree of divisibility are presented in Fig. 7. In general, $\Lambda_\alpha(t)$ is divisible iff it is kernel non-decreasing, which means that $\lambda(s) = 0 \implies \lambda(t) = 0$ for all $t \geq s$.

Next, I analyze the relations between divisibility of $\Lambda_\alpha(t)$ and their mixtures $\Lambda(t)$, arriving at the following conclusions.

- Indivisible maps follow only from mixing indivisible maps.
- Mixtures of divisible maps always produce divisible maps.
- Convex combinations of CP-divisible maps are at least P-divisible.
- Noninvertible CP-divisible maps cannot be obtained through mixing.

- Indivisible dynamical maps can be mixed into maps with any degree of divisibility.

Also, the necessary and sufficient conditions for the CP-divisibility of both $\Lambda_\alpha(t)$ and $\Lambda(t)$ generalize the conditions from ref. [R67] for invertible maps.

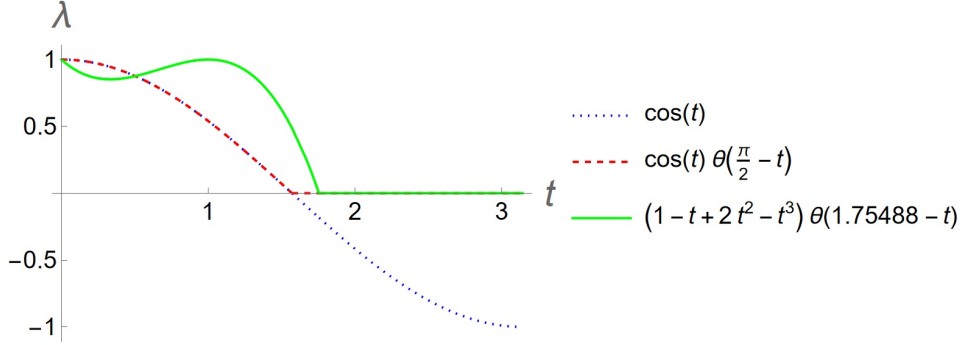


Fig. 7: Examples of non-invertible $\Lambda_\alpha(t)$ that are indivisible (blue dotted), CP-divisible (red dashed), and divisible but not CP-divisible (green bold).

This publication includes many illustrative examples, including a time-local generator for a non-invertible dynamical map that is P-divisible but not CP-divisible. Interestingly, this generator has decoherence rates that all explode to $\pm\infty$ at the same moment, while the sums of their pairs are always finite.

[H8] *Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps*

In this article, I analyze the behavior of classical mixtures of qubit dynamical maps for which the unitality requirement has been dropped. Whereas convex combinations of unital channels are always unital, an analogical relation does not follow for the channels that are non-unital. Indeed, I present conditions under which non-unital phase-covariant channels produce a unital mixture. I also show that phase-covariant maps can arise from convex combinations of maps that are not phase-covariant.

In more details, I consider the mixture of Markovian semigroups

$$\Lambda(t) = x_1 e^{2w_1 \mathcal{L}_+ t} + x_2 e^{2w_2 \mathcal{L}_- t} + x_3 e^{2w_3 \mathcal{L}_3 t}, \quad (29)$$

where $w_\alpha \geq 0$, and the generators are defined as in eq. (20). Observe that the generators \mathcal{L}_\pm describe amplitude damping and inverse amplitude damping, whereas \mathcal{L}_3 corresponds to phase-damping. However, even though eq. (29) was constructed in analogy to mixtures of the Markovian Pauli semigroups, it is not possible to obtain an eternally non-Markovian – or even non-Markovian – quantum evolution. Indeed, all mixtures of Markovian semigroups from eq. (29) are CP-divisible. Therefore, it becomes necessary to examine a more general dynamical map

$$\Lambda(t) = x_1 \Lambda_+(t) + x_2 \Lambda_-(t) + x_3 \Lambda_3(t), \quad (30)$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda_+(t)[X] &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbb{I} + (1 - \eta_1^2(t)) \sigma_3 \right] \text{Tr} X + \eta_1(t) (\sigma_1 \text{Tr} \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr} \sigma_2 X) + \eta_1^2(t) \sigma_3 \text{Tr} \sigma_3 X \right\}, \\ \Lambda_-(t)[X] &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbb{I} - (1 - \eta_2^2(t)) \sigma_3 \right] \text{Tr} X + \eta_2(t) (\sigma_1 \text{Tr} \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr} \sigma_2 X) + \eta_2^2(t) \sigma_3 \text{Tr} \sigma_3 X \right\}, \\ \Lambda_3(t)[X] &= \frac{1}{2} \left[\mathbb{I} \text{Tr} X + \eta_3(t) (\sigma_1 \text{Tr} \sigma_1 X + \sigma_2 \text{Tr} \sigma_2 X) + \sigma_3 \text{Tr} \sigma_3 X \right], \end{aligned} \quad (31)$$

and $|\eta_\alpha(t)| \leq 1$. Even though this map seems much more complicated, the previous case is recovered for a simple choice of $\eta_\alpha(t) = e^{-w_\alpha t}$. In general, it is admissible for $\eta_\alpha(t)$ to reach zero

at finite points in time. If this happens, the corresponding $\Lambda_\alpha(t)$ is necessarily non-invertible. However, classical mixing of non-invertible $\Lambda_\alpha(t)$ sometimes produces invertible $\Lambda(t)$.

In the special case with $\eta_\alpha(t) = \eta(t)$, $\Lambda(t)$ is invertible if and only if $\eta(t) > 0$. Therefore, an invertible mixture follows only from invertible $\Lambda_\pm(t)$ and $\Lambda_3(t)$. The reason is that the singularity point of $\lambda_1(t)$ is the same as of $\eta(t)$, and $\lambda_3(t)$ is always non-singular ($\lambda_\alpha(t)$ are the eigenvalues of $\Lambda(t)$). This marks another difference from the convex combinations of Pauli channels, where non-invertible maps are able to produce invertible (and even Markovian) maps.

Moreover, for the Pauli channels, only a convex combination of three dephasing channels can result in a Markovian semigroup [H6], of which at least two have to be non-invertible [R52]. Therefore, non-invertibility is necessary to produce a semigroup. A substantially different behavior is observed for phase-covariant channels, where the Markovian semigroup results only from mixing the following two semigroups,

$$\Lambda(t) = x_1 e^{2w\mathcal{L}+t} + x_2 e^{2w_2\mathcal{L}-t}. \quad (32)$$

The map $\Lambda(t)$ is the generalized amplitude damping channels with constant decoherence rates $\gamma_+(t) = 2wx_1$, $\gamma_-(t) = 2wx_2$, $\gamma_3(t) = 0$. Hence, this is an example of the Markovian semigroup that results from mixing semigroups.

Finally, by allowing the dynamical maps to be non-unital, they no longer have to be commutative. In other words, $\Lambda(t)\Lambda(s) = \Lambda(s)\Lambda(t)$ does not generally hold for any two moments in time. I show that $\Lambda_\pm(t)$ and $\Lambda_3(t)$ are all commutative and find conditions for their mixtures $\Lambda(t)$ to become non-commutative.

My results present a wide variety of dynamical maps that can be obtained through mixtures of simple quantum maps. Considering first non-invertible and then even non-unital dynamical maps allows me to observe how the properties of classical mixtures change with the choice of mixing parameters and the channels that are being mixed. Further analysis shows that it is not only dynamical maps for Markovian and non-Markovian evolutions that do not form convex sets. The same is true for non-invertible, indivisible, non-unital maps, or non-commutative dynamical maps.

Mixtures of phase-covariant channels are later applied to enhance transmission characteristics of dynamical maps [H11, H12], which is described in more details in the following subsection.

Enhancing communication properties of channels with noise

Finding feasible methods to transfer information through quantum channels in an accurate way is important for the purposes of quantum communication and information processing. However, unavoidable effects of external noise are often detrimental for performing quantum tasks. To protect the information that passes through a noisy channel, one applies error correction, error mitigation, or error suppression techniques [R79, R80]. Correction codes allow for reduced error rates on logical gates by encoding information into a large number of physical qubits. Mitigation techniques do not require transmission of redundant information but rather a significantly increased number of measurements. Finally, error suppression uses the knowledge about the system to avoid potential influences of undesirable effects. Examples include decoherence-free subspaces (DFSs) [R81], noiseless subsystems [R82], and dynamical decoupling [R83].

Alternatively, instead of attempting to reduce its effects, noise can be benefited from and used as a quantum resource. Indeed, it was shown that local dissipation can be used as a resource for quantum computation [R84] and state engineering [R85]. For quantum information processing purposes, Marshall et al. [R86] developed dissipation-assisted modular networks to control the loss of coherence and concurrence, whereas Gillard et al. [R87] manipulated quantum thermal noise to enhance qubit state detection. Finally, memory effects associated with

environmental noise were used to suppress error rates of quantum channels [R88], [P13], [H10]. An improved performance measured by the channel fidelity, output purity, and the ability to preserve quantum entanglement was attained through adding noises to the Markovian evolution on the level of memory kernel master equations [R89, R90].

This series of articles is a continuation of my research during PhD, where I analyzed the fidelity of generalized Pauli channels. This is a measure of distance between input and output states, and hence it measures the state distortion after the use of a quantum channel. Having derived analytical formulas for the fidelity bounds [P12], I showed how to increase the generalized Pauli channel fidelity by introducing non-Markovian noises to the system [P13].

In the following publications, I further explore the possibilities of improving channel performance with beneficial noises. By using memory kernel addition and classical mixtures of dynamical maps, I present valid methods to enhance transmission properties of generalized Pauli channels and phase-covariant channels. The measures I analyze include channel fidelity (distortion between inputs and outputs), maximal output purity (distortion from pure states), and classical capacity (maximal rate of reliably transmitted classical information).

[H9] *Classical capacity of generalized Pauli channels*

A fundamental problem in quantum communication is finding the maximal rate of classical and quantum information that can be transferred in a reliable way by a given quantum channel. This rate is known as the *capacity* of a channel, and knowing its value is important for quantum computation and error correction tasks. Classical channels can transmit only one type of information, and therefore their definition of capacity is unique. For quantum channels, this is no longer the case. However, if a quantum map is used to transmit only classical information, it is enough to know its classical capacity [R91, R92]. Finding its exact value is non-trivial, as it requires calculating an asymptotic limit of the Holevo capacity $\chi(\Lambda)$ under infinitely many uses of a channel. Moreover, the Holevo capacity is itself a maximum of an entropic expression calculated over all possible ensembles of separable input states [R91, R92]. The formulas significantly simplify if $\chi(\Lambda)$ is weakly additive ($\chi(\Lambda \otimes \Lambda) = 2\chi(\Lambda)$) [R93]. This property is shared by quantum maps covariant with respect to irreducible unitary representations of finite groups, among which are the generalized Pauli channels [P10].

In this paper, I derive analytical formulas for lower and upper bounds of the Holevo capacity for the generalized Pauli channels. I apply the methods developed for the Weyl channels in refs. [R94, R95] after generalizing them first to multipartite Weyl channels. I also prove that the capacity bounds are achievable and propose the corresponding states. Next, I show the relation between these bounds and the Shannon entropy of classical probability vectors. It turns out that only the lower bound of the Holevo capacity is weakly additive. However, if the lower and upper bounds coincide, the Holevo capacity is equal to the classical capacity of the channel. I obtain analytical formulas of the classical capacity for two new classes of the generalized Pauli channels. The conditions are that their eigenvalues λ_α are of the same sign and at least d of them are equal, so that $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\} = \{\lambda_\#, \dots, \lambda_\#, \lambda\}$. The classical capacity formula then reduces to

$$C(\Lambda) = \frac{1 + (d-1)\lambda}{d} \ln[1 + (d-1)\lambda] + (d-1) \frac{1-\lambda}{d} \ln[1-\lambda]. \quad (33)$$

where $\lambda = \min_\alpha \lambda_\alpha$ if $\lambda_\alpha \leq 0$ and $\lambda = \max_\alpha \lambda_\alpha$ if $\lambda_\alpha \geq 0$. In more details, I analyze the capacity of the Pauli channels, whose value depends only on the eigenvalue λ_α with the greatest module. Additionally, for qubit evolution, there is a simple relation between the classical capacity and extremal channel fidelities on pure states. At last, I show that if the Pauli dynamical map is invertible and P-divisible, then its classical capacity is a monotonously decreasing function of time.

Using the formulas derived in ref. [H9], I examine how to use decoherence noise to increase the classical capacity of generalized Pauli channels. Memory effects are introduced into the Markovian evolution by considering the memory kernel master equations with the memory kernel [R88]

$$K(t) = \delta(t)\mathcal{L} + \mathbb{K}(t). \quad (34)$$

In this formula, \mathcal{L} is a Markovian semigroup generator, and $\mathbb{K}(t)$ is a purely non-local memory kernel, which means it does not contain the Dirac delta function $\delta(t)$. Notably, both \mathcal{L} and $\mathbb{K}(t)$ correspond to legitimate physical evolutions. The addition of purely local and non-local kernels has been considered in refs. [R88], [P13], where it has been shown that the channel fidelity for non-Markovian evolution can temporarily increase above the fidelity for a Markovian semigroup.

In what follows, I analyze the evolution given by the Markovian semigroup $\Lambda^M(t) = e^{t\mathcal{L}}$ with the isotropic generator $\mathcal{L} = \gamma \sum_{\alpha=1}^{d+1} \mathcal{L}_\alpha$. To represent the non-Markovian noise, I consider dynamical maps that are non-invertible and not kernel non-decreasing. It means that at least one of their eigenvalues vanishes at some finite time t_* but does not remain zero indefinitely. Such dynamical maps are indivisible, and hence the corresponding evolution is non-Markovian [R40]. A good example is $\Lambda^N(t)$ that solves the master equation with a constant memory kernel $\mathbb{K}(t) = \omega^2 \mathcal{L}_{d+1}$. However, even if $\Lambda^M(t)$ and $\Lambda^N(t)$ are always completely positive, a combination of two legitimate memory kernels $K(t)$ does not necessary yield a physical dynamics $\Lambda(t)$. I find the additional conditions that have to be met and calculate the lower bound of the classical capacity $C_{\text{low}}[\Lambda(t)] = \max_\alpha c_\alpha(t)$, where

$$c_\alpha(t) = \frac{1 + (d-1)\lambda_\alpha(t)}{d} \ln[1 + (d-1)\lambda_\alpha(t)] + (d-1) \frac{1 - \lambda_\alpha(t)}{d} \ln[1 - \lambda_\alpha(t)]. \quad (35)$$

For $d = 2$, $C_{\text{low}}[\Lambda(t)] = C[\Lambda(t)]$, $c_1(t) = c_2(t)$, and $c_3(t) = C[\Lambda^M(t)]$ is the classical capacity of the Markovian semigroup. Hence, whenever $c_1(t) > c_3(t)$, I observe an increase of capacity for the system with additional noises. This is presented in Fig. 8. Analogical results are obtained for the qubit and qutrit evolutions if one replaces the constant kernel with $\mathbb{K}(t)$ whose eigenvalues are exponentially decaying.

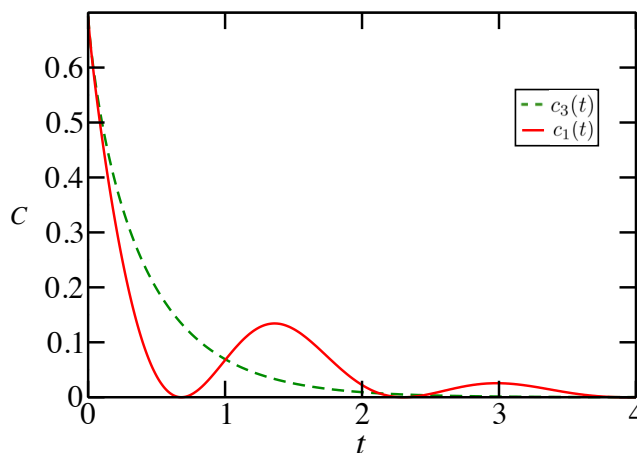


Fig. 8: The functions $c_1(t) = c_2(t)$ (red) and $c_3(t)$ (green, dashed) for the qubit evolution with $\gamma = 2/s$ and $\omega = 2/s$. The classical capacity of $\Lambda(t)$ is greater than that of $\Lambda^M(t)$ whenever $c_1(t) > c_3(t)$ [H10].

Then, I move beyond semigroups by considering CP-divisible dynamical maps $\Lambda^M(t)$. As they correspond to time-local generators with positive decoherence rates, the most natural way of introducing noises would be through adding a generator $\mathcal{L}^N(t)$ of a non-Markovian evolution ($\gamma_\alpha^N(t) \not\geq 0$). In this case, the map $\Lambda(t)$ is generated by $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^M(t) + \mathcal{L}^N(t)$. Hence, $\Lambda(t) = \Lambda^M(t)\Lambda^N(t)$ is a composition of two (commutative) generalized Pauli dynamical maps.

However, as the eigenvalues of $\Lambda^M(t)$ are nonnegative, they always exceed the eigenvalues of $\Lambda(t)$. In such scenarios, there can be no increase in the classical capacity. Therefore, instead of switching to generator addition, I instead consider a more general form of the memory kernel $K(t)$. Namely, I replace the semigroup generator \mathcal{L} with the memory kernel $\mathfrak{K}(t)$ that corresponds to the same evolution as the time-local generator $\mathcal{L}(t)$. Now, eq. (34) is replaced with $K(t) = \mathfrak{K}(t) + \mathbb{K}(t)$, where $\mathfrak{K}(t)$ and $\mathbb{K}(t)$ correspond to a Markovian and non-Markovian dynamics, respectively.

As a case study, I analyze the Markovian evolution with the time-local generator

$$\mathcal{L}^M(t) = \frac{r}{d + e^{rt}} \sum_{\alpha=1}^{d+1} \mathcal{L}_\alpha. \quad (36)$$

This time, the associated memory kernel $\mathfrak{K}(t)$ has both a local and a non-local part. For the non-Markovian noise, I again take $\mathbb{K}(t)$ with exponentially decaying eigenvalues. Once again, temporary increases in the channel capacity can be noticed. Contrary to the semigroup examples, the maximal increase does not occur the first time that the classical capacity is enhanced. Nevertheless, the results for semigroups and CP-divisible maps are qualitatively the same. This indicates that the capacity increase can be a more general feature than initially anticipated.

[H11] *Adjusting phase-covariant qubit channel performance with non-unitality*

This paper proves that transition performance can be improved by allowing for non-unitality of quantum channels. It is shown on the example of qubit phase-covariant channel fidelity and purity measures, which quantify the distortion between input and output states. I present derivations of analytical formulas for minimal and maximal channel fidelity on pure states [R96, R97], and also maximal output purities defined via the Schatten p -norm [R1, R98]. Importantly, these extremal values are achievable by channels, and I provide the forms of the respective pure states. The final two measures considered here are concurrence and entanglement of formation [R99, R100], which examine the evolution of entanglement when half of a maximally entangled state is sent through the phase-covariant channel.

The measures of fidelity, purity, and entanglement all depend on the channel eigenvalues λ_1 , λ_3 and the parameter λ_* responsible for its non-unitality. To avoid the influence of other factors, I compare the results for phase-covariant channels with the same eigenvalues but different non-unitality degree

$$\text{NU}(\Lambda) = \frac{|\lambda_*|}{1 - |\lambda_3|}. \quad (37)$$

Two extremal cases are unital (Pauli) channels Λ_U and maximally non-unital channels Λ_{NU} , where $\text{NU}(\Lambda_U) = 0$ and $\text{NU}(\Lambda_{\text{NU}}) = 1$. A channel Λ with intermediate values of $\text{NU}(\Lambda)$ is constructed via convex combinations

$$\Lambda = (1 - p)\Lambda_U + p\Lambda_{\text{NU}}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (38)$$

which share eigenvalues with both Λ_U and Λ_{NU} . Here, the probability distribution p can be interpreted as the classical noise, which turns out to be beneficial for certain properties of quantum evolution. It turns out that unital maps display the worst performance for every analyzed measure with the exception of the minimal channel fidelity. For the concurrence, I observe both a prolonged lifetime of entanglement and a sped up rebirth after its sudden death. Moreover, these channel measures monotonically decrease along with its non-unitality degree. In other words, the closer Λ is to being unital, the smaller increase is found in the corresponding measure.

In more details, I analyze the evolution of generalized amplitude damping channels with exponentially decaying and oscillating eigenvalues. The results for $\lambda_1(t) = \cos t$, $\lambda_3(t) = \cos^2 t$, and $\lambda_*(t) = p \sin^2 t$ are plotted in Fig. 9. Observe that the channel measures demonstrate a

similar oscillatory behavior, one difference being that the periodicity of the maximal output purities ν_2, ν_∞ is two times smaller. The higher the value of $\text{NU}(\Lambda) = p$, the smaller the minimal fidelity f_{\min} and the greater the maximal fidelity f_{\max} , as well as ν_2 and ν_∞ , at any given time. Additionally, f_{\max}, ν_2 , and ν_∞ reach their maximal value of 1 for $p = 1$. The only function that drops down to zero is $f_{\min}[\Lambda_U(t \rightarrow \infty)]$ for $\pi + 2k\pi$ regardless of the choice of p , and then also for $\pi/2 + 2k\pi$ and $3\pi/2 + 2k\pi$ if $p = 0$.

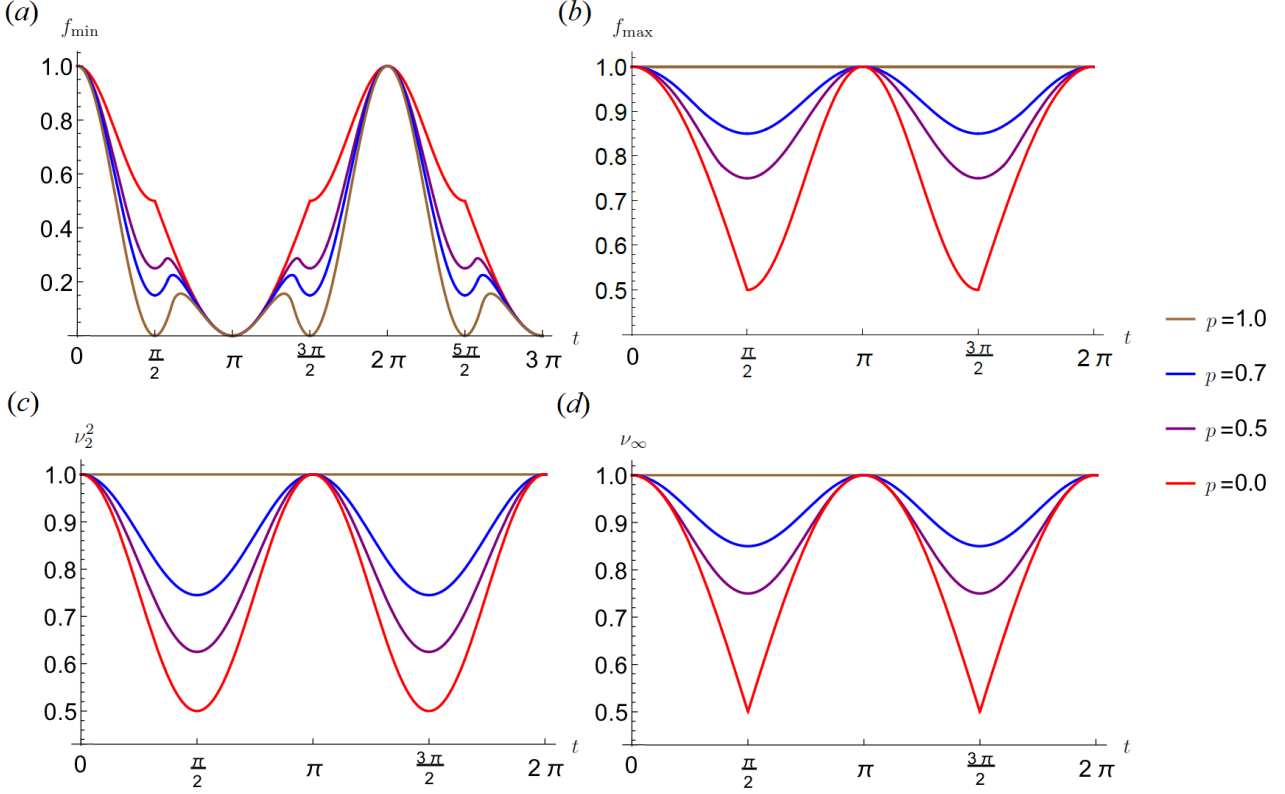


Fig. 9: Plots for oscillating channel eigenvalues representing time-evolution of the minimal fidelity (a), maximal fidelity (b), maximal output 2-norm (c), and maximal output ∞ -norm (d). The curves correspond to the channel mixtures with $p = 0$ (red), $p = 0.5$ (purple), $p = 0.7$ (blue), and $p = 1$ (brown) [H11].

An important result is that the enhanced performance of non-unital channels can be observed at every moment in time. This is a novelty compared to the previous works on noise suppression by counteracting its effects with another form of noise [R88], [P13], [H10], where the positive effects were only temporary.

[H12] *Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation*

Stationary states are such quantum states that are preserved by quantum evolution. For a quantum channel, this means that the input and output are identical. Stationary states can be time-dependent, and sometimes there are more than one for a given quantum map. In this paper, I consider the phase-covariant channels with

$$\lambda_* = p(1 - \lambda_3), \quad -1 \leq p \leq 1, \quad \lambda_3 \geq 0. \quad (39)$$

This way, both their non-unitality degree $\text{NU}(\Lambda) = |p|$ and the stationary state $\rho_* = \text{diag}(1 + p, 1 - p)/2$ are easily controlled with a single parameter p .

Analogously to Ref. [H11], I consider quantum channels

$$\Lambda^\pm = (1 - |p|)\Lambda_U + |p|\Lambda_{\text{NU}}^\pm \quad (40)$$

resulting from a mixture of the unital (Pauli) channel Λ_U and the maximally non-unital channel Λ_{NU}^\pm . These maps have all common eigenvalues and three common eigenvectors $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ but

different stationary states,

$$\Lambda_U[\mathbb{I}] = \mathbb{I}, \quad \Lambda_{\text{NU}}^+[|0\rangle\langle 0|] = |0\rangle\langle 0|, \quad \Lambda_{\text{NU}}^- [|1\rangle\langle 1|] = |1\rangle\langle 1|. \quad (41)$$

Notably, Λ^\pm cover the entire class of phase-covariant channels from eq. (39). The corresponding dynamical maps are constructed by encoding the entire time-dependence in the functions $\lambda_\alpha(t)$ and keeping the parameter p constant in time. The master equations of such mixtures display some interesting properties. Namely, I show that the dynamical maps $\Lambda^\pm(t)$ arise from classical mixtures taken on the level of dynamical maps, time-local generators, or memory kernels. In other words, if $\mathcal{L}_U(t)$ and $\mathcal{L}_{\text{NU}}^\pm(t)$ are the time-local generators of $\Lambda_U(t)$ and $\Lambda_{\text{NU}}^\pm(t)$, then the generator for $\Lambda^\pm(t)$ is given by

$$\mathcal{L}^\pm(t) = (1 - |p|)\mathcal{L}_U(t) + |p|\mathcal{L}_{\text{NU}}^\pm(t) \quad (42)$$

(and analogically for memory kernels). Usually, this is not the case, as the relation between master equations and dynamical maps is more complex. To prove the above relation for memory kernel master equations, I first develop the memory kernel approach to phase-covariant channels, providing sufficient conditions and examples of constructing legitimate memory kernels.

In the main part, I examine how the choice of a stationary state influences classical capacities of the channel. This analysis is performed for the generalized amplitude damping dynamical maps $\Lambda(t)$ with $\lambda_1(t) = \cos t$, $\lambda_3(t) = \cos^2 t$, and $\lambda_*(t) = |p|\sin^2 t$, for which the Holevo and entanglement-assisted classical capacities are known. For exponentially decaying and oscillating eigenvalues, I calculate these capacities for different positive values of p (due to $p \mapsto -p$ symmetry [R101, R102]). For non-unital maps, only numerical solutions are found because of implicit functions appearing in the capacity formulas. By increasing the non-unitality degree of dynamical maps, I prove that one obtains an absolute increase in both the Holevo and entanglement-assisted capacities. For non-unital channels, the lower bound of the classical capacity temporary exceeds even the entanglement-assisted classical capacity of unital channels, which is shown in Fig. 10.

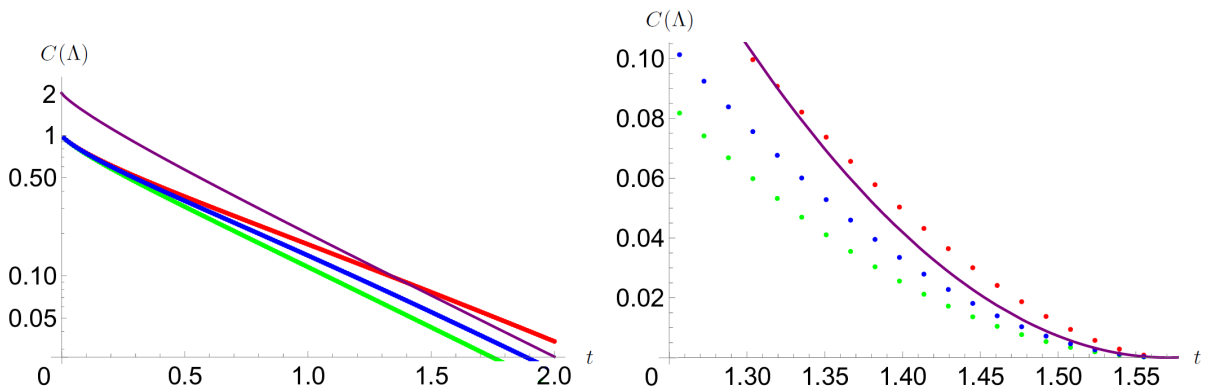


Fig. 10: Plots representing time-evolution of classical capacity bounds for exponentially decaying (left) and oscillating (right) functions $\lambda(t)$ for generalized amplitude damping channels. The color curves correspond to the entanglement-assisted capacity for $p = 0$ (purple), as well as to the Holevo capacity for $p = 2/3$ (green), $p = 0.9$ (blue), and $p = 1$ (red) [H12].

Analogical results for the classical capacity bounds are then repeated for the generalized shifted depolarizing channel $\Lambda(t)$ with $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = \lambda(t)$ and $\lambda_*(t) = p(1 - \lambda(t))$ [R103]. This could indicate that capacity increasing along with non-unitality is a general property of phase-covariant qubit channels. Moreover, this also proves that non-unitality is an important quantum resource for information transition purposes, as it can help to generate higher capacities than quantum entanglement.

My results prove that various types of noise can be used to engineer quantum channels with increased transmission parameters measured by the channel fidelity, maximal output purity,

concurrence, and channel capacities. In particular, decoherence noises implemented through memory kernel addition allow for temporary enhancements in the case of unital maps, like the Pauli channels and generalized Pauli channels. In the case of phase-covariant channels, classical noise can be used to introduce non-unitality and improve channel performance at every moment in time. The increase of classical capacity is so significant that it can even surpass the entanglement-assisted classical capacity of unital channels.

Further generalizations of Pauli channels

During the generalization of the Pauli channels to qudit maps, a crucial role is played by the mutually unbiased bases (MUBs). By definition, these are orthonormal vector bases such that the probability of transition between any two vectors from different bases is constant. However, the concept of mutual unbiasedness can be extended to measurement operators. Kalev and Gour [R104] introduced mutually unbiased measurements (MUMs) $\{P_k^{(\alpha)} : \alpha = 1, \dots, d+1; k = 0, \dots, d-1\}$, which are $d+1$ sets of positive operators that sum up to the identity operator and contain the projectors onto MUB vectors as a special case of projective measurements.

[H13] *Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements*

Mutually unbiased measurements are non-projective generalizations of MUBs and therefore perfect candidates to replace them in Nathanson and Ruskai's definition of generalized Pauli channels [R48]. This way, the channels retain the form

$$\Lambda = \pi_0 \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^{d+1} \pi_{\alpha} \Phi_{\alpha} \quad (43)$$

but with Φ_{α} given by

$$\Phi_{\alpha}[X] = \sum_{k=0}^{d-1} P_k^{(\alpha)} \text{Tr}(X P_k^{(\alpha)}). \quad (44)$$

For MUBs, formulas in eqs. (11) and (44) are mathematically equivalent. However, only a substitution in eq. (44) does not affect complete positivity nor trace-preservation of Φ_{α} . Importantly, it is known how to construct Λ in composite dimensions only when mutually unbiased measurements are not projective.

In my paper, I propose the above-mentioned generalization of the Pauli channels using mutually unbiased measurements. I analyze the properties of both Λ and Φ_{α} , including eigenvalue equations, complete positivity conditions, and entanglement breaking conditions. For my generalization of Pauli channels, I derive the maximal output purity measure and show that it is multiplicative ($\nu(\Lambda \otimes \Omega) = \nu(\Lambda)\nu(\Omega)$ for any quantum channel Ω) if and only if Λ is constructed from MUBs. I also provide illustrative examples of channels, where the MUMs are constructed from Gell-Mann matrices or Heisenberg-Weyl observables.

The generalized Pauli channels have found wide applications in the theory of open quantum systems and non-Markovianity. They have been used to construct classical mixtures with a high number of negative decoherence rates. In quantum information processing, they helped to show that noise can enhance transitional properties of quantum channels, like channel fidelity, output purity, or even classical capacity. I believe that my generalization with mutually unbiased measurements has a similar potential. In quantum information theory, it has already been shown that positive maps constructed from MUMs successfully detect bound entanglement [P2]. This property was earlier proved for positive maps constructed from MUBs [R105].

4.2.3 Description of other research achievements

Analyzing the Pauli channels and their generalizations has always been my main interest. However, over the years, several other, smaller projects caught my attention. In this section,

I briefly describe all my other achievements published after obtaining my PhD. After a closer inspection, it can be noted that the linear maps I analyze in these works also generalize the Pauli channels – to positive Pauli maps, to continuous-variable Weyl channels (mixed unitary generalization of the Pauli channels), or to positive maps constructed with mutually unbiased bases and their generalizations (that contain the generalized Pauli maps as a special example). Nevertheless, the main focus is shifted to the Gaussian channels, entanglement detection, and quantum measurements. In my opinion, my influence on the listed research areas has been insufficient to warrant their inclusion into my habilitation achievement.

Generalized symmetric measurement operators

In quantum information processing, quantum measurements are crucial tools for gaining information about quantum states. Measurement operations are extensively used in quantum information theory. The measurement operators are represented by positive operator-valued measures (POVMs) – collections of positive semidefinite operators that sum up to the identity. Especially useful are informationally complete measurements, which allow to perform a full tomography of a quantum state [R106]. Among the most popular highly-symmetric measurement operators, there are two classes of projective measurements: symmetric, informationally complete (SIC) POVMs [R107] and projectors onto mutually unbiased bases (MUBs) [R108, R109]. Interestingly, SIC POVMs and MUBs have many common applications, including quantum state tomography [R110, R111], quantum key distribution [R112, R113], and quantum entanglement detection [R114, R115]. They are also often analyzed in the same context [R116, R117, R118, R119]. This indicates that the two objects are closely related.

[P1] *All classes of informationally complete symmetric measurements in finite dimensions*

In my paper, I introduce a common generalization of SIC POVMs and MUBs, proving that they are two special cases of a more general concept: mutually unbiased symmetric measurements. Namely, I consider an (N, M) -POVM, which is a set of N POVMs $\{E_{\alpha,k}; k = 1, \dots, M\}$, and impose the following symmetry conditions:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E_{\alpha,k}) &= \frac{d}{M}, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}^2) &= x, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}E_{\alpha,\ell}) &= \frac{d - Mx}{M(M-1)}, \quad \ell \neq k, \\ \text{Tr}(E_{\alpha,k}E_{\beta,\ell}) &= z = \frac{d}{M^2}, \quad \beta \neq \alpha, \end{aligned} \tag{45}$$

where x is a free parameter from the range

$$\frac{d}{M^2} < x \leq \min \left\{ \frac{d^2}{M^2}, \frac{d}{M} \right\}. \tag{46}$$

If $x = d^2/M^2$, then the POVMs are projective measurements. Therefore, there are no projective (N, M) -POVMs for $M < d$. Informationally complete measurements introduce an additional constraint $(M-1)N = d^2 - 1$ between the number of POVMs N and operators in each POVM M . Further analysis shows that, in any finite dimension $d > 2$, there are at least four families of (N, M) -POVMs:

- (i) $M = d^2$ and $N = 1$ (general SIC POVM [R120]),
- (ii) $M = d$ and $N = d + 1$ (mutually unbiased measurements [R104]),
- (iii) $M = 2$ and $N = d^2 - 1$,

(iv) $M = d + 2$ and $N = d - 1$.

For the general case, I provide a construction method from Hermitian orthonormal bases. In dimension $d = 4$, I also find an example of a $(3, 2)$ -POVM (family (iii)) with the maximal value of $x = 2$, where the measurement operators are rank-2 projectors. Finally, I list possible applications of the introduced symmetric measurements in entropic uncertainty relations and entanglement detection, generalizing the ESIC criterion [R115] as well as the criteria based on mutually unbiased bases [R114], mutually unbiased measurements [R121], and general SIC POVMs [R122].

My results suggest that symmetric measurements can potentially find just as many theoretical and experimental applications as SIC POVMs, MUBs, and their generalizations. In entanglement detection, they have already been used in formulation of improved separability criteria [R123, R124, R125, R126] and construction of bound entanglement witnesses [P3]. Recently, symmetric measurements have also been implemented to characterize entropic uncertainty relations [R127] and average coherence [R128], with two more preprints on steering and entanglement detection on the way [R129, R130]. Other applications include quantum key distribution protocols with improved noise tolerance [R131] and optimal state estimation with conical 2-designs [R132]. Finding additional analogues between the structures of SIC POVMs and MUBs could help determine the existence of maximal sets of MUBs and SIC POVMs in all finite dimensions, which is a popular open problem [R133].

Positive maps and entanglement detection

Entanglement is a precious quantum resource for the purposes of quantum communication and information processing, quantum computation, and other modern technologies [R134, R2]. Its strength lies in ensuring better performance in many quantum tasks, like teleportation [R135] and channel discrimination [R136]. Despite its importance, quantification and characterization of quantum entanglement is a demanding open problem [R137]. For composite dimensions $d > 6$, the Peres-Horodecki positive partial transposition (PPT) criterion is no longer sufficient for separability [R138]. Therefore, it becomes necessary to develop other detection methods. A popular way involves calculating an expectation value $\text{Tr}(W\rho)$ of a block-positive (but not positive) Hermitian operator W in a given state ρ . A separable state ρ returns $\text{Tr}(\rho W) \geq 0$ on all entanglement witnesses. Therefore, a state is entangled if there exists a witness W for which $\text{Tr}(\rho W) < 0$ [R139].

Using positive (but not completely positive) maps Φ , one can construct the corresponding $W = \sum_{i,j=0}^{d-1} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi[|i\rangle\langle j|]$, where $|k\rangle$ denotes an orthonormal basis in $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$. Hence, the main challenge reduces to finding positive maps, for which there is no general method. Nonetheless, there have been several successful attempts that used measurement operators, like mutually unbiased bases [R105, R140, R141], mutually unbiased measurements [R142], or SIC POVMs [R143].

In my works, I introduce new classes of positive maps and entanglement witnesses defined via mutually unbiased measurements as well as symmetric measurements from ref. [P1]. Special attention is given to indecomposable witnesses – that is, witnesses that cannot be decomposed into $W = A + B^\Gamma$ with positive A, B , where Γ denotes a partial transposition. Such operators are invaluable in detecting bound entanglement (entanglement of PPT states) [R139]. Finally, I also introduce a family of contractive maps, which provides a refined characterization of entangled states.

[P2] *Entanglement witnesses from mutually unbiased measurements*

This paper incorporates mutually unbiased measurements (MUMs) to define a new class of

positive, trace preserving maps

$$\Phi = \frac{1}{d\kappa - 1} \left[(d\kappa - 1 - N + 2L)\Phi_0 + \sum_{\alpha=L+1}^N \Phi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^L \Phi_\alpha \right]. \quad (47)$$

In the above formula, $\Phi_0[X] = \mathbb{I}_d \text{Tr}(X)/d$ is the completely depolarizing channel, and

$$\Phi_\alpha[X] = \sum_{k,\ell=0}^{d-1} \mathcal{O}_{k\ell}^{(\alpha)} P_k^{(\alpha)} \text{Tr}(P_\ell^{(\alpha)} X) \quad (48)$$

are maps constructed from orthogonal rotations $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ preserving the maximally mixed vector ($\mathbf{n}_* = (1, \dots, 1)/\sqrt{d}$) and MUMs $P_k^{(\alpha)}$ with purity κ . Observe that the coefficient in front of Φ_0 increases with the number of subtrahends L .

Interestingly, in the positivity proof, the condition $P_k^{(\alpha)} \geq 0$ is not used. Hence, $P_k^{(\alpha)}$ characterized by an arbitrary real parameter κ give rise to a positive, trace-preserving map Φ even if $P_k^{(\alpha)} \not\geq 0$ (i.e., $P_k^{(\alpha)}$ are not measurement operators). However, even though κ is not explicitly in the formula for the associated entanglement witness W , the properties of W depend on the optimal value of κ . For instance, the MUMs constructed from the Gell-Mann matrices (for which $\kappa_{\text{opt}} = \frac{d+2}{d^2}$) produce less indecomposable witnesses than MUBs ($\kappa_{\text{opt}} = 1$).

In the qutrit-qutrit case, I provide several examples indecomposable witnesses together with the detected PPT states. Examples of decomposable witnesses and their decomposition are also given. The ability of W to detect entanglement is then compared with the CCNR (computable cross-norm or realignment) separability criterion.

Finally, I find that the presented class of entanglement witnesses constructed from mutually unbiased measurements belongs to the large family of witnesses based on the CCNR separability criterion [R144]

$$W' = \mathbb{I}_{d^2} - \sum_{\mu,\nu=0}^{d^2-1} Q_{\mu\nu} G_\mu^T \otimes G_\nu. \quad (49)$$

In this equation, $Q_{\mu\nu}$ is an orthogonal matrix, and G_μ are operators of an arbitrary Hermitian basis. The witnesses W are recovered for $G_0 = \mathbb{I}_d$, traceless G_μ ($\mu > 0$), and a special form of the block-diagonal Q .

[P3] *Indecomposability of entanglement witnesses constructed from symmetric measurements*

This article is a continuation of ref. [P2] that replaces the mutually unbiased measurements in the definition of positive maps Φ with the symmetric measurements introduced in ref. [P1]. Namely, an (N, M) -POVM (not necessarily informationally complete) is used to construct N trace-preserving maps

$$\Phi_\alpha[X] = \frac{M}{d} \sum_{k,\ell=1}^M \mathcal{O}_{k\ell}^{(\alpha)} E_{\alpha,k} \text{Tr}(X E_{\alpha,\ell}), \quad (50)$$

and finally a positive, trace-preserving map

$$\Phi = \frac{d}{d-1} \frac{M-1}{xM^2-d} \left[\left(\frac{d-1}{d} \frac{xM^2-d}{M-1} - N + 2L \right) \Phi_0 + \sum_{\alpha=L+1}^N \Phi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^L \Phi_\alpha \right]. \quad (51)$$

Similarly to the MUM case, the conditions $E_{\alpha,k} \geq 0$ are not necessary for the positivity of Φ . Hence, once again, this map does not depend on the parameter x and can be defined using $E_{\alpha,k} \not\geq 0$. However, this time, the choice of symmetric measurements influences the witness through the number M of operators inside a single POVM. The greater M , the more admissible subtrahends L .

Just like in ref. [P2], the associated witnesses are a part of the class related to the CCNR criterion [R144]. The same witnesses can arise from different choices of (N, M) -POVMs as long

as they are obtained from the same orthonormal Hermitian basis. I give examples of indecomposable entanglement witnesses for qutrit-qutrit systems. It is shown that measurements with non-optimal x can also give rise to indecomposable witnesses, which was not observed in ref. [P2]. In addition, entanglement witnesses constructed from (N, M) -POVMs with $x < x_{\text{opt}}$ can detect entangled states undetectable when $x = x_{\text{opt}}$. For a $(5, 1)$ -POVM, whose indecomposability is inconclusive, I propose a finer indecomposable witness with a detectable PPT state that could not be detected by the unrefined witness. Moving to ququart-ququart systems, I construct an indecomposable entanglement witness from a $(15, 2)$ -POVM with the optimal $x_{\text{opt}} = x = 2$, where the measurement operators are rank-2 projectors. For this witness, I find a two-parameter family of detectable PPT states.

[P4] *Interpolating between Positive and Completely Positive Maps: A New Hierarchy of Entangled States*

While completely positive, trace-preserving maps represent quantum processes, maps that are only positive have their own unique applications, e.g. in entanglement detection and quantifying non-Markovianity of quantum evolution. Between positive and completely positive maps, there exists a whole hierarchy of k -positive maps. From definition, Φ is a k -positive map if its extension $\mathbb{1}_k \otimes \Phi$ is positive. Note that positivity of Φ is recovered for $k = 1$, and complete positivity follows for $k = d$. The intermediate maps are used to characterize degrees of non-Markovianity and establish a hierarchy of entangled states [R23].

In this work, I introduce a further refinement in the classification of positive, trace-preserving maps inspired by the non-Markovianity strength from ref. [R145]. The new families of k -partially contractive maps Φ are defined in such a way that their extensions $\mathbb{1}_k \otimes \Phi$, $k = 1, \dots, d^2$ are contractions ($\|(\mathbb{1}_k \otimes \Phi)[X]\|_{\text{tr}} \leq \|X\|_{\text{tr}}$) but only on subspaces of dimension $k \times d^2$. The extremal values $k = 1$ and $k = d^2$ correspond to positive (PTP) and completely positive (CPTP), trace preserving maps, respectively. Actually, there is the following inclusion relation,

$$\text{CPTP maps} = \mathcal{C}_{d^2} \subset \mathcal{C}_{d^2-1} \subset \dots \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 = \text{PTP maps}, \quad (52)$$

where \mathcal{C}_k is the set of k -partially contractive maps.

The concept is illustrated for the qubit maps, where there is one class interpolating between PTP and CPTP maps: 3-partially contractive Φ . First, it is shown that this class indeed introduces a refined hierarchy of maps by proving that transposition is positive but not 3-partially contractive. Then, examples of depolarizing and depolarizing transpose maps that belong to the intermediate class are provided. Interestingly, there is an intricate connection between 3-partially contractive and the Schwarz maps (positive but not completely positive maps) defined by $\Phi[X^\dagger X] \geq \Phi[X^\dagger]\Phi[X]$ [R146, R98]. Partially contractive maps also provide an improved characterization of entanglement states, analogical to the hierarchy in terms of the Schmidt number [R147, R148]. This is illustrated on a simple example of two-qubit isotropic states.

In my works, I present new families of positive, trace preserving maps with applications in entanglement quantification and detection. The results include indecomposable entanglement witnesses constructed from mutually unbiased measurements and symmetric measurements, which make it possible to detect PPT states. Further characterization of witnesses, like their extremality or optimality, is an interesting open problem that requires more study. Another research direction is to generalize the results to multipartite scenario. On the other hand, for partially contractive positive maps, the next step is to construct less restrictive sufficient conditions for 3-partial contractivity of qubit maps. Then, a complete set of relations between contractive maps and the Schwarz maps could be established. The final goal is to establish construction methods for k -partial contractive maps in higher dimensions d and their relations to k -positive maps. This would allow for a refined characterization of entangled states as well as non-Markovianity degree of open quantum systems evolution.

Geometry of the Gaussian channels

[P5] *Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels*

In this article, I apply the methods developed in refs. [R149, R150] to analyze the geometry of one-mode quantum Gaussian channels. The Hilbert-Schmidt line and volume elements for the Gaussian states are defined on the manifold of the corresponding Choi-Jamiołkowski states with a fixed marginal. In order to calculate volumes of channels, it is necessary to perform the local symplectic decomposition of the corresponding covariance matrix. The volume integrals can be solved analytically up to the divergent part, which is the integral over the symplectic group. However, this same part is also present in the volume formulas for certain subclasses of Gaussian channels. Hence, the relative volumes of quantities invariant under local symplectic transformations are finite. I use this fact to find the volumes of entanglement breaking and incompatibility breaking channels among all one-mode Gaussian channels. Interestingly, the geometry depends on the choice of the common marginal state σ of bipartite Gaussian states. The results are presented in Fig. 11 and can be interpreted as a likelihood to encounter a Gaussian channel with given properties.

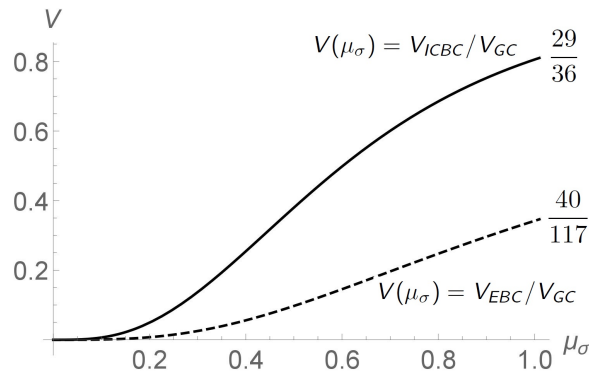


Fig. 11: The relative volumes of the entanglement breaking (dashed line) and incompatibility breaking (solid line) channels with respect to all one-mode Gaussian channels as functions of the marginal purity μ_σ [P5].

Finally, it turns out that even incomplete information about the one-mode Gaussian channels one can determine their steerability and ability to break quantum entanglement. Assuming that only the total and marginal purities of the corresponding Choi-Jamiołkowski states are known, regions and volumes of separable and entangled states are found. There is also a co-existence region, where distinguishing between separability and entanglement is possible only with the full knowledge about the system.

For future research, an interesting topic would be to analyze the geometry of other special subclasses of the Gaussian channels, like the amplitude damping channels, quantum limited channels, and the channels considered in refs. [R151, R152]. For now, my results have been cited in works that consider the geometry with the Bures metric [R153] and geometrical input coherent states [R154].

4.2.4 Influence on future research and open questions

As a mathematical physicist, I apply advanced methods in mathematics and physics to analyze Pauli channels and their generalizations with applications in quantum information, open quantum systems, quantum communication and information processing. All the listed fields are very popular, rapidly developing research areas. Since I obtained my PhD until the moment of writing this application, there have been almost 9,000 preprints published on arXiv with these research areas names in their titles or abstract. The phrase *Pauli channels* alone appears 45 times in the titles or abstracts of other researchers. This is a respectable number, considering

that the Pauli channels and their generalizations are often used merely as instructive examples to illustrate broader ideas.

In what follows, I compare the state of knowledge before and after the works from my habilitation achievement were published. For each research topic, I clearly state my contribution to the field. I also briefly comment on the most important references to my articles.

(1) *Geometry on the space of quantum channels*

After geometrical considerations on the sets of quantum states, attention was moved to the properties of quantum channels. Lovas and Andai [R155] computed the the volume of unital qubit channels among all qubit channels with respect to the Lebesgue measure. Using the Hilbert-Schmidt measure, Szarek et. al. [R156] derived bounds on the volumes of positive trace-preserving qudit maps. Jagadish et al. [R65] introduced a volume measure to calculate the volume of the Pauli channels with respect to positive, trace-preserving Pauli maps. Volumes of channels simulable via a one-qubit environment were found for the Pauli channels [R157] and generalized amplitude damping channels [R158]. Also for the Pauli channels, the geometry of maps accessible with the Lindblad semigroup was analyzed in refs. [R159, R160]. There also exist results for continuous variable systems. Monras and Illuminati [R161] analyzed the geometry of quantum Gaussian channels with respect to the Bures-Fisher metric.

My input into the geometry of quantum maps is calculating relative volumes for important classes of Pauli channels, generalized Pauli channels, and phase-covariant channels. Here, I apply the methods developed for the Gaussian channels on continuous variable systems to the finite-dimensional case [P5]. That is, I introduce geometrical structures on the space of the corresponding Choi-Jamiołkowski states with the metric induced by the Hilbert-Schmidt inner product. New results include volumes of positive and completely positive, trace-preserving maps, entanglement breaking channels, channels obtainable with time-local generators, as well as P and CP-divisible maps.

The influence of my articles on geometrical papers of other researchers can be seen in the citations. For qubits, Zhou et al. [R162] calculates relative volumes of states completely represented by convex mixing in a usable set. Shahbeigi et al. [R163] analyze the geometry of mixed unitary qudit channels accessible by a Lindblad semigroup. On a similar note, geometrical properties of the set of accessible maps are analyzed in ref. [R164]. Finally, Jagadish et al. open a new direction, which is analyzing the geometry of quantum dynamical maps. For the Pauli channels, the authors establish the volume of non-CP-divisible dynamical maps among convex combinations of Markovian semigroups [R72] and their simple generalization [R73]. Moreover, for the generalized Pauli dynamical maps, they evaluate the fraction of invertible dynamical maps upon mixing non-invertible maps [R51].

Further studies include a comparative analysis of the channel geometry on the space of quantum states under other metrics, like the Fisher-Rao [R165], Bures [R166, R167], or Hastings measure [R168, R169]. An interesting direction is providing a full characterization of relative volumes for the generalized Pauli channels and other qudit channels. Another open question is to consider the geometry of non-unital quantum channels.

(2) *Classical mixtures of dynamical maps*

The development in this research topic began after Megier et al. [R67] showed that eternally non-Markovian evolution of a qubit can result from a classical mixture of two Pauli dynamical semigroups. This nontrivial effect was later explained in terms of information flow by Breuer et al. [R68]. During my PhD, I proved that eternal non-Markovianity can also arise from mixing generalized Pauli semigroups [P7, P10]. On the other hand, Wudarski and Chruściński obtained a Markovian semigroup via a convex combination of two non-Markovian qudit evolutions [R69].

My contribution to the theory of classical mixtures of dynamical maps is as follows. When I started analyzing this subject, the only mixtures considered in literature were of Markovian semigroups and two simple non-CP-divisible maps from ref. [R69]. Therefore, a natural question arose: what happens if I replace Markovian semigroups with more general maps? First, I consider convex combinations of CP-divisible dynamical maps and showed that it is possible to produce an eternally non-Markovian evolution with much more than one negative decoherence rate. Next, I move my attention to non-invertible maps. There, I am able to show that dynamical maps describing highly non-Markovian evolution can be mixed into a Markovian semigroup. Finally, I relax the constraints of unitality and commutativity of dynamical maps, proving that their mixtures behave in a significantly different way than mixtures of bistochastic maps.

Simultaneously, another research group has been working on mixtures of Pauli and then generalized Pauli dynamical maps. Jagadish et al. [R72] started with mixing three Pauli dynamical semigroups and fully characterizing the resulting Pauli simplex. Next, the authors characterized the region of non-Markovian mixtures arising from convex combinations of three CP-divisible Pauli dynamical maps [R73]. Actually, it was their publication on singularities elimination via mixing the Pauli dynamical maps [R170] that inspired me to consider non-invertible mixtures of generalized Pauli maps [H6]. On the other hand, Jagadish et al. [R52] generalized my result and proved that non-invertibility of the generalized Pauli dynamical maps is necessary to produce the Markovian semigroup. The authors were the first to analyze geometry of dynamical maps [R51]; in particular, a volume of invertible mixtures of non-invertible generalized Pauli dynamical maps. Finally, in their latest preprint [R171], they analyze non-invertibility and non-Markovianity for mixtures of Pauli dynamical maps. An alternative approach to mixtures of Markovian semigroups was developed by Budini et al. [R172], where the convex combination is taken with respect to the probability distribution in the Kraus form. Other groups expanded the knowledge of eternally non-Markovian evolution [R173, R174, R175]. At last, my research was cited in a review paper on non-Markovian evolution [R176].

Despite a significant development in recent years, classical mixtures of dynamical maps are still a relatively unexplored topic. From among all quantum dynamical maps, partial results are only known for the Pauli channels, generalized Pauli channels, and phase-covariant channels. Convex combinations of only P-divisible maps have not been considered; neither have mixtures with time-dependent mixing parameters nor with different singularity points. It would be most interesting to go beyond generalizations of Pauli maps and obtain analyze the behavior of even more general classes of channels.

(3) *Enhancing communication properties of channels with noise*

The idea of noise beneficial for quantum evolution began with the observation that dissipation can be used as a quantum resource. First applications include enhanced quantum information processing [R84] and state engineering [R85]. Marshall et al. [R86] developed dissipation-assisted modular networks that allow for controlling the loss of coherence and concurrence. Qubit state detection was enhanced by Gillard et al. [R87] via thermal noise manipulation. Finally, memory effects associated with environmental noise were used to suppress error rates of the Pauli channel fidelity [R88]. During my PhD, I showed that similar results can be observed when engineering the channel fidelity, quantum entanglement, von Neumann entropy, and quantum coherence for the generalized Pauli channels [P13]. These results indicated that classical capacity of the qudit channels could also be improved with environmental noise. However, not many analytical capacity formulas were known. A renewed interest in classical capacity of quantum channels began to grow after Rehman et al. [R94, R95] found the lower and upper bounds for the Holevo capacity of the Weyl channels.

My first input into this field is finding the Holevo capacity bounds for generalized Pauli channels. I also prove weak additivity of the lower bound and provided analytical formulas for the classical capacity of two-parameter classes of channels. These results are then applied to show that capacity of generalized Pauli channels can be enhanced after disturbing the Markovian semigroup on the level of memory kernel master equations. For the phase-covariant qubit channels, I derive other measures of transition readiness, like extremal channel fidelities and maximal output purities. After providing a memory kernel formulation, I prove that stationary states and non-unitality degree of dynamical maps can be manipulated via mixing on the level of either maps, time-local generators, or memory kernels. My results confirm that the maximal channel fidelity on pure states, maximal output purities, and classical capacity can be improved by introducing more non-unitality to the quantum channel.

Later on, continuing the work on channel capacity, Amosov [R177] calculated the classical capacity for deformations of quantum-classical Weyl channels. Li and Zheng [R178] found the lower bounds of classical capacity for two-qubit correlated channels. While beneficial noise engineering remains relatively unpopular, several error mitigation techniques have been applied to the Pauli channels and their generalization. Teo et al. [R179] used virtual distillation to prove that the error-mitigation performance can be improved under the multiqubit loss channels and Pauli noise channels. Rehman et al. [R180] utilized the measurement error mitigation framework to reduce the noise on the probe states caused by the generalized Pauli channels. In experiments, Lee et al. [R181] implement the variational quantum eigensolver equipped with an efficient protocol for Pauli noise reduction to estimate the ground state energy of the cation. On the other hand, Roncallo et al. [R182] introduce a noise deconvolution technique for obtaining noiseless expectation values of noisy observables at the output of both Pauli and non-Pauli channels.

An interesting open question is to find capacity formulas or bounds for wider families of the generalized Pauli and phase-covariant channels. Characterization of classical capacity, quantum capacity, and entanglement-assisted classical capacity is one of my research goals in the SONATA grant. Other future studies could include possible generalizations of methods to engineer beneficial noises to non-unital qudit channels. In a possible approach, one can consider phase-covariant multi-user quantum transformations [R183, R184, R185].

(4) *Further generalizations of Pauli channels*

There are two directions in which the Pauli channels are generalized: to qudit maps or to non-unital qubit maps. The problem with higher-dimensional generalizations is that there is no way to preserve all the properties of the Pauli matrices. If σ_α are replaced with the (unitary) Weyl operators, then the resulting (Weyl or Weyl-covariant) channel is mixed unitary. The generalization with (Hermitian) Gell-Mann matrices can be done in two non-equivalent ways: by substituting σ_α in the Kraus representation or in the eigenvalue equations [P11]. If the operators that generalize the Pauli matrices have mutually unbiased eigenbases, then one recovers Nathanson and Ruskai's generalized Pauli channels [R48]. Recall that such operators can be grouped into mutually commuting sets of unitary operators that form commutative subalgebras. This construction can be generalized further if one replaces the commutative subalgebras with complementary, non-commutative subalgebras. Then, one arrives at Ohno and Petz's generalization of the Pauli channels [R45].

In my article, I introduce a new generalization of the Pauli channels, basing its construction on mutually unbiased measurements. I also provide a partial analysis, including the characterization of their complete positivity as well as the conditions for breaking quantum entanglement.

So far, no further works have been published on this Pauli channel generalization. In my

publication on entanglement detection [P2], I provide a characterization of positive but not completely positive maps that generalize the aforementioned channel construction. Right now, I am working on formulating the time-local and non-local descriptions of their dynamics. I expect that there may be some connection between the non-Markovianity degree of evolution and the purity factor that characterizes MUMs.

I realized my habilitation research while working in three National Science Centre grants: PRELUDIUM, MAESTRO, and SONATA. During my research, I discovered many interesting open problems that I would like to investigate in my ongoing SONATA grant. Some are a direct result of my work on PhD and beyond, some are new directions that will broaden my horizons. My research plan includes deriving formulas for classical and quantum channel capacities, characterization of error mitigation techniques in open quantum systems, constructing and analyzing new entanglement witnesses, and further enhancement of the hierarchization of positive maps. Besides these topics, I would like to use symmetric measurements to construct quantum channels and perform tomography of quantum states, as well as further investigate mixtures of dynamical maps.

4.2.5 Bibliography

H. Publications included in the habilitation achievement

- [H1] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **100**, 062331 (2019).
- [H2] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **101**, 062323 (2020).
- [H3] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **102**, 062615 (2020).
- [H4] K. Siudzińska, *Geometry of phase-covariant qubit channels* (2023), doi: 10.1088/2399-6528/ace0f4.
- [H5] K. Siudzińska and D. Chruściński, J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 375305 (2020).
- [H6] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **103**, 022605 (2021).
- [H7] K. Siudzińska, J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 215201 (2022).
- [H8] K. Siudzińska, J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 405303 (2022).
- [H9] K. Siudzińska, J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 445301 (2020).
- [H10] K. Siudzińska, A. Das, and A. Bera, Entropy **23**, 1382 (2021).
- [H11] K. Siudzińska and M. Studziński, J. Phys. A: Math. Theor. **56**, 205301 (2023).
- [H12] K. Siudzińska, J. Phys. A: Math. Theor. **56**, 235301 (2023).
- [H13] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **102**, 032603 (2020).

P. Other publications of the habilitant

- [P1] K. Siudzińska, Phys. Rev. A **105**, 042209 (2022).
- [P2] K. Siudzińska and D. Chruściński, Sci. Rep. **11**, 22988 (2021).
- [P3] K. Siudzińska, Sci. Rep. **12**, 10785 (2022).
- [P4] K. Siudzińska, S. Chakraborty, and D. Chruściński, Entropy **23**, 625 (2021).
- [P5] K. Siudzińska, K. Luoma, and W. T. Strunz, Phys. Rev. A **100**, 062308 (2019).
- [P6] K. Siudzińska and D. Chruściński, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 405202 (2015).

- [P7] D. Chruściński and K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **94**, 022118 (2016).
- [P8] K. Siudzińska and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **96**, 022129 (2017).
- [P9] K. Siudzińska, *Rep. Math. Phys.* **80**, 361–372 (2017).
- [P10] K. Siudzińska and D. Chruściński, *J. Math. Phys.* **59**, 033508 (2018).
- [P11] K. Siudzińska, *Rep. Math. Phys.* **81**, 321–345 (2018).
- [P12] K. Siudzińska, *Phys. Rev. A* **99**, 012340 (2019).
- [P13] K. Siudzińska and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **100**, 012303 (2019).

R. References of other authors

- [R1] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge 2018.
- [R2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [R3] P. Zoller and et al., *Eur. Phys. J. D* **36**, 203–228 (2005).
- [R4] M. F. Riedel, D. Binosi, R. Thew, and T. Calarco, *Quantum Sci. Technol.* **2**, 030501 (2017).
- [R5] M. Pavicic, *Quantum Computation and Quantum Communication: Theory and Experiments*, Springer US, New York 2006.
- [R6] D. Heiss, ed., *Fundamentals of Quantum Information: Quantum Computation, Communication, Decoherence and All That*, Springer-Verlag, Berlin 2002.
- [R7] E. Brüning and F. Petruccione, eds., *Theoretical Foundations of Quantum Information Processing and Communication*, Springer, Berlin 2010.
- [R8] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Verlag, Berlin 1983.
- [R9] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Oxford 2003.
- [R10] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore 2012.
- [R11] W. F. Stinespring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 211 (1955).
- [R12] I. de Vega and D. Alonso, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 15001 (2017).
- [R13] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [R14] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [R15] N. K. Bernardes, A. Cuevas, A. Orioux, C. H. Monken, P. Mataloni, F. Sciarrino, and M. F. Santos, *Sci. Rep.* **5**, 17520 (2015).
- [R16] J. Jin, V. Giovannetti, R. Fazio, F. Sciarrino, P. Mataloni, A. Crespi, and R. Osellame, *Phys. Rev. A* **91**, 012122 (2015).
- [R17] K.-D. Wu, Z. Hou, G.-Y. Xiang, C.-F. Li, G.-C. Guo, D. Dong, and F. Nori, *npj Quantum Inf.* **6**, 55 (2020).
- [R18] T. de Lima Silva, S. P. Walborn, M. F. Santos, G. H. Aguilar, and A. A. Budini, *Phys. Rev. A* **101**, 042120 (2020).
- [R19] S. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **20**, 948 (1958).

- [R20] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960).
- [R21] A. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 050403 (2010).
- [R22] M. M. Wolf, J. Eisert, T. S. Cubitt, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 150402 (2008).
- [R23] D. Chruściński and S. Maniscalco, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 120404 (2014).
- [R24] W. J. Huggins, J. R. McClean, N. C. Rubin, Z. Jiang, N. Wiebe, K. B. Whaley, and R. Babbush, *npj Quantum Inf.* **7**, 23 (2019).
- [R25] C. Monroe, W. C. Campbell, L.-M. Duan, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, P. W. Hess, R. Islam, K. Kim, N. M. Linke, G. Pagano, P. Richerme, C. Senko, and N. Y. Yao, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025001 (2021).
- [R26] J. Preskill, *Quantum* **2**, 79 (2018).
- [R27] G. García-Pérez, M. A. C. Rossi, and S. Maniscalco, *npj Quantum Inf.* **6**, 1 (2020).
- [R28] B.-X. Wang, M.-J. Tao, Q. Ai, T. Xin, N. Lambert, D. Ruan, Y.-C. Cheng, F. Nori, F.-G. Deng, and G.-L. Long, *npj Quantum Inf.* **4**, 52 (2018).
- [R29] R. Croce and H. van Amerongen, *Science* **369**, eaay2058 (2020).
- [R30] S. Rafiq and G. D. Scholes, *J. Am. Chem. Soc.* **141**, 708–722 (2019).
- [R31] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Springer, Berlin 1987.
- [R32] K. M. R. Audenaert and S. Scheel, *New J. Phys.* **10**, 023011 (2008).
- [R33] K. Życzkowski, P. Horodecki, M. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Rev. A* **65**, 012101 (2001).
- [R34] M. Gregoratti and R. F. Werner, *J. Mod. Opt.* **50**, 915 (2003).
- [R35] C. King and M. B. Ruskai, *IEEE Trans. Info. Theory* **47**, 192–209 (2001).
- [R36] L. J. Landau and R. F. Streater, *Linear Algebra Appl.* **193**, 107–127 (1993).
- [R37] A. Fujiwara and P. Algoet, *Phys. Rev. A* **59**, 3290 (1999).
- [R38] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [R39] C. H. Bennett, C. A. Fuchs, and J. A. Smolin, in: O. Hirota, A. S. Holevo, C. M. Caves (eds), *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, Springer, Boston, MA 79–88 (1997).
- [R40] D. Chruściński, A. Rivas, and E. Størmer, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 080407 (2018).
- [R41] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 021002 (2016).
- [R42] J. Cresser and C. Facer, *Opt. Commun.* **283**, 773–780 (2010).
- [R43] S. Daffer, K. Wódkiewicz, J. D. Cresser, and J. K. McIver, *Phys. Rev. A* **70**, 010304(R) (2004).
- [R44] T. Rybar, S. N. Filippov, M. Ziman, and V. Buzek, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45**, 154006 (2012).
- [R45] D. Petz and H. Ohno, *Acta Math. Hungar.* **124**, 165 (2009).
- [R46] D. Chruściński and F. A. Wudarski, *Phys. Rev. A* **91**, 012104 (2015).
- [R47] S. Bandyopadhyay, P. Boykin, V. Roychowdhury, and F. Vatan, *Algorithmica* **34**, 512 (2002).
- [R48] M. Nathanson and M. B. Ruskai, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 8171 (2007).

- [R49] J. U. Rehman and H. Shin, *Simultaneous Communication and Parameter Estimation of Pauli Channels*, in *ICC 2022 - IEEE International Conference on Communications*, 648–653, Seoul, Republic of Korea 2022.
- [R50] J. U. Rehman and H. Shin, *Quantum* **5**, 490 (2021).
- [R51] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **106**, 012438 (2022).
- [R52] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **105**, 032422 (2022).
- [R53] A. Smirne, J. Kołodyński, S. F. Huelga, and R. Demkowicz-Dobrzański, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 120801 (2016).
- [R54] S. N. Filippov, A. N. Glinov, and L. Leppäjärvi, *Lobachevskii J. Math.* **41**, 617–630 (2020).
- [R55] J. Lankinen, H. Lyyra, B. Sokolov, J. Teittinen, B. Ziaei, and S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **93**, 052103 (2016).
- [R56] J. F. Haase, A. Smirne, J. Kołodyński, R. Demkowicz-Dobrzański, and S. F. Huelga, *New J. Phys.* **20**, 053009 (2018).
- [R57] J. Bouda, M. Koniorczyk, and A. Varga, *Eur. Phys. J. D* **53**, 365–372 (2009).
- [R58] A. Harrow, P. Hayden, and D. Leung, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187901 (2004).
- [R59] B. Collins and I. Nechita, *Comm. Math. Phys.* **279**, 345–370 (2010).
- [R60] B. Collins and I. Nechita, *Adv. Math.* **226**, 1181–1201 (2011).
- [R61] B. Collins and I. Nechita, *Ann. Appl. Probab.* **21**, 1136–1179 (2011).
- [R62] M. Fukuda and I. Nechita, *IEEE Trans. Inf. Theory* **64**, 17472877 (2018).
- [R63] M.-D. Choi, *Linear Algebra Appl.* **10**, 285–290 (1975).
- [R64] A. Jamiolkowski, *Rep. Math. Phys.* **3**, 275–278 (1972).
- [R65] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **99**, 022321 (2019).
- [R66] M. J. W. Hall, J. D. Cresser, L. Li, and E. Andersson, *Phys. Rev. A* **89**, 042120 (2014).
- [R67] N. Megier, D. Chruściński, J. Piilo, and W. T. Strunz, *Sci. Rep.* **7**, 6379 (2017).
- [R68] H.-P. Breuer, G. Amato, and B. Vacchini, *New J. Phys.* **20**, 043007 (2018).
- [R69] F. A. Wudarski and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **93**, 042120 (2016).
- [R70] S. A. Uriri, F. Wudarski, I. Sinayskiy, F. Petruccione, and M. S. Tame, *Phys. Rev. A* **101**, 052107 (2020).
- [R71] O. Siltanen, T. Kuusela, and J. Piilo, *Phys. Rev. A* **103**, 032223 (2021).
- [R72] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Rev. A* **101**, 062304 (2020).
- [R73] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Phys. Lett. A* **384**, 126907 (2020).
- [R74] B. Bylicka, M. Johansson, and A. Acin, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 120501 (2017).
- [R75] B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* **55**, 2290–2303 (1996).
- [R76] A. J. van Wonderen and K. Lendi, *J. Stat. Phys.* **100**, 633–658 (2000).
- [R77] E. Andersson, J. D. Cresser, and M. J. W. Hall, *J. Mod. Opt.* **54**, 1695 (2007).
- [R78] S. Chakraborty and D. Chruściński, *Phys. Rev. A* **99**, 042105 (2019).

- [R79] D. A. Lidar, *Adv. Chem. Phys.* **154**, 295–354 (2014).
- [R80] J. Roffe, *Contemp. Phys.* **60**, 226–245 (2019).
- [R81] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2594 (1998).
- [R82] E. Knill, R. Laflamme, and L. Viola, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2525 (2000).
- [R83] L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2417 (1999).
- [R84] F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. I. Cirac, *Nat. Phys.* **5**, 633–636 (2009).
- [R85] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **59**, 2468–2475 (1999).
- [R86] J. Marshall, L. C. Venuti, and P. Zanardi, *Phys. Rev. A* **94**, 052339 (2016).
- [R87] N. Gillard, E. Belin, and F. Chapeau-Blondeau, *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **507**, 219–230 (2018).
- [R88] J. Marshall, L. C. Venuti, and P. Zanardi, *Phys. Rev. A* **96**, 052113 (2017).
- [R89] A. Shabani and D. A. Lidar, *Phys. Rev. A* **71**, 020101(R) (2005).
- [R90] D. Chruściński and A. Kossakowski, *Phys. Rev. A* **95**, 042131 (2017).
- [R91] A. S. Holevo, *IEEE Trans. Info. Theor.* **44**, 269–273 (1998).
- [R92] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, *Phys. Rev. A* **56**, 131–138 (1997).
- [R93] M. B. Hastings, *Nat. Phys.* **5**, 255–257 (2009).
- [R94] J. ur Rehman, Y. Jeong, J. S. Kim, and H. Shin, *Sci. Rep.* **8**, 17457 (2018).
- [R95] J. ur Rehman, Y. Jeong, and H. Shin, *Phys. Rev. A* **99**, 042312 (2019).
- [R96] M. Raginsky, *Phys. Lett. A* **290**, 11–18 (2001).
- [R97] K. Życzkowski and H.-J. Sommers, *Phys. Rev. A* **71**, 032313 (2005).
- [R98] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton 2006.
- [R99] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
- [R100] K. Audenaert, F. Verstraete, and B. D. Moor, *Phys. Rev. A* **64**, 052304 (2001).
- [R101] H. Li-Zhen and F. Mao-Fa, *Chinese Phys.* **16**, 1843 (2007).
- [R102] H. Li-Zhen and F. Mao-Fa, *Chinese Phys. Lett.* **24**, 2482 (2007).
- [R103] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 057901 (2002).
- [R104] A. Kalev and G. Gour, *New J. Phys.* **16**, 053038 (2014).
- [R105] D. Chruściński, G. Sarbicki, and F. A. Wudarski, *Phys. Rev. A* **97(12)**, 032318 (2018).
- [R106] E. Prugovečki, *Int. J. Theor. Phys.* **16**, 321–331 (1977).
- [R107] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, and C. M. Caves, *J. Math. Phys.* **45**, 2171 (2004).
- [R108] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **46**, 570 (1960).
- [R109] M. B. Ruskai, S. Szarek, and E. Werner, *Linear Algebra Appl.* **347(1-3)**, 159–187 (2002).
- [R110] R. B. A. Adamson and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030406 (2010).
- [R111] A. J. Scott, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 13507 (2006).

- [R112] J. M. Renes, Phys. Rev. A **70**, 052314 (2004).
- [R113] N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin, Phys. Rev. Lett. **88**, 127902 (2002).
- [R114] C. Spengler, M. Huber, S. Brierley, T. Adaktylos, and B. C. Hiesmayr, Phys. Rev. A **86**, 022311 (2012).
- [R115] J. Shang, A. Asadian, H. Zhu, and O. Gühne, Phys. Rev. A **98**, 022309 (2018).
- [R116] W. K. Wootters, Found. Phys. **36**, 112–126 (2006).
- [R117] A. E. Rastegin, Eur. Phys. J. D **67**, 269 (2013).
- [R118] R. Beneduci, T. Bullock, P. Busch, C. Carmeli, T. Heinosaari, and A. Toigo, Phys. Rev. A **88**, 032312 (2013).
- [R119] A. Tavakoli, M. Farkas, D. Rosset, J.-D. Bancal, and J. Kaniewski, Sci. Adv. **7**, eabc3847 (2021).
- [R120] A. Kalev and G. Gour, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 335302 (2014).
- [R121] B. Chen, T. Ma, and S.-M. Fei, Phys. Rev. A **89**, 064302 (2014).
- [R122] B. Chen, T. Li, and S.-M. Fei, Quant. Inf. Proc. **14**, 2281–2290 (2015).
- [R123] L. Tang and F. Wu, Phys. Scr. **98**, 065114 (2023).
- [R124] L. Tang, Quantum Inf. Process. **22**, 57 (2023).
- [R125] L. Lai and S. Luo, Commun. Theor. Phys. **75**, 065101 (2022).
- [R126] L. Tang and F. Wu, *Improved bounds on some entanglement criteria in bipartite quantum systems* (2023), doi: 10.1016/j.rinp.2023.106663.
- [R127] F. Huang, L. Tang, and M.-Q. Bai, Int. J. Theor. Phys. **62**, 126 (2023).
- [R128] L. Tang and F. Wu, Quantum Inf. Process. **22**, 65 (2023).
- [R129] M. Schumacher and G. Alber, *Bipartite entanglement detection by local generalized measurements* (2023), arXiv:2305.14226 [quant-ph].
- [R130] M. Schumacher and G. Alber, *Typical bipartite steerability and generalized local quantum measurements* (2023), arXiv:2305.17985 [quant-ph].
- [R131] F. Bouchard, K. Heshami, D. England, R. Fickler, R. W. Boyd, B.-G. Englert, L. L. Sánchez-Soto, and E. Karimi, Quantum **2**, 111 (2018).
- [R132] M. A. Graydon and D. M. Appleby, J. Phys. A: Math. Theor. **49**, 085301 (2016).
- [R133] P. Horodecki, Ł. Rudnicki, and K. Życzkowski, PRX Quantum **3**, 010101 (2022).
- [R134] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [R135] L. Masanes, Phys. Rev. Lett. **96**, 150501 (2006).
- [R136] J. Bae, D. Chruściński, and M. Piani, Phys. Rev. Lett. **122**, 140404 (2019).
- [R137] L. Gurvits, J. Comput. Syst. Sci. **69**, 448–484 (2004).
- [R138] P. Horodecki, Phys. Lett. A **232**, 333–339 (1997).
- [R139] B. M. Terhal, Linear Algebra Appl. **323**, 61–73 (2001).
- [R140] J. Bae, A. Bera, D. Chruściński, B. C. Hiesmayr, and D. McNulty, J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 505303 (2022).

- [R141] B. C. Hiesmayr, D. McNulty, S. Baek, S. S. Roy, J. Bae, and D. Chruściński, *New J. Phys.* **23**, 093018 (2021).
- [R142] M. Salehi, S. J. Akhtarshenas, M. Sarbishaei, and H. Jaghouri, *Quantum Inf. Process.* **20**, 401 (2021).
- [R143] T. Li, L.-M. Lai, D.-F. Liang, S.-M. Fei, and Z.-X. Wang, *Int. J. Theor. Phys.* **59**, 3549–3557 (2020).
- [R144] S. Yu and N.-I. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 150504 (2005).
- [R145] S. Chakraborty, *Phys. Rev. A* **97**, 032130 (2018).
- [R146] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [R147] B. M. Terhal and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* **61**, 040301(R) (2000).
- [R148] B. M. Terhal and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* **61**, 040301(R) (2000).
- [R149] J. Kiukas, C. Budroni, R. Uola, and J.-P. Pellonpää, *Phys. Rev. A* **96**, 042331 (2017).
- [R150] P. Sohr, V. Link, K. Luoma, and W. T. Strunz, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 035301 (2018).
- [R151] A. S. Holevo, *Probl. Inform. Transm.* **43**, 1–11 (2007).
- [R152] F. Caruso, V. Giovannetti, and A. S. Holevo, *New J. Phys.* **8**, 310 (2006).
- [R153] L. Mancino, M. G. Genoni, M. Barbieri, and M. Paternostro, *Phys. Rev. Research* **2**, 033498 (2020).
- [R154] Y. S. Teo, K. Park, S. Shin¹, H. Jeong¹, and P. Marek, *New J. Phys.* **23**, 063024 (2021).
- [R155] A. Lovas and A. Andai, *Rev. Math. Phys.* **30**, 1850019 (2018).
- [R156] S. J. Szarek, E. Werner, and K. Życzkowski, *J. Math. Phys.* **49**, 032113 (2008).
- [R157] G. Narang and Arvind, *Phys. Rev. A* **75**, 032305 (2007).
- [R158] E. Jung, M.-R. Hwang, Y. H. Ju, D. K. Park, H. Kim, M.-S. Kim, and J.-W. Son, *J. Phys. A: Math. and Theor.* **41**, 045306 (2008).
- [R159] S. N. Filippov, J. Piilo, S. Maniscalco, and M. Ziman, *Phys. Rev. A* **96**, 032111 (2017).
- [R160] Z. Puchała, Ł. Rudnicki, and K. Życzkowski, *Phys. Lett. A* **383**, 2376–2381 (2019).
- [R161] A. Monras and F. Illuminati, *Phys. Rev. A* **81**, 062326 (2010).
- [R162] H. Q. Zhou, T. Gao, and F. L. Yan, *EPL* **136**, 20002 (2021).
- [R163] F. Shahbeigi, D. Amaro-Alcalá, Z. Puchała, and K. Życzkowski, *J. Math. Phys.* **62**, 072105 (2021).
- [R164] K. Sadri, F. Shahbeigi, Z. Puchała, and K. Życzkowski, *Open Sys. Inf. Dyn.* **29**, 2250002 (2022).
- [R165] R. A. Fisher, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22**, 700 (1925).
- [R166] D. Bures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **135**, 199–212 (1969).
- [R167] A. Uhlmann, *Rep. Math. Phys.* **9**, 273–279 (1976).
- [R168] M. B. Hastings, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 095305 (2012).
- [R169] M. Fukuda, C. King, and D. Moser, *Commun. Math. Phys.* **296**, 111–143 (2010).

- [R170] S. Utagi, V. N. Rao, R. Srikanth, and S. Banerjee, Phys. Rev. A **103**, 042610 (2021).
- [R171] V. Jagadish, R. Srikanth, and F. Petruccione, *Noninvertibility and non-Markovianity of quantum dynamical maps* (2023), arXiv:2306.12773 [quant-ph].
- [R172] A. A. Budini and J. P. Garrahan, Phys. Rev. A **104**, 032206 (2021).
- [R173] U. Shrikant, R. Srikanth, and S. Banerjee, *On the eternal non-Markovianity of non-unital quantum channels* (2022), arXiv:2203.10625 [quant-ph].
- [R174] A. Das, A. Bera, S. Chakraborty, and D. Chruściński, Phys. Rev. A **104**, 042202 (2021).
- [R175] A. Dąbrowska, D. Chruściński, S. Chakraborty, and G. Sarbicki, New J. Phys. **23**, 123019 (2021).
- [R176] D. Chruściński, Phys. Rep. **992**, 1–85 (2022).
- [R177] G. G. Amosov, Quantum Inf. Process. **19**, 401 (2020).
- [R178] M.-X. Li and Z.-J. Zheng, EPJ Plus **137**, 444 (2022).
- [R179] Y. S. Teo, S. Shin, H. Kwon, S.-H. Lee, and H. Jeong, Phys. Rev. A **107**, 022608 (2023).
- [R180] J. ur Rehman H. Shin, Quantum **5**, 490 (2021).
- [R181] D. Lee, J. Lee, S. Hong, H.-T. Lim, Y.-W. Cho, S.-W. Han, H. Shin, J. ur Rehman, and Y.-S. Kim, Optica **9**, 88–95 (2022).
- [R182] S. Roncallo, L. Maccone, and C. Macchiavello, Phys. Rev. A **107**, 022419 (2023).
- [R183] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, Phys. Rev. A **71**, 042327 (2005).
- [R184] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, Phys. Rev. A **72**, 062311 (2005).
- [R185] F. Buscemi, G. M. D’Ariano, and C. Macchiavello, J. Opt. Soc. Am. B **24**, 363–370 (2007).

5 Presentation of significant scientific or artistic activity carried out at more than one university, scientific or cultural institution, especially at foreign institutions

Research internship at Technische Universität Dresden, Germany (Prof. Walter T. Strunz’s group), from 11.2018 to 04.2019 (6 months). The internship resulted in a publication in Physical Review A and a continued scientific cooperation.

6 Presentation of teaching and organizational achievements as well as achievements in popularization of science or art

6.1 Didactics

Teaching activities conducted at the Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, NCU:

- Mathematical Analysis (tutorial) – 400 hours;
- Advanced Calculus for Technical Science (tutorial) – 180 hours;
- Mathematical Methods in Physics (tutorial) – 70 hours;

- Introduction to Studying (laboratory) – 64 hours;
- Introduction to Open Quantum Systems (lecture in English) – 60 hours;
- Algebra 2 (tutorial) – 60 hours;
- Foundations of Physics (lecture and tutorial, fragments) – 8 hours;
- Classical Electrodynamics (tutorial, fragments) – 4 hours.

Preparation of teaching materials in the form of a script for the Advanced Mathematical Methods course (45 hours, in English) dedicated to the English-speaking studies *Physics and Astronomy* at the NCU.

6.2 Organization

- Member of the organizing committee of the international conference *Symposium on Mathematical Physics* in 2023 (edition 54).
- Member of the committee evaluating entries in the national contest *Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST)* in the years 2021–2023 (editions XII–XIII).
- Help in the organization of the international conference *Symposium on Mathematical Physics* in the years 2015–2022 (editions 45–52).
- Help in the organization of the national contest *Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST)* in the years 2010–2021 (editions I–XI).

7 Additional information

7.1 Prizes and distinctions

- 2023 – Laureate in the field of natural and earth sciences in the 8th edition of the PAS Gdańsk Department Contest for young scientists.
- 2022 – Recipient of the Minister for Education and Science scholarship for outstanding young scientists.
- 2022 – Distinction in the field of natural and earth sciences in the 7th edition of the PAS Gdańsk Department Contest for young scientists.
- 2021 – Rector’s distinction for individual scientific work in the year 2020 (Nicolaus Copernicus University).
- 2021 – Stipendee of the START Programme, Foundation for Polish Sciences.
- 2020 - 2022 – expert providing meritorical support in the application process for a grant from external funds under the programme Excellence Initiative – Expert.
- 2020 – Distinguished PhD Thesis *Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels* in the National Quantum Information Center (KCIK) Silver Award held under the patronage of the Rector of the University of Gdańsk.
- 2016 – Principal investigator of the ”Na dobry początek” grant *Geometrical formulation of the noninteracting quantum fields theory* (5 000 PLN), Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, duration time: 12 months.

7.2 Presentations delivered in the home university

- 2023 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation
- 2022 – Seminar of the University Centre of Excellence “Dynamics, Mathematical Analysis and Artificial Intelligence”
Enhancing properties of quantum dynamical maps with memory kernels
- 2022 – Prezentacja Katedry Fizyki Matematycznej na Dzień Otwarty, Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Open quantum systems
- 2022 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps
- 2021 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
All classes of informationally complete symmetric measurements infinite dimensions
- 2021 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels
- 2020 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Markovian semigroup from mixing non-invertible dynamical maps
- 2020 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Geometry of Pauli and generalized Pauli channels
- 2019 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Unitarily covariant quantum channels in the evolution of open quantum systems

Prior to obtaining the doctorate degree:

- 2017 – Seminar of the research group
Coarse graining a non-Markovian collisional model
- 2016 – Seminar of the research group
Wigner function of a qubit
- 2016 – Seminar of the research group
Quasiprobability representation of quantum mechanics with minimal negativity
- 2016 – Seminar of the research group
Evolution equation for geometric quantum correlation measures
- 2016 – Seminar of the research group
Exploring complete positivity in hierarchy equations of motion
- 2016 – Seminar of the research group
Equivalence between contextuality and negativity of the Wigner function for qudits
- 2016 – Seminar of the research group
The Jordan-Lie-Banach algebra of functions on a Kähler manifold
- 2016 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
The Kähler functions approach to the problem of qubit decoherence

- 2015 – Seminar of the Department of Mathematical Physics
Geometrical approach to quantum states

.....
(applicant's signature)

Wykaz osiągnięć naukowych stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny

Katarzyna Barbara Siudzińska

I. Wykaz osiągnięć naukowych, o których mowa w art. 219 ust. 1. pkt 2 Ustawy

Tytuł osiągnięcia: *Analiza i zastosowania kanałów Pauliego i ich uogólnień.*

I.2. Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b Ustawy

Artykuły wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego wymienione zostały w porządku chronologicznym. Numery odnośników [H1-H13] są zgodne z numerowaniem w Autoreferacie. W nawiasie podano maksymalną punktację na liście Ministerstwa (50 lub 200). Informacja o wskaźniku Impact Factor pochodzi z bazy Expertus UMK / Web of Science. Liczba cytowań pochodzi z bazy Google Scholar (GS) i Web of Science (WS). Gwiazdką oznaczono autorów korespondencyjnych.

1. [H1] *Geometry of Pauli maps and Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **100**, 062331 (2019)

Impact Factor czasopisma: 2,777

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 8 (GS), 7 (WoS)

W tej pracy analizowane są geometryczne własności odwzorowań Pauliego zachowujących ślad. Znajomość ich funkcji własnych wystarczy do znalezienia elementów odległości i objętości indukowanych przez metrykę Hilberta-Schmidta dla stanów Choi-Jamiołkowskiego. Względne objętości kanałów łamiących splątanie i kanałów produkowanych przez generatory lokalne w czasie obliczane są analitycznie i przedstawiane graficznie na wykresach. Dla kanałów Pauliego wyznaczono również procent kanałów dodatnio i kompletnie dodatnio podzielnych, które są związane z pojęciem markowowskości i otwartych układów kwantowych z pamięcią. Wyniki pracy mogą być interpretowane jako prawdopodobieństwo losowego wyboru kanału o pożądanych własnościach. Pokazują one również, jak mały odsetek kanałów można osiągnąć za pomocą generatorów lokalnych w czasie, a więc jak ważny jest dalszy rozwój opisu ewolucji przez jądra pamięci.

2. [H2] *Geometry of generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **101**, 062323 (2020)

Impact Factor czasopisma: 3,140

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 3 (GS), 2 (WoS)

Artykuł ten stanowi kontynuację [H1] i skupia się na analizie geometrycznych własności uogólnionych kanałów Pauliego, skonstruowanych z baz wzajemnie nieobciążonych

(MUB). Analogicznie do przypadku kubitowego, izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego pozwala na wyrażenie elementów długości i objętości Hilberta-Schmidta za pomocą funkcji własnych kanałów. Zarówno obszary całkowania, jak i objętości podklas kanałów, zostały wyznaczone analitycznie. Do analizowanych podklas należą kanały łamiące splątanie oraz kanały produkowanych przez generatory lokalne w czasie skonstruowane z trzech, d lub $d+1$ MUB-ów, gdzie d to wymiar przestrzeni Hilberta. Ponieważ wyniki zależą od wymiaru, zostały one zobrazowane i przedyskutowane na wykresach. Wyznaczono także doolne ograniczenie na objętość wszystkich dodatnich uogólnionych odwzorowań Pauliego, które zachowują ślad.

3. [H5] *Quantum evolution with a large number of negative decoherence rates*

K. Siudzińska* i D. Chruściński

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 375305 (2020)

Impact Factor czasopisma: 2,132

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 16 (GS), 9 (WoS)

W tej pracy poruszany jest wpływ efektów niemarkowowskich na kwantową ewolucję. Efekty te odgrywają znaczącą rolę, gdy układ fizyczny jest silnie sprzężony z otoczeniem i oddziałuje z nim przez względnie długi czas. Wpływ pamięci jest zazwyczaj opisywany przez równania master z generatorami lokalnymi w czasie lub jądrami pamięci. Okazuje się jednak, że silnie niemarkowską ewolucję z wiecznie ujemnymi współczynnikami dekoherencji można otrzymać już poprzez klasyczną mieszaninę półgrup markowowskich. Okazuje się, że dopuszczalna fizycznie ewolucja może być zadana przez generator z nawet $(d-1)^2$ zawsze ujemnymi współczynnikami spośród $d^2 - 1$. Wychodząc poza kombinacje wypukłe półgrup, w artykule analizowane są mieszaniny kompletnie dodatnio podzielnych kanałów Pauliego i uogólnionych kanałów Pauliego. Przedstawione są warunki na dodatnią i kompletnie dodatnią podzielność w zależności od parametrów mieszania. Dla ewolucji kutritów obszar markowowskości został przedstawiony wewnątrz sympleksu.

Wkład habilitantki:

- wyprowadzenie i analiza ewolucji zadanej przez mieszaniny kanałów Pauliego i uogólnionych kanałów Pauliego, analiza podzielności odwzorowań dynamicznych będących mieszaniną półgrup markowowskich, przykłady ewolucji wiecznie niemarkowowskich, algebraiczne wyprowadzenie granic sympleksu i obszaru markowowskości ewolucji kutritu;
- wykreślenie obszarów kompletnie dodatniej podzielności dla kombinacji wypukłej półgrup opisującej markowowską ewolucję kutritu;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem;
- kierowanie grantem badawczym, w ramach którego finansowane były badania.

4. [H13] *Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements*

K. Siudzińska*

Physical Review A **102**, 032603 (2020)

Impact Factor czasopisma: 3,140

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 5 (GS), 4 (WoS)

W publikacji zdefiniowane zostało nowe uogólnienie kanałów Pauliego z użyciem pomiarów wzajemnie nieobciążonych (MUM). Jako szczególny przypadek zawiera ono uogólnione kanały Pauliego, jeśli MUM-y zostaną zastąpione bazami wzajemnie nieobciążonymi

(MUB-ami). Co istotne, w odróżnieniu od MUB-ów, maksymalna liczba MUM-ów istnieje w dowolnym wymiarze przestrzeni Hilberta, co przekłada się na istnienie uogólnienia kanałów Pauliego w dowolnym wymiarze. Kanały te nadal są odwzorowaniami bistochastycznymi (zachowującymi ślad i operator jednostkowy), ale ich wektory własne nie są już unitarne. Szczegółowej analizie zostały poddane własności uogólnienia kanałów Pauliego, takie jak kompletna dodatniość, łamanie splątania kwantowego czy multiplikatywność maksymalnej czystości stanu wyjściowego. Jako przykłady podano odwzorowania skonstruowane z macierzy Gell-Manna oraz z obserwabli Heisenberga-Weyla.

5. [H9] *Classical capacity of generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 445301 (2020)

Impact Factor czasopisma: 2,132

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 12 (GS), 9 (WoS)

Artykuł zawiera wyprowadzenie ograniczeń na klasyczną pojemność i pojemność Holevo (klasyczna pojemność przy jednym użyciu kanału) dla uogólnionych kanałów Pauliego. Dzięki wykorzystaniu metod znanych dla kanałów Weyla udaje się otrzymać górne i dolne ograniczenia na pojemność Holevo. Jeśli te dwa ograniczenia są sobie równe, to pojemność Holevo jest słabo addytywna, a otrzymany wynik jest jednocześnie klasyczną pojemnością kanału. Znaleziono analityczne formuły na pojemność klasyczną dla dwóch dwuparametrowych rodzin uogólnionych kanałów Pauliego. Na przykładzie kanałów kubitowych pokazane jest, że istnieje relacja między pojemnością kanału a jego wiernością, jak również między szybkością zmian pojemności a podzielnością odwzorowań dynamicznych.

6. [H3] *Geometry of symmetric and noninvertible Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **102**, 062615 (2020)

Impact Factor czasopisma: 3,140

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 1 (GS), 0 (WoS)

Niniejsza praca jest kontynuacją [H1], które dotyczyło odwzorowań Pauliego charakteryzowanych przez maksymalną liczbę trzech niezerowych parametrów. Tutaj analizie poddawana jest geometria dodatnich i kompletnie dodatnich odwzorowań Pauliego zachowujących ślad, określonych przy użyciu nie więcej niż dwóch różnych parametrów. Zalicza się do nich pięć klas odwzorowań symetrycznych i nieodwracalnych (z zerującą się przynajmniej jedną funkcją własną). W przestrzeni wszystkich odwzorowań Pauliego zachowujących ślad wymienione podklasy miały objętość równą zero, przez co ich dyskusja w [H1] była niemożliwa. Przy użyciu metryki Hilberta-Schmidta na przestrzeni stanów Choi-Jamiołkowskiego wyznaczone są względne objętości kanałów łamiących splątanie, kanałów produkowanych przez lokalne w czasie generatory oraz szeregu kanałów podzielnych. Dla zobrazowania problemu graficznie przedstawiono kształty obszarów kompletniej dodatniości w stosunku do tetrahedronu wszystkich kanałów Pauliego.

7. [H10] *Engineering classical capacity of generalized Pauli channels with admissible memory kernels*

K. Siudzińska*, A. Das i A. Bera

Entropy **23**, 1382 (2021)

Impact Factor czasopisma: 2,738

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 4 (GS), 3 (WoS)

Publikacja rozwija tematykę poruszoną w [P13], gdzie zostało pokazane, że odpowiedni dobór parametrów szumu prowadzi do poprawy jakości przesyłu danych przez kanał

kwantowy. Praca skupia się na ewolucji klasycznej pojemności uogólnionych kanałów Pauliego zadanych przez równania master z jądrami pamięci. Analizie porównawczej poddano pojemności półgrup markowowskich i odwzorowań dynamicznych powstałych w wyniku dodania nielokalnych szumów na poziomie jąder pamięci. Na przykładach kubitu i kutritu udowodniono, że możliwy jest wzrost klasycznej pojemności kanału nie tylko względem półgrupy, ale również bardziej ogólnych kanałów opisujących ewolucję markowowską. Co ciekawe, analogiczne uwzględnienie szumów na poziomie lokalnych w czasie generatorów dynamicznych nigdy nie powoduje podobnych efektów. Niemniej, zwiększona zdolność kanałów kwantowych do rzetelnego transferu klasycznej informacji stanowi kolejny dowód na korzystny wpływ efektów szumu.

Wkład habilitantki:

- nadzorowanie pracą zespołu badawczego;
- pomysł na wykorzystanie szumów do zwiększenia klasycznej pojemności uogólnionych kanałów Pauliego;
- opracowanie i weryfikacja otrzymanych wyników;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem;
- kierowanie grantem badawczym, w ramach którego finansowane były badania.

8. [H6] *Markovian semigroup from mixing noninvertible dynamical maps*

K. Siudzińska*

Physical Review A **103**, 022605 (2021)

Impact Factor czasopisma: 3,140

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 12 (GS), 8 (WoS)

Artykuł poświęcony jest analizie mieszanin nieodwracalnych odwzorowań dynamicznych zadanych przez uogólnione kanały Pauliego. Tym sposobem wychodzi on poza rozważania z użyciem mieszanin odwzorowań odwracalnych, które jako jedyne były poruszane do tej pory w literaturze. Zastosowanie bardziej ogólnych odwzorowań pozwoliło zaobserwować ciekawie nieintuicyjne zachowanie. Manipulacja parametrami mieszania może prowadzić do przesunięcia punktów osobliwych do innej chwili czasu, do wytworzenia dodatkowych punktów osobliwych, z nawet do całkowitego ich usunięcia. W szczególnych przypadkach otrzymane odwzorowanie odwracalne jest półgrupą markowowską. Innymi słowy, wprowadzenie klasycznych niepewności pozwala wyzbyć się efektów pamięci i odzyskać ewolucję czysto markowowską. Odwzorowania dynamiczne prowadzące w wyniku mieszania do półgrupy są zadane przez nieregularne generatory i jądra pamięci. W ostatniej części publikacji pokazane zostało, jak klasyczne mieszanie kanałów wpływa na otrzymane wyniki na poziomie lokalnych i nielokalnych równań master.

9. [H7] *Non-Markovianity criteria for mixtures of noninvertible Pauli dynamical maps*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 215201 (2022)

Impact Factor czasopisma: 2,331

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 4 (GS), 3 (WoS)

Kontynuując temat mieszanin odwzorowań dynamicznych, niniejsza praca skupia się na analizie stopni niemarkowowskości ewolucji zadanej przez kanały Pauliego. Rodzaj niemarkowowskości dynamiki zależy od podzielności reprezentującego ją odwzorowania dynamicznego. Podobne rozważania zostały już przeprowadzone dla odwzorowań odwracalnych. Jednak uwzględnienie odwzorowań nieodwracalnych sprawia, że podczas ich analizy

należy zwrócić szczególną uwagę na pewne niuanse. Na przykład dodatniość współczynników dekoherencji lokalnego w czasie generatora nie jest już warunkiem koniecznym na markowowskość ewolucji. Artykuł pokazuje, że istnieją związki między podzielnością kanałów Pauliego a podzielnością ich mieszanin. Dla odwzorowań dynamicznych o nierosnącym obrazie można sformułować warunki konieczne i wystarczające na mieszaniny spełniające określone kryteria podzielności. Co ciekawe, nieodwracalne odwzorowania dynamiczne jako jedyne mogą dać w rezultacie mieszaninę o dowolnym rodzaju podzielności. Jako przykład nieodwracalnego odwzorowania dodatnio podzielnego zaproponowany został kanał Pauliego, którego lokalny w czasie generator posiada współczynniki dekoherencji wybuchające do nieskończoności w tym samym czasie.

10. [H8] *Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 405303 (2022)

Impact Factor czasopisma: 2,331

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 3 (GS), 1 (WoS)

Ta praca jako pierwsza zgłębia temat klasycznych mieszanin kanałów nieunitalnych, czyli niezachowujących operatora identycznościowego. Popularną klasą nieunitalnych kanałów kubitowych są kanały kowariantne ze względu na fazę. Stanowią one jednoczesne uogólnienie odwzorowań opisujących tłumienie amplitudy, procesu odwrotnego do tłumienia amplitudy oraz rozfazowania. Rozważając odwzorowania nieunitalne, można zaobserwować szereg efektów, które nie zachodziły dla mieszanin (unitalnych) kanałów Pauliego. Na przykład odpowiedni dobór parametrów przy mieszaniu kanałów nieunitalnych daje w rezultacie kanał unitalny. Analogicznie mieszanie odwzorowań komutatywnych, czyli przemiennych w dowolnej chwili czasu, może prowadzić do odwzorowań niekomutatywnych. Kombinacje wypukłe półgrup, dla kanałów Pauliego prowadzące nawet do ewolucji wiecznie niemarkowowskich, nie wyprowadzają kanałów kowariantnych ze względu na fazę ze zbioru opisującego dynamikę markowowską. Półgrupę dynamiczną można uzyskać jedynie poprzez zmieszanie ze sobą dwóch półgrup, podczas gdy kanały Pauliego produkują półgrupę tylko w wyniku mieszania trzech odwzorowań, w tym przynajmniej dwóch nieodwracalnych.

11. [H11] *Adjusting phase-covariant qubit channel performance with non-unitality*

K. Siudzińska* i M. Studziński

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **56**, 205301 (2023)

Impact Factor czasopisma: 2,331

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 1 (GS), 2 (WoS)

W tym artykule dokonano analizy komunikacyjnych własności kanałów kowariantnych ze względu na fazę w zależności od ich stopnia nieunitalności. Zostały wyznaczone analityczne formuły na minimalną i maksymalną wierność kanałów na stanach czystych, jak również na maksymalną czystość na wyjściu. Dla nowo zdefiniowanej miary nieunitalności pokazano, jak uzyskać kanał o żądanym stopniu nieunitalności za pomocą klasycznych mieszanin kanałów unitalnych i maksymalnie nieunitalnych. Rozkład prawdopodobieństwa może być traktowany jak szum, który – jak się okazuje – jest korzystny dla rozważanych własności ewolucji kwantowych. Mianowicie, odwzorowania unitalne charakteryzują się najgorszą wydajnością dla wszystkich rozważanych miar z wyjątkiem minimalnej wierności kanału. Co więcej, wydajność kanału spada monotonicznie wraz ze stopniem nieunitalności. Podobne zachowanie występuje dla zgodności i splątania formowania, które określają splątanie między dwoma kubitami. Można zaobserwować nie tylko wydłużenie życia splątania, ale również proces przyspieszenia jego odrodzenia po nagłej śmierci.

Warto zaznaczyć, że poprawa wydajności kanałów ma miejsce dla każdej chwili czasu, w odróżnieniu od wcześniejszych prac [H10,P13], gdzie korzystne efekty szumu były tymczasowe.

Wkład habilitantki:

- nadzorowanie pracą zespołu badawczego;
- pomysł na wykorzystanie własności nieunitalności do manipulowania własnościami mieszanin kanałów kwantowych, pomysł na dowody twierdzeń;
- opracowanie i weryfikacja otrzymanych wyników;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem;
- kierowanie grantem badawczym, w ramach którego finansowane były badania.

12. [H12] *Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **56**, 235301 (2023)

Impact Factor czasopisma: 2,331

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 0 (GS), 0 (WoS)

W pracy analizowane są klasyczne pojemności kanałów kowariantnych ze względu na fazę, w szczególności pojemność Holevo i pojemności wspomaganej splątaniem. Głównym wynikiem jest pokazanie, że wszystkie te pojemności mogą wzrosnąć przy odpowiedniej manipulacji stacjonarnym stanem kanału, który jest ściśle związany z jego stopniem nieunitalności. Dokładniej rzecz ujmując, im bardziej nieunitalny kanał, tym większa jest jego pojemność. Inżynierii parametrów kanału dokonuje się za pomocą klasycznych mieszanin występujących w równaniach master jąder pamięci, dla których opracowano tu metodę konstrukcji. Co ciekawe, równoważnej inżynierii tej można dokonać poprzez wzięcie mieszanin odpowiadających tym jądom lokalnych w czasie generatorów, a nawet samych odwzorowań dynamicznych. Udowodniono, że wzrost stopnia nieunitalności kanału odpowiada wzrostowi pojemności Holevo i pojemności wspomaganej splątaniem w każdej chwili czasu. Dla wysoce nieunitalnych odwzorowań pojemność Holevo, a więc i klasyczna pojemność kanału, chwilowo przerasta pojemność wspomaganą splątaniem kanału unitalnego. To pokazuje, że nieunitalność jest ważnym zasobem kwantowym dla potrzeb transferu informacji, potrafiącym przewyższyć w swej użyteczności inny zasób, jakim jest kwantowe splątanie.

13. [H4] *Geometry of phase-covariant qubit channels*

K. Siudzińska

Journal of Physics Communications (2023), DOI: 10.1088/2399-6528/ace0f4

Citescore: 2,6

liczba punktów na liście Ministerstwa: 70 (200)

liczba cytowań: 0 (GS), 0 (WoS)

Publikacja skupia się na analizie geometrycznych własności przestrzeni nieunitalnych kanałów kwantowych na przykładzie kubitowych odwzorowań kowariantnych ze względu na fazę. Używając stowarzyszonych z nimi stanów Choi-Jamiołkowskiego, udaje się wyprowadzić formuły na elementy odległości i objętości Hilberta-Schmidta. Zależą one tylko od wartości własnych kanału oraz parametru charakteryzującego nieunitalność. Region zajmowany przez odwzorowania dodatnie zachowujące ślad kształtem przypomina domek, kanały zaś żyją w odciętych stożku eliptycznym. Artykuł skupia się na określeniu

kształtów obszarów oraz analitycznych objętości odwzorowań kowariantnych ze względu na fazę, w szczególności łamiących splątanie kwantowe i otrzymywanych z lokalnych w czasie generatorów. Mimo że analizowane kanały są charakteryzowane przez trzy parametry, zupełnie jak kanały Pauliego, otrzymane dla nich wyniki znacznie się różnią. Do przykładów należą kształty i symetrie obszarów, a także procentowe ilości kanałów wśród odwzorowań dodatnich. Uzyskane wyniki pozwalają na lepsze zrozumienie struktur i własności kanałów kwantowych.

II. Wykaz aktywności naukowej

II.4. Wykaz artykułów opublikowanych w czasopismach naukowych, niewymienionych w pkt. I.2

Artykuły wymienione zostały w porządku chronologicznym. Numery odnośników [P1-P13] są zgodne z numerowaniem w Autoreferacie. W nawiasie podano maksymalną punktację na liście Ministerstwa (50 lub 200). Informacja o wskaźniku Impact Factor pochodzi z bazy Expertus UMK / Web of Science. Liczba cytowań pochodzi z bazy Google Scholar (GS) i Web of Science (WS). Gwiazdką oznaczono autorów korespondencyjnych.

14. [P5] *Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels*

K. Siudzińska*, K. Luoma i W. T. Strunz

Physical Review A **100**, 062308 (2019)

Impact Factor czasopisma: 2,777

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 4 (GS), 4 (WoS)

Na przestrzeni kanałów kwantowych zadane są struktury geometryczne, które pozwalają na statystyczne przewidywanie względnych objętości kanałów łamiących splątanie wśród wszystkich kwantowych kanałów gaussowskich. Metrykę na przestrzeni kanałów zadaje odległość Hilberta-Schmidta w przestrzeni stanów kwantowych. Izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego definiuje jedno-jednoznaczna odpowiedniość między kanałami a stanami gaussowskimi wyrażonymi przez funkcje zmiennych ciągłych. Element objętości jednomodowych kanałów gaussowskich można wyrazić poprzez lokalne niezmienniki symplektyczne. Względne objętości jednomodowych kanałów gaussowskich łamiących splątanie i niekompatybilność są skończone i zostały wyznaczone analitycznie. Okazuje się, że znajomość czystości stanów Choi-Jamiołkowskiego kanałów gaussowskich wystarczy do określenia, czy taki kanał łamie niekompatybilność.

Wkład habilitantki:

- wyprowadzenie wzorów na struktury geometryczne jednomodowych kanałów gaussowskich, dowody lematów, wyznaczenie względnych objętości kanałów oraz obszaru koegzystencji;
- przegląd literatury;
- wykreślenie obszarów zajmowanych przez jednomodowe kanały gaussowskie, wykreślenie względnych objętości kanałów w funkcji marginalnej czystości stowarzyszonego stanu kwantowego;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem;
- kierowanie grantem badawczym, w ramach którego finansowane były badania.

15. [P4] *Interpolating between Positive and Completely Positive Maps: A New Hierarchy of Entangled States*

K. Siudzińska, S. Chakraborty i D. Chruściński*

Entropy **23**, 625 (2021)

Impact Factor czasopisma: 2,738

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 2 (GS), 1 (WoS)

W tej publikacji zaproponowano nową klasyfikację odwzorowań dodatnich, uwzględniającą dodatkowe stopnie między ich dodatniością a kompletną dodatniością. Z definicji klasy te zawierają odwzorowania, które są kontrakcjami, ale tylko na podprzestrzeniach o danym wymiarze. Dla odwzorowań kubitowych pokazano, że odwzorowania depolaryzujące i depolaryzujące z transpozycją należą do pośredniej klasy częściowych kontrakcji, podczas gdy sama transpozycja nie należy. Dokonano częściowej analizy porównawczej częściowych kontrakcji z odwzorowaniami Kadisona-Schwarza. Wprowadzona tu klasyfikacja odwzorowań dodatnich znajduje zastosowanie w charakteryzacji stanów splątanych, pozwalając na udoskonalone rozróżnienie stopni splątania za pomocą liczby Schmidta.

Wkład habilitantki:

- wyprowadzenie warunków na częściową kontrakcję dla odwzorowań kubitowych, konstrukcja przykładów odwzorowań spełniających kryterium częściowej kontrakcji, analiza porównawcza częściowych kontrakcji i odwzorowań Kadisona-Schwarza;
- przegląd literatury;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem.

16. [P2] *Entanglement witnesses from mutually unbiased measurements*

K. Siudzińska* i D. Chruściński

Scientific Reports **11**, 22988 (2021)

Impact Factor czasopisma: 4,997

liczba punktów na liście Ministerstwa: 140 (200)

liczba cytowań: 2 (GS), 1 (WoS)

Artykuł jest poświęcony nowej rodzinie odwzorowań dodatnich, zdefiniowanych za pomocą pomiarów wzajemnie nieobciążonych (MUM). Pomiarzy te stanowią uogólnienie baz wzajemnie nieobciążonych (MUB) na pomiary nieprojektorowe. Ta rodzina odwzorowań dodatnich pozwala na wprowadzenie klasy świadków splątania, których własność rozkładalności zależy od charakterystyki użytych pomiarów. Co ciekawe, świadkowie skonstruowani z MUM-ów należą do rodziny świadków opartych na kryterium reorganizacji (CCNR). Zostały podane przykłady stanów kutrit-kutrit i wykrywających je świadków.

Wkład habilitantki:

- pomysł na wykorzystanie pomiarów wzajemnie nieobciążonych do konstrukcji nowych rodzin odwzorowań dodatnich i świadków splątania kwantowego;
- konstrukcja odwzorowań dodatnich i świadków splątania z pomiarów wzajemnie nieobciążonych, przykłady świadków rozkładalnych i nierozkładalnych wraz z wykrywanymi przez nich stanami;
- przegląd literatury;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów i korespondencja z wydawnictwem;
- kierowanie grantem badawczym, w ramach którego finansowane były badania.

17. [P1] *All classes of symmetric measurements in finite dimensions*

K. Siudzińska*

Physical Review A **105**, 042209 (2022)

Impact Factor czasopisma: 2,971

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 9 (GS), 5 (WoS)

W pracy przedstawiona została szeroka klasa pomiarów symetrycznych. Można ją rozumieć jako jednoczesne uogólnienie informacyjnie zupełnych, symetrycznych pomiarów uogólnionych (SIC-POVM) i baz wzajemnie nieobciążonych (MUB). Ogólna parametryzacja pozwala w naturalny sposób zdefiniować nowe rodziny pomiarów symetrycznych. W szczególności w dowolnym wymiarze skończonym można znaleźć dwie nowe rodziny informacyjnie zupełnych, wzajemnie nieobciążonych operatorów pomiaru. Okazuje się, że są one stowarzyszone z powszechnie znanymi uogólnionymi SIC-POVM-ami i pomiarami wzajemnie nieobciążonymi (MUM). Pokazana została ogólna metoda na konstrukcję pomiarów symetrycznych z hermitowskich ortonormalnych baz operatorowych. Jako przykład rozważane są pomiary optymalne złożone z projektorów, ale nie będące pomiarami projektorowymi. Na koniec dokonano analizy własności pomiarów symetrycznych z zastosowaniami w entropicznych relacjach nieoznaczoności i wykrywaniu splątania kwantowego.

18. [P3] *Indecomposability of entanglement witnesses constructed from symmetric measurements*

K. Siudzińska*

Scientific Reports **12**, 10785 (2022)

Impact Factor czasopisma: 4,997

liczba punktów na liście Ministerstwa: 140 (200)

liczba cytowań: 1 (GS), 1 (WoS)

Tematyką artykułu jest konstrukcja i analiza nierozkładalnych świadków splątania kwantowego. Zaproponowano w niej metodę konstrukcji odwzorowań dodatnich z użyciem pomiarów symetrycznych zdefiniowanych w [P5]. Następnie odwzorowania te posłużyły do wyznaczenia formuły na świadków splątania, czyli operatorów dodatnich (ale nie kompletnie dodatnich) wykrywających stany splątane. Niniejsza klasa zawiera jako przypadki szczególne innych popularnych świadków, np. skonstruowanych z baz wzajemnie nieobciążonych (MUB), z pomiarów wzajemnie nieobciążonych (MUM) lub z informacyjnie zupełnych, symetrycznych pomiarów uogólnionych (SIC-POVM). Szczególna uwaga została poświęcona nierozkładalnym świadkom splątania, które potrafią wykryć splątanie stanów z częściową dodatnią transpozycją (stany PPT, splątanie związane). Obliczenia ilustrowane są przykładami świadków skonstruowanych z wielu rodzajów pomiarów oraz wykrywanych przez nie stanów PPT.

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

19. [P6] *Decoherence of a qubit as a diffusion on the Bloch sphere*

K. Siudzińska i D. Chruściński*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**, 405202 (2015)

Impact Factor czasopisma: 1,933

liczba punktów na liście Ministerstwa: 30 (50)

liczba cytowań: 5 (GS), 2 (WoS)

Praca skupia się na analizie dekoherencji kubitu opisywanej w języku geometrycznej mechaniki kwantowej. W tym modelu operatory gęstości układu dwupoziomowego są reprezentowane przez rozkłady prawdopodobieństwa będące jednocześnie funkcjami Kählera

na sferze Blocha. Dla ewolucji zadanej przez kanał Pauliego równanie master półgrupy dynamicznej jest równoważne równaniu na składowe prawdopodobieństwa z operatorem różniczkowym drugiego rzędu we współrzędnych sferycznych (zdeformowanym laplasjanem). Współczynnikami deformacji są współczynniki dekoherencji stojące przy kwadratach składowych momentu pędu. W szczególności kanał tłumiący fazę jest zadany przez równanie dyfuzji na torusie sparametryzowanym przez pojedynczy kąt. Co ciekawe, kompletną dodatniość odwzorowania gwarantuje eliptyczność zdeformowanego laplasjanu. Oznacza to, że równanie master na rozkładach prawdopodobieństwa jest równaniem dyfuzyjnym Fokkera-Plancka na sferze Blocha.

Wkład habilitantki:

- wyprowadzenie struktur geometrycznych na sferze Blocha, sformułowanie równania master z użyciem odkształconego laplasjanu, dowód twierdzenia o związku eliptyczności z kompletną dodatniością;
- przegląd literatury;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów.

20. [P7] *Generalized Pauli channels and a class of non-Markovian quantum evolution*

D. Chruściński* i **K. Siudzińska**

Physical Review A **94**, 022118 (2016)

Impact Factor czasopisma: 2,925

liczba punktów na liście Ministerstwa: 35 (50)

liczba cytowań: 37 (GS), 33 (WoS)

Publikacja jest poświęcona analizie ewolucji otwartych układów kwantowych zadanej przez uogólnione kanały Pauliego. Odwzorowania te opisują dynamikę kubitów, a są one zdefiniowane za pomocą maksymalnych zbiorów baz wzajemnie nieobciążonych. Wprowadzone zostały warunki konieczne i warunki wystarczające na dodatnią podzielność odwzorowań dynamicznych będących rozwiązaniami równań master z lokalnymi w czasie generatorami. Dodatnia podzielność gwarantuje słabą niemarkowowskość ewolucji i gwarantuje brak przepływu informacji z powrotem do otoczenia. Jako przykład rozważono ewolucję wiecznie niemarkowowską, czyli posiadającą zawsze ujemne współczynniki dekoherencji. Co ciekawe, dynamikę z dużą liczbą ujemnych współczynników można uzyskać w wyniku klasycznego zmieszania półgrup markowowskich.

Wkład habilitantki:

- opis ewolucji zadanej przez lokalne w czasie generatory, wyprowadzenie kryteriów na markowowskość i niemarkowowskość ewolucji, analiza przykładu ewolucji wiecznie niemarkowowskiej;
- przegląd literatury;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów.

21. [P8] *Memory kernel approach to generalized Pauli channels: Markovian, semi-Markov, and beyond*

K. Siudzińska i D. Chruściński*

Physical Review A **96**, 022129 (2017)

Impact Factor czasopisma: 2,909

liczba punktów na liście Ministerstwa: 35 (50)

liczba cytowań: 25 (GS), 21 (WoS)

Ten artykuł jest kontynuacją [P2]. Ponownie rozważana jest ewolucja układów otwartych zadana przez uogólnione kanały Pauliego. Tym razem jednak punktem startowym są równania master nie z generatorami, a z nielokalnymi w czasie jądrami pamięci. Podane zostały warunki konieczne i wystarczające na to, by zadane jądro odpowiadało fizycznej dynamice, czyli reprezentowanej przez odwzorowanie kompletnie dodatnie zachowujące ślad. Szczególną uwagę poświęcono klasie ewolucji półmarkowowskiej, która stanowi naturalne uogólnienie klasycznych procesów półmarkowowskich. Przedstawiono szereg przykładów ewolucji półmarkowowskiej opisywanej przez uogólnione kanały Pauliego. Co ciekawe, mieszanina półgrup markowowskich wychodzi poza wspomniany przypadek.

Wkład habilitantki:

- wprowadzenie warunków na jądra pamięci gwarantujące kompletną dodatniość generowanych odwzorowań, analiza przykładów fizycznie dopuszczalnych jąder, wprowadzenie formuł dla ewolucji półmarkowowskiej;
- przegląd literatury;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów.

22. [P9] *Non-Markovianity of geometrical qudit decoherence*

K. Siudzińska*

Reports on Mathematical Physics **80**, 361–372 (2017)

Impact Factor czasopisma: 0,796

liczba punktów na liście Ministerstwa: 20 (50)

liczba cytowań: 4 (GS), 3 (WoS)

Ta praca uogólnia geometryczny opis ewolucji kubitów przedstawiony w [P7] na przypadki wyżej wymiarowe, czyli układy kuditowe. Mieszane stany kwantowe są reprezentowane przez rozkłady prawdopodobieństwa, będące zarazem funkcjami Kählera na projektywnej przestrzeni Hilberta. Równania master z lokalnymi operatorami szumu są równoważne równaniom Fokkera-Plancka, w których występują teraz człony pochodzące od zespolonych pól wektorowych. Analogicznie przedstawić można reprezentację Krausa odwzorowania dynamicznego. Dalszej analizy dokonano dla kanałów skonstruowanych z czterech popularnych uogólnień macierzy Pauliego: macierzy Gell-Manna, operatorów Weyla, iloczynów tensorowych macierzy Pauliego oraz projektorów na bazy wzajemnie nieobciążone.

23. [P10] *Quantum channels irreducibly covariant with respect to the finite group generated by the Weyl operators*

K. Siudzińska i D. Chruściński*

Journal of Mathematical Physics **59**, 033508 (2018)

Impact Factor czasopisma: 1,335

liczba punktów na liście Ministerstwa: 25 (50)

liczba cytowań: 21 (GS), 17 (WoS)

Artykuł przedstawia metodę konstrukcji odwzorowań liniowych, które są kowariantne ze względu na unitarną reprezentację grupy skończonej generowanej przez operatory Weyla. Grupa ta jest uogólnieniem grupy kwaternionowej, która prowadzi do powstania kanałów Pauliego. Otrzymane w ten sposób odwzorowania są znane w literaturze jako odwzorowania Weyla lub Weyl-kowariantne. Szczególna uwaga została poświęcona reprezentacjom nieredukowalnym i utworzonym za ich pomocą nieredukowalnie kowariantnym kanałom kwantowym. Ponadto po wprowadzeniu dodatkowych warunków symetrii w wymiarach pierwszych możliwe jest otrzymanie uogólnionych kanałów Pauliego. Wychodząc poza kanały kwantowe, w pracy rozważono klasę nieredukowalnie kowariantnych odwzorowań dodatnich, które znajdują zastosowania w detekcji stanów splątanych. Kolejnym zastosowaniem jest analiza stopni niemarkowowskości ewolucji otwartych układów kwantowych

zadanych przez nieredukowalnie kowariantne generatory lokalne w czasie. Znaleziono zostały nowe warunki wystarczające na dodatnią podzielność odwzorowania dynamicznego. Jako przykład ewolucji niemarkowskiej przedstawiono mieszaninę półgrup dynamicznych o łatwej do kontrolowania liczbie ujemnych współczynników dekoherencji.

Wkład habilitantki:

- konstrukcja i analiza własności grupy generowanej przez operatory Weyla oraz ich reprezentacji unitarnych, dowody twierdzeń, przykłady;
- przegląd literatury;
- wykreślenie tabeli charakterów grupy,
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów.

24. [P11] *Two definitions of the Gell-Mann channels – a comparative analysis*

K. Siudzińska*

Reports on Mathematical Physics **81**, 321–345 (2018)

Impact Factor czasopisma: 0,989

liczba punktów na liście Ministerstwa: 20 (50)

liczba cytowań: 3 (GS), 2 (WoS)

Opisujące ewolucję kubitów kanały Pauliego są równoważnie zdefiniowane przez reprezentację Krausa lub równania własne. Zarówno ich operatory Krausa, jak i operatory własne, są macierzami Pauliego. Własność ta nie znajduje przełożenia na wyższe wymiary. Przy rozważaniu dynamiki kubitów definicje przestają być równoważne. Praca przedstawia analizę porównawczą dwóch nierównoważnych definicji kanałów kwantowych, w których macierze Pauliego zostały zastąpione przez macierze Gell-Manna. Interesujący jest fakt, że obie definicje zadają te same kanały nie tylko dla kubitów, ale również dla kubitów. Dla wyższych wymiarów przedstawiono warunki na kompletną dodatniość odwzorowań, jak również warunki, po spełnieniu których oba kanały zadają identyczną dynamikę. Analiza została powtórzona dla generatorów algebry $SU(N)$ z wykorzystaniem stałych struktur. Analogiczne rozważania przeprowadzono także dla dwóch uogólnień lokalnych w czasie generatorów kanałów Pauliego.

25. [P12] *Regularized maximal fidelity of the generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **99**, 012340 (2019)

Impact Factor czasopisma: 2,777

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 8 (GS), 4 (WoS)

W pracy rozważana jest asymptotyczna regularyzacja wierności kanałów kwantowych, która mierzy odkształcenie stanu wyjściowego przy nieskończonej liczbie działaniach kanału. Dla uogólnionych kanałów Pauliego wyprowadzone zostały formuły na minimalną i maksymalną wierność kanału na stanach czystych, jak również będąca miarą czystości maksymalna wyjściowa norma nieskończoność. Dla szerokiej klasy kanałów udowodniono, że wszystkie te wielkości są słabo multiplikatywne, co umożliwiło znalezienie asymptotycznej regularyzacji wierności tych kanałów. Interesującym wnioskiem jest, że maksymalna wyjściowa norma nieskończoność oraz maksymalna wierność uogólnionych kanałów Pauliego zadanych przez lokalne w czasie generatory ewolucji są zawsze słabo multiplikatywne.

26. [P13] *Engineering fidelity of the generalized Pauli channels via legitimate memory kernels*

K. Siudzińska i D. Chruściński*

Physical Review A **100**, 012303 (2019)

Impact Factor czasopisma: 2,777

liczba punktów na liście Ministerstwa: 100 (200)

liczba cytowań: 10 (GS), 10 (WoS)

Artykuł poświęcony jest analizie wierności uogólnionych kanałów Pauliego zadanych przez równania master z jądrami pamięci. Wierność kanału mierzy odkształcenie stanu wyjściowego względem stanu wejściowego. Porównywana jest ewolucja wierności dla półgrupy markowskiej (układ bez pamięci) i odwzorowania dynamicznego powstałego w wyniku nielokalnego odkształcenia jądra pamięci dla tejże półgrupy. Co ciekawe, przy odpowiednim doborze parametrów charakteryzujących jądro pamięci, ewolucja kwantowa z nielokalnym szumem może być chwilowo opisywana przez kanał o większej wierności niż ewolucja pozbawiona szumów. Innymi słowy, odwzorowania dynamiczne dla ewolucji z pamięcią lokalnie produkują mniej odkształcone stany wyjściowe. Dodatkowe szumy pomagają również w przedłużaniu żywotności splątania kwantowego, zmniejszaniu entropii układu, a także zwiększeniu koherencji stanów kwantowych. Wyniki te potwierdzają wcześniejsze obserwacje, że odpowiednia inżynieria szumów może okazać się korzystna dla potrzeb przetwarzania i przesyłania kwantowej informacji.

Wkład habilitantki:

- wyprowadzenie wzorów na minimalną i maksymalną wierność kanałów, analiza przykładów;
- przegląd literatury;
- wykreślenie czasowej zależności analizowanych miar dla ewolucji markowskiej i niemarkowskiej;
- przygotowanie pierwszej wersji artykułu;
- odpowiedź na uwagi recenzentów.

II.7. Wykaz wystąpień na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych, z wyszczególnieniem przedstawionych wykładów na zaproszenie i wykładów plenarnych

Referaty:

1. 41st International Conference on Quantum Probability and Related Topics, Al Ain, Zjednoczone Emiraty Arabskie, 28 marca – 1 kwietnia 2021 r.
Markovian semigroup from mixing non-invertible dynamical maps
2. Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis, Moskwa, Rosja, 30 czerwca – 9 lipca 2021 r.
Interpolating between positive and completely positive maps: a new hierarchy of entangled states

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

3. Quantum Roundabout, Nottingham, Wielka Brytania, 6–8 lipca 2016 r.
The non-Markovian evolution of the generalized Pauli channels
4. 49th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 17–18 czerwca 2017 r.
Quantum semi-Markov evolution for the generalized Pauli channels
5. CIYSCon, Toruń, Polska, 28–30 czerwca 2017 r.
Semi-Markov evolution of the Generalized Pauli channel

6. 51st Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 16–18 czerwca 2019 r.
On the geometry of one-mode Gaussian channels

Plakaty:

7. 54th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 8–11 czerwca 2023 r.
Enhancing qubit channel performance through stationary state manipulation
8. Quantum Information Days 2020(+1), Warszawa, Polska, 22–24 lutego 2021 r.
Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

9. 45th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 1–2 czerwca 2013 r.
Two-body problem in general relativity
10. 47th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 19–21 czerwca 2015 r.
Geometrical description of Lindblad equations with Gell-Mann matrices
11. 48th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 10–12 czerwca 2016 r.
Markovianity of the generalized Pauli channels
12. CIYSCon, Toruń, Polska, 28–30 czerwca 2017 r.
A comparative analysis of two definitions of the Gell-Mann channels
13. 50th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Polska, 21–24 czerwca 2018 r.
Minimal and maximal fidelity of the generalized Pauli channels
14. 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operator Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications, Będlewo, Polska, 15–21 lipca 2018 r.
Quantum maps covariant with respect to the group generated by the Weyl operators

Referaty na zaproszenie ogłoszone w innych ośrodkach naukowych:

15. Seminarium Instytutu Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański, Gdańsk, Polska, 29 stycznia 2023 r.
Non-Markovianity criteria for mixtures of qubit dynamical maps
16. Current Trends in Quantum Information, Sopot, Polska, 15 maja 2020 r.
Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

17. Seminarium Zakładu Teoretycznej Optyki Kwantowej, Technische Universität Dresden, Dresden, Niemcy, 14 listopada 2018 r.
Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels

II.8. Wykaz udziału w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji krajowych lub międzynarodowych, z podaniem pełnionej funkcji

Członek komitetu organizacyjnego międzynarodowej konferencji Sympozjum Fizyki Matematycznej w roku 2023 (edycja 54.).

II.9. Wykaz uczestnictwa w pracach zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych, z podziałem na projekty zrealizowane i będące w toku realizacji, oraz z uwzględnieniem informacji o pełnionej funkcji w ramach prac zespołów

W funkcji kierownika:

1. 2022 – teraz: kierownik projektu pt. *Odwzorowania kwantowe i ich zastosowania w kwantowym przesyłaniu i przetwarzaniu informacji* (512 400 PLN), grant Narodowego Centrum Nauki SONATA 17 nr 2021/43/D/ST2/00102, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, czas realizacji: 36 miesięcy.
2. 2019 – 2020: kierownik projektu pt. *Uogólnione kanały Pauliego w ewolucji otwartych układów kwantowych* (33 800 PLN), grant Narodowego Centrum Nauki PRELUDIUM 16 nr 2018/31/N/ST2/00250, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, czas realizacji: 12 miesięcy.

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

3. 2018 – 2019: kierownik projektu pt. *Ewolucja otwartych układów kwantowych zadana przez unitarnie kowariantne kanały kwantowe* (109 352 PLN), grant Narodowego Centrum Nauki ETIUDA 6 nr 2018/28/T/ST2/00008, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, czas realizacji: 12 miesięcy.

W funkcji współwykonawcy:

4. 2021 – 2022: Wykonawca w projekcie pt. *Kwantowe odwzorowania dynamiczne poza reżimem Markowa* (2 836 400 PLN), grant Narodowego Centrum Nauki MAESTRO 10 nr 2018/30/A/ST2/00837, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, kierownik: prof. dr hab. Dariusz Chruściński.

Przed uzyskaniem stopnia doktora:

5. 2016 – 2018: Stypendysta-doktorant w projekcie pt. *Niemarkowowska dynamika kwantowa* (549 800 PLN), grant Narodowego Centrum Nauki OPUS 9 nr 2015/19/B/ST1/03095, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, kierownik: prof. dr hab. Dariusz Chruściński.
6. 2013 – 2014: Stypendysta-magistrant w projekcie pt. *Precise optical control and metrology of quantum systems* (3 358 000 PLN), Program TEAM, Fundacja na rzecz Nauki Polskiej, współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego, projekt nr TEAM/2010-6/3, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, kierownik: prof. dr hab. Roman Ciuryło.

II.11. Wykaz staży w instytucjach naukowych, w tym zagranicznych, z podaniem miejsca, terminu, czasu trwania stażu i jego charakteru

Staż naukowy w Drezdeńskim Uniwersytecie Technicznym w Niemczech (grupa prof. dr. hab. Waltera T. Strunza), od 11.2018 r. do 04.2019 r. (6 miesięcy). Rezultatem stażu jest publikacja w *Physical Review A* i kontynuowana współpraca naukowa.

II.13. Wykaz recenzowanych prac naukowych, w szczególności publikowanych w czasopismach międzynarodowych

Wszystkie publikacje wymienione w punktach I.2 i II.4 były recenzowane i ukazały się w czasopismach międzynarodowych.

Artykuły naukowe recenzowane dla czasopism międzynarodowych:

- Physical Review Letters,
- Physical Review X,
- Physical Review A,
- Journal on Mathematical Physics A: Mathematical and Theoretical,
- Quantum Science and Technology,
- Open Systems and Information Dynamics,
- Quantum Information Processing,
- Advanced Quantum Technologies,
- The European Physical Journal Plus.

II.15. Wykaz udziału w zespołach badawczych, realizujących projekty inne niż określone w pkt. II.9

- Grupa prof. dr. hab. Waltera T. Strunza, Drezdeński Uniwersytet Techniczny, Niemcy.
- dr Vinayak Jagadish, Zakład Optyki Atomowej, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Uniwersytet Jagielloński, Kraków.
- dr Michał Studziński, Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański.
- dr Krzysztof Szczygielski, Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański.
- Grupa dr. hab. Łukasza Rudnickiego, Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański.

II.16. Wykaz uczestnictwa w zespołach oceniających wnioski o finansowanie badań, wnioski o przyznanie nagród naukowych, wnioski w innych konkursach mających charakter naukowy lub dydaktyczny

Członek komisji oceniającej prace konkursowe w ogólnopolskim Konkursie Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST) w latach 2021–2023 (edycje XII–XIII).

IV. Dane naukometryczne

- ResearcherID: P-1970-2016
- ORCID: 0000-0002-1816-7242
- Google Scholar: PzYQM2UAAAAJ
- Indeks Hirscha: 8 (Google Scholar), 7 (Web of Science)
- całkowita liczba cytowań: 200 (Google Scholar), 151 (Web of Science)
- całkowita liczba cytowań bez autocytowań: 83 (Web of Science)
- całkowity Impact Factor: 66,604
- całkowita liczba punktów Ministerstwa: 2215, w tym
- publikacje po roku 2018 (skala do 200 pkt.): 2050 punktów
- publikacje do roku 2018 (skala do 50 pkt.): 165 punktów

Pełen wykaz artykułów habilitantki publikowanych w czasopiśmie naukowych jest sumą artykułów wymienionych w punkcie I.2, składających się na osiągnięcie habilitacyjne, oraz pozostałych artykułów wymienionych w punkcie II.4.

.....
(podpis wnioskodawcy)

List of scientific or artistic achievements which present a major contribution to the development of a specific discipline

Katarzyna Barbara Siudzińska

I. Information on scientific or artistic achievements set out in art. 219 para 1. point 2 of the Act

Achievement title: *Analysis and applications of the Pauli channels and their generalizations.*

I.2. Cycle of scientific articles related thematically, pursuant to art. 219 para 1. point 2b of the Act

The articles included in the habilitation achievement are listed in the chronological order. References [H1-H13] follow the numbering in the Summary of Professional Accomplishments. The maximal points on the Ministry's list (50 or 200) are indicated in parentheses. The Impact Factor information comes from the Expertus UMK / Web of Science databases. The number of citations is from the Google Scholar (GS) and Web of Science (WS) databases. Corresponding authors are marked with an asterisk.

1. [H1] *Geometry of Pauli maps and Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **100**, 062331 (2019)

journal Impact Factor: 2.777

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 8 (GS), 7 (WoS)

In this work, the geometrical properties of trace-preserving Pauli maps are analyzed. Knowledge of their eigenfunctions is sufficient to find the line and volume elements induced by the Hilbert-Schmidt metric for the Choi-Jamiołkowski states. The relative volumes of entanglement-breaking channels and channels achieved with time-local generators are calculated analytically and presented graphically in respective plots. For the Pauli channels, I also calculate the percentage of positive and completely positive divisible channels, which are related to the notions of Markovianity and open quantum systems with memory. The results of my work can be interpreted as the probability of a randomly selected channel possessing the desired properties. They also show what a small percentage of channels can be achieved using time-local generators, and thus how important it is to further develop the description of quantum evolution with memory kernels.

2. [H2] *Geometry of generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **101**, 062323 (2020)

journal Impact Factor: 3.140

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 3 (GS), 2 (WoS)

This paper is a continuation of [H1] and focuses on the analysis of geometrical properties of the generalized Pauli channels constructed from mutually unbiased bases (MUBs). Analogically to the qubit case, the Choi-Jamiołkowski isomorphism allows one to express the Hilbert-Schmidt line and volume elements through the eigenfunctions of the channels. Both the integration regions and volumes of channel subclasses are determined analytically. Among the considered subclasses, there are entanglement breaking channels and channels achievable by local-time generators constructed from three, d or $d + 1$ MUBs, where d is the dimension of the Hilbert space. Since the results depend on the dimension, they are presented and further discussed on respective plots. Finally, I provide the lower bound on the volume of all positive, trace-preserving generalized Pauli maps.

3. [H5] *Quantum evolution with a large number of negative decoherence rates*

K. Siudzińska* and D. Chruściński

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 375305 (2020)

journal Impact Factor: 2.132

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 16 (GS), 9 (WoS)

In this article, we address the influence of non-Markovian effects on quantum evolution. These effects play a significant role when a physical system is strongly coupled to its environment and interacts with it for a relatively long time. Systems with memory are usually described by master equations with time-local generators or memory kernels. However, it turns out that strongly non-Markovian evolution with eternally negative decoherence rates can even be obtained by a classical mixture of Markovian semigroups. It turns out that physically admissible evolution is given by a generator with as many as $(d - 1)^2$ always negative coefficients among the total $d^2 - 1$. Going beyond convex combinations of semigroups, we analyze mixtures of completely positive divisible Pauli channels and generalized Pauli channels. Conditions for positive and completely positive divisibility depend on mixing parameters. For the evolution of qutrits, the Markovianity region is plotted inside a simplex.

My contribution:

- derivation and analysis of the evolution given by mixtures of Pauli channels and generalized Pauli channels, analyzing divisibility of dynamical maps that are mixtures of Markovian semigroups, examples of eternally non-Markovian evolution, algebraic derivation of the simplex bounds and Markovianity region for the qutrit evolution;
- plotting the region of complete positive divisibility for the convex combinations of semigroups describing the Markovian evolution of qutrits;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor;
- management of the research grant by which this work was funded.

4. [H13] *Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements*

K. Siudzińska*

Physical Review A **102**, 032603 (2020)

journal Impact Factor: 3.140

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 5 (GS), 4 (WoS)

The publication introduces a new generalization of the Pauli channels using mutually unbiased measurements (MUMs). As a special case, it includes the generalized Pauli channels, for which the MUMs are replaced by mutually unbiased bases (MUBs). Importantly, unlike MUBs, the maximal number of MUMs exists in any dimension of the Hilbert

space, which translates into the existence of this generalization of the Pauli channels in any dimension. These channels are still bistochastic maps (trace preserving and identity preserving) but their eigenvectors are no longer unitaries. Properties of the generalization of Pauli channels, such as complete positivity, breaking quantum entanglement, and multiplicativity of the maximal output purity are analyzed in more details. Examples include maps constructed from the Gell-Mann matrices as well as the Heisenberg-Weyl observables.

5. [H9] *Classical capacity of generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 445301 (2020)

journal Impact Factor: 2.132

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 12 (GS), 9 (WoS)

The article contains the derivation of constraints on the classical capacity and Holevo capacity (classical capacity under a single-channel use) for the generalized Pauli channels. By using methods known for the Weyl channels, it manages to obtain the upper and lower bounds on the Holevo capacity. If these two constraints coincide, the Holevo capacity is weakly additive, and the resulting capacity is also the classical capacity. Analytical formulas for the classical capacity are found for two two-parameter families of the generalized Pauli channels. Using qubit channels as an example, it is shown that there is a relationship between the channel capacity and its fidelity, as well as between the change rate of the capacity and the divisibility of dynamical maps.

6. [H3] *Geometry of symmetric and noninvertible Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **102**, 062615 (2020)

journal Impact Factor: 3.140

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 1 (GS), 0 (WoS)

This work is a continuation of [H1], which deals with the Pauli maps characterized by a maximum of three non-zero parameters. Here, I analyze the geometry of positive and completely positive, trace-preserving Pauli maps, defined with no more than two distinct parameters. These include five classes of symmetric and noninvertible maps (where at least one channel eigenvalue vanishes). In the space of all trace-preserving Pauli maps, the aforementioned subclasses had a volume equal to zero, making their discussion in [H1] impossible. Using the Hilbert-Schmidt metric on the space of the Choi-Jamiołkowski states, I determine the relative volumes of entanglement-breaking channels, channels achievable with time-local generators, and divisible channels. To further illustrate the problem, I plot the shapes of the complete positivity regions with respect to the tetrahedron of all Pauli channels.

7. [H10] *Engineering classical capacity of generalized Pauli channels with admissible memory kernels*

K. Siudzińska*, A. Das, and A. Bera

Entropy **23**, 1382 (2021)

journal Impact Factor: 2.738

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 4 (GS), 3 (WoS)

The publication expands on the topics covered in [P13], where it is shown that an appropriate choice of noise parameters leads to an improved quality of data transmission through a quantum channel. This paper focuses on the evolution of classical capacity of

the generalized Pauli channels provided by the master equations with memory kernels. We present a comparative analysis of the capacities for the Markovian semigroups and dynamical maps created by addition of non-local noises at the level of memory kernels. On the example of qubit and qutrit dynamics, we prove that it is possible to increase the classical capacity not only with respect to the semigroup but also to more general channels describing the Markovian evolution. Interestingly, an analogical inclusion of noise at the level of time-local generators never produces similar effects. Nevertheless, the increased ability of quantum channels to reliably transfer classical information provides further evidence of the beneficial effects of noise.

My contribution:

- supervision of the research group;
- idea of using noise to increase the classical capacity of generalized Pauli channels;
- formal analysis and validation of the results;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor;
- management of the research grant by which this work was funded.

8. [H6] *Markovian semigroup from mixing noninvertible dynamical maps*

K. Siudzińska*

Physical Review A **103**, 022605 (2021)

journal Impact Factor: 3.140

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 12 (GS), 8 (WoS)

The article focuses on analyzing the mixtures of noninvertible dynamical maps provided by the generalized Pauli channels. This way, it goes beyond mixtures of invertible maps, which are the only ones that have been addressed in the literature so far. The use of more general maps has made it possible to observe an interesting, non-intuitive behavior. Manipulations of mixing parameters can lead to shifting the singular points to different instants in time, to producing additional singular points, or even to their complete removal. In special cases, the resulting invertible map is a Markovian semigroup. In other words, the introduction of classical uncertainties makes it possible to get rid of memory effects and recover purely Markovian evolution. Dynamical maps leading to semigroups through mixing are provided by irregular generators and memory kernels. In the last part of the publication, it is shown how classical mixtures of channels affect the results at the level of time-local and non-local master equations.

9. [H7] *Non-Markovianity criteria for mixtures of noninvertible Pauli dynamical maps*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 215201 (2022)

journal Impact Factor: 2.331

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 4 (GS), 3 (WoS)

Continuing the topic of mixing dynamical maps, this paper focuses on the analysis of non-Markovianity degree for the evolution given by the Pauli channels. The type of non-Markovianity depends on the divisibility of the dynamical map representing the evolution. Similar considerations have already been made for invertible maps. However, allowing for non-invertible maps requires paying special attention to certain nuances during their analysis. For example, the positivity of the decoherence rates of a time-local generator is no longer a necessary condition for Markovianity of evolution. This article shows that there is a relation between the divisibility of Pauli channels and the divisibility of their

mixtures. For non-Markovian dynamical maps, the necessary and sufficient conditions are formulated for mixtures that satisfy certain divisibility criteria. Interestingly, only non-invertible dynamical maps can produce mixtures with any degree of divisibility. As an example of a non-invertible positive divisible maps, I propose the Pauli channel whose time-local generator has decoherence rates that explode to infinity at the same moment in time.

10. [H8] *Phase-covariant mixtures of non-unital qubit maps*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, 405303 (2022)

journal Impact Factor: 2.331

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 3 (GS), 1 (WoS)

This is the first work to explore the topic of classical mixtures of non-unital channels; i.e., those that do not preserve the identity operator. A popular class of non-unital qubit channels consists in phase-covariant channels. These channels are a common generalization of the maps describing amplitude damping, inverse amplitude damping, and dephasing. When non-unital maps are considered, a number of effects can be observed that does not occur for mixtures of (unital) Pauli channels. For example, the appropriate choice of parameters when mixing non-unital channels results in a unital channel. Similarly, mixing commutative maps, whose order can be switched at any time, can lead to non-commutative maps. Convex combinations of semigroups, which for the Pauli channels lead even to eternally non-Markovian evolutions, do not lead the phase-covariant channels out of the set describing Markovian dynamics. Dynamical semigroups can only be obtained by mixing two semigroups together, while the Pauli channels produce semigroups only by mixing three dynamical maps, from which at least two have to be non-invertible.

11. [H11] *Adjusting phase-covariant qubit channel performance with non-unitality*

K. Siudzińska* and M. Studziński

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **56**, 205301 (2023)

journal Impact Factor: 2.331

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 1 (GS), 2 (WoS)

This article analyzes the communicative properties of phase-covariant channels as a function of their degree of non-unitality. I derived analytical formulas for the minimal and maximal channel fidelity on pure states, as well as for the maximal output purity. For the newly defined measure of non-unitality, I show how to obtain a channel with the desired degree of non-unitality using classical mixtures of unital and maximally non-unital channels. The probability distribution can be treated as noise, which – as it turns out – is beneficial for the considered properties of quantum evolution. Namely, unital maps have the worst performance for all these measures except for the minimal channel fidelity. Moreover, the channel efficiency decreases monotonically with the degree of non-unitality. Similar behavior occurs for concurrence and entanglement formation, which define the entanglement between two qubits. It is possible to observe not only a prolonged life of entanglement but also a process of accelerating its revival after sudden death. Importantly, the improvement in channel performance takes place at every moment of time, unlike in previous works [H10,P6] where the beneficial effects of noise were only temporary.

My contribution:

- supervision of the research group;
- the idea to use non-unitality to manipulate the properties of channel mixtures, the idea for theorem proofs;

- formal analysis and validation of the results;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor;
- management of the research grant by which this work was funded.

12. [H12] *Improving classical capacity of qubit dynamical maps through stationary state manipulation*

K. Siudzińska*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **56**, 235301 (2023)

journal Impact Factor: 2.331

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 0 (GS), 0 (WoS)

In this paper, I analyze classical capacities of phase-covariant channels, in particular the Holevo capacity and the entanglement-assisted classical capacity. The main result shows that all these capacities can increase with an appropriate manipulation of the stationary state of the channel, which is closely related to its degree of non-unitality. More precisely, the more non-unital the channel, the higher its capacity. Engineering of the channel parameters is achieved through classical mixtures in the master equations with memory kernels, for which I develop a method of construction. Interestingly, equivalent engineering can be done by taking mixtures on the level of memory kernels, time-local generators, or even dynamical maps themselves. It has been shown that an increase in the degree of channel non-unitality corresponds to an increase in the Holevo capacity as well as the entanglement-assisted capacity at each moment in time. For highly non-unital maps, the Holevo capacity, and therefore the classical capacity, temporarily exceeds the entanglement-assisted capacity of the unital channel. This means that non-unitality is an important quantum resource for information transfer purposes, able to surpass in its usefulness another resource: quantum entanglement.

13. [H4] *Geometry of phase-covariant qubit channels*

K. Siudzińska

Journal of Physics Communications (2023), DOI: 10.1088/2399-6528/ace0f4

Citescore: 2.6

points on the Ministry list: 70 (200)

citation number: 0 (GS), 0 (WoS)

This publication focuses on the analysis of geometrical properties on the space of non-unital quantum channels on the example of phase-covariant qubit maps. Using the associated Choi-Jamiołkowski states, I derive the formulas for the Hilbert-Schmidt line and volume elements. They depend only on the channel eigenvalues and the parameter that characterizes its non-unitality. The region occupied by positive, trace-preserving maps is in a shape of a house, while the corresponding channels live in a cut-off elliptic cone. The article focuses on finding the region shapes and analytical volumes of the phase-covariant maps, in particular those breaking quantum entanglement and obtained from time-local generators. Even though the analyzed channels are characterized by three parameters, just like the Pauli channels, the obtained results differ significantly. Examples include the shapes and symmetries of the associated regions, as well as the percentages of channels among positive maps. The results allow for a better understanding of the structures and properties of quantum channels.

II. Information on scientific activity

II.4. List of articles published in scientific journals not mentioned in section I.2

The articles are listed in the chronological order. References [P1-P14] follow the numbering in the Summary of Professional Accomplishments. The maximal points on the Ministry's list (50 or 200) are indicated in parentheses. The Impact Factor information comes from the Expertus UMK / Web of Science databases. The number of citations is from the Google Scholar (GS) and Web of Science (WS) databases. Corresponding authors are marked with an asterisk.

14. [P5] *Geometry on the manifold of Gaussian quantum channels*

K. Siudzińska*, K. Luoma, and W. T. Strunz

Physical Review A **100**, 062308 (2019)

journal Impact Factor: 2.777

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 4 (GS), 4 (WoS)

On the space of quantum channels, we define geometrical structures to statistically predict the relative volumes of entanglement-breaking channels among all Gaussian quantum channels. The metric on the space of channels is induced by the Hilbert-Schmidt distance on the space of quantum states. The Choi-Jamiołkowski isomorphism defines the one-to-one correspondence between Gaussian channels and Gaussian states expressed through functions of continuous variables. The volume element of single-mode Gaussian channels can be rewritten using local symplectic invariants. The relative volumes of single-mode Gaussian channels breaking entanglement and incompatibility are finite and have compact analytical formulas. It turns out that knowing the purity of Choi-Jamiolkowski states for the Gaussian channels is sufficient to determine whether a given channel breaks incompatibility.

My contribution:

- derivation of formulas for the geometric structures of single-mode Gaussian channels, proofs of lemmas, determination of relative channel volumes and the coexistence area;
- research investigation;
- plotting the regions occupied by the single-mode Gaussian channels, plotting the relative volumes of the channels as a function of the marginal purity of the associated quantum state;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor;
- management of the research grant by which this work was funded.

15. [P4] *Interpolating between Positive and Completely Positive Maps: A New Hierarchy of Entangled States*

K. Siudzińska, S. Chakraborty, and D. Chruściński*

Entropy **23**, 625 (2021)

journal Impact Factor: 2.738

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 2 (GS), 1 (WoS)

This publication proposes a new classification of positive maps by taking into account additional degrees of freedom between their positivity and complete positivity. By definition, these classes include maps that are contractions but only on subspaces of a given

dimension. For qubit maps, it has been shown that depolarizing maps and depolarizing transpose maps belong to the intermediate class of partial contractions, while transposition does not. We performed a partial comparative analysis of partial contractions with the Kadison-Schwarz maps. The classification of positive maps introduced here is applied to the characterization of entangled states, allowing for an improved distinction of entanglement degree using the Schmidt number.

My contribution:

- derivation of conditions for partial contraction of qubit maps, construction of examples for maps satisfying the partial contraction criteria, comparative analysis of partial contraction and the Kadison-Schwarz maps;
- research investigation;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor.

16. [P2] *Entanglement witnesses from mutually unbiased measurements*

K. Siudzińska* and D. Chruściński

Scientific Reports **11**, 22988 (2021)

journal Impact Factor: 4.997

points on the Ministry list: 140 (200)

citation number: 2 (GS), 1 (WoS)

The article introduces a new family of positive maps, which is defined using mutually unbiased measurements (MUMs). These measurements are a generalization of mutually unbiased bases (MUBs) to non-projective measurements. This family of positive maps allows us to introduce a class of entanglement witnesses whose decomposability depends on the characteristics of the underlying measurements. Interestingly, witnesses constructed from the MUMs belong to the family of witnesses based on the realignment criterion (CCNR). We present examples of qutrit-qutrit states and the witnesses that detect them.

My contribution:

- the idea of using mutually unbiased measurements to construct new families of positive maps and quantum entanglement witnesses;
- construction of positive maps and entanglement witnesses from mutually unbiased measurements, examples of decomposable and indecomposable witnesses together with the states they detect;
- research investigation;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments and correspondence with the editor;
- management of the research grant by which this work was funded.

17. [P1] *All classes of symmetric measurements in finite dimensions*

K. Siudzińska*

Physical Review A **105**, 042209 (2022)

journal Impact Factor: 2.971

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 9 (GS), 5 (WoS)

In this paper, a broad class of symmetric measurements is presented. It can be understood as a common generalization of symmetric, informationally complete, positive operator-valued measures (SIC-POVMs) and mutually unbiased bases (MUBs). A general parameterization allows me to naturally define new families of symmetric measurements. In

particular, in any finite dimension, two new families of informationally complete, mutually unbiased measurement operators can be found. It turns out that they are associated with the well-known generalized SIC-POVMs and mutually unbiased measurements (MUMs). I provide a general method of constructing symmetric measurements from Hermitian orthonormal operator bases. As an example, I consider optimal measurements composed of projectors but not projective measurements. Finally, I analyze the properties of symmetric measurements with applications in entropic uncertainty relations and quantum entanglement detection.

18. [P3] *Indecomposability of entanglement witnesses constructed from symmetric measurements*

K. Siudzińska*

Scientific Reports **12**, 10785 (2022)

journal Impact Factor: 4.997

points on the Ministry list: 140 (200)

citation number: 1 (GS), 1 (WoS)

The subject of this article is the construction and analysis of indecomposable entanglement witnesses. In this paper, I propose a method of constructing positive maps using the symmetric measurements defined in [P5]. These maps are then used to derive formulas for entanglement witnesses; i.e., positive (but not completely positive) operators that detect entangled states. The presented class includes as special cases other popular witnesses; e.g., those constructed from mutually unbiased bases (MUBs), from mutually unbiased measurements (MUMs), or from symmetric, informationally complete, positive operator-valued measures (SIC-POVMs). Special attention has been given to indecomposable entanglement witnesses, which can detect entangled states with positive partial transposition (PPT states, bound entanglement). These calculations are illustrated with examples of witnesses constructed from many different types of measurements together with the PPT states they detect.

Prior to obtaining the doctorate degree:

19. [P6] *Decoherence of a qubit as a diffusion on the Bloch sphere*

K. Siudzińska and D. Chruściński*

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**, 405202 (2015)

journal Impact Factor: 1.933

points on the Ministry list: 30 (200)

citation number: 5 (GS), 2 (WoS)

The work focuses on the analysis of qubit decoherence described in the language of geometrical quantum mechanics. In this model, the density operators of two-level systems are represented by probability distributions that are also the Kähler functions on the Bloch sphere. For the evolution given by the Pauli channel, the master equation of the dynamical semigroup is equivalent to the second-order differential equation (with a deformed Laplacian) for probability distribution components in spherical coordinates. The deformation coefficients are the decoherence rates multiplying the squared rotational momentum components. In particular, the phase-damping channel is given by the diffusion equation on a torus parametrized by a single angle. Interestingly, the complete positivity of dynamical maps is guaranteed by the ellipticity of the deformed Laplacian. This means that the master equation for the probability distribution is the Fokker-Planck diffusion equation on the Bloch sphere.

My contribution:

- derivation of geometrical structures on the Bloch sphere, formulation of the master equations using a deformed Laplacian, proof of the theorem on the relation between ellipticity and complete positivity;
- research investigation;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments.

20. [P7] *Generalized Pauli channels and a class of non-Markovian quantum evolution*

D. Chruściński* and **K. Siudzińska**
 Physical Review A **94**, 022118 (2016)
 journal Impact Factor: 2.925
 points on the Ministry list: 35 (200)
 citation number: 37 (GS), 33 (WoS)

The publication is devoted to the analysis of open quantum systems evolution given by the generalized Pauli channels. These maps describe qudit dynamics, and they are defined by the maximal sets of mutually unbiased bases. We derive both necessary conditions and sufficient conditions for positive divisibility of dynamical maps that are solutions of master equations with time-local generators. Positive divisibility guarantees weak non-Markovianity of the associated evolution and no information backflow to the environment. As an example, we consider eternally non-Markovian evolution; that is, an evolution with always negative decoherence rates. Interestingly, dynamics with a large number of negative rates can be obtained from classical mixing of Markovian semigroups.

My contribution:

- describing the evolution given by time-local generators, derivation of Markovianity and non-Markovianity criteria for quantum evolution, analyzing the example of eternally non-Markovian evolution;
- research investigation;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments.

21. [P8] *Memory kernel approach to generalized Pauli channels: Markovian, semi-Markov, and beyond*

K. Siudzińska and D. Chruściński*
 Physical Review A **96**, 022129 (2017)
 journal Impact Factor: 2.909
 points on the Ministry list: 35 (50)
 citation number: 25 (GS), 21 (WoS)

This article is a continuation of [P2]. Once again, we consider the evolution of open quantum systems given by the generalized Pauli channels. This time, however, the starting point is the master equations not with generators but with non-local memory kernels. We provide the necessary and sufficient conditions for a given kernel to describe a physical dynamics; that is, represented by a completely positive, trace-preserving map. A particular attention is paid to the class of semi-Markov evolution, which is a natural generalization of classical semi-Markov processes. A number of examples is presented of the semi-Markov evolution described by the generalized Pauli channels. Interestingly, a mixture of Markovian semigroups goes beyond this class of maps.

My contribution:

- derivation of the conditions for memory kernels guaranteeing complete positivity of the generated channels, analyzing examples of physically admissible kernels, derivation of the formulas for semi-Markov evolution;
- research investigation;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments.

22. [P9] *Non-Markovianity of geometrical qudit decoherence*

K. Siudzińska*

Reports on Mathematical Physics **80**, 361–372 (2017)

journal Impact Factor: 0.796

points on the Ministry list: 20 (200)

citation number: 4 (GS), 3 (WoS)

This work generalizes the geometrical description of qubit evolution presented in [P7] to higher dimensional (qudit) systems. Mixed quantum states are represented by probability distributions, which are also the Kähler functions on a projective Hilbert space. The master equations with time-local noise operators are equivalent to the Fokker-Planck equations, which now include terms coming from complex vector fields. The Kraus representation of the dynamical map can be represented in an analogous manner. Further analysis is performed for channels constructed from four popular generalizations of the Pauli matrices: the Gell-Mann matrices, the Weyl operators, tensor products of the Pauli matrices, and projectors on mutually unbiased bases.

23. [P10] *Quantum channels irreducibly covariant with respect to the finite group generated by the Weyl operators*

K. Siudzińska and D. Chruściński*

Journal of Mathematical Physics **59**, 033508 (2018)

journal Impact Factor: 1.335

points on the Ministry list: 25 (50)

citation number: 21 (GS), 17 (WoS)

This article presents a construction method for linear maps that are covariant with respect to a unitary representation of the finite group generated by the Weyl operators. This group is a generalization of the quaternion group, which leads to the Pauli channels. The resulting maps are known in the literature as Weyl or Weyl-covariant maps. Special attention has been given to irreducible representations and the corresponding irreducibly covariant quantum channels. Moreover, after introducing additional symmetry constraints in prime dimensions, it is possible to obtain the generalized Pauli channels. Going beyond quantum channels, the paper considers a class of irreducibly covariant positive maps, which finds applications in detection of entangled states. Another application is the analysis of non-Markovianity degrees for open quantum systems evolution provided by irreducibly covariant time-local generators. We find new sufficient conditions for the positive divisibility of dynamical maps. As an example of non-Markovian evolution, we present a mixture of dynamical semigroups with an easily controlled number of negative decoherence rates.

My contribution:

- construction and analysis of the properties for the group generated by Weyl operators and its unitary representations, proofs of theorems, examples;
- research investigation;
- plotting the group's character table;

- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments.

24. [P11] *Two definitions of the Gell-Mann channels – a comparative analysis*

K. Siudzińska*

Reports on Mathematical Physics **81**, 321–345 (2018)

journal Impact Factor: 0.989

points on the Ministry list: 20 (50)

citation number: 3 (GS), 2 (WoS)

The Pauli channels that describe qubit evolution are equivalently defined by their Kraus representation and eigenvalue equations. Both the Kraus operators and eigenoperators are the Pauli matrices. This property does not translate to higher dimensions. When considering qudit dynamics, the definitions are no longer equivalent. This paper presents a comparative analysis of two non-equivalent definitions of the quantum channels in which the Pauli matrices are replaced by the Gell-Mann matrices. It is interesting to note that both definitions lead to the same channels not only for qubits but also for qutrits. For higher dimensions, conditions for complete positivity of channels are presented, as well as the conditions under which both channels produce identical dynamics. This analysis is repeated for $SU(N)$ algebra generators using structure constants. Analogical considerations are also carried out for two generalizations of time-local generators of the Pauli channels.

25. [P12] *Regularized maximal fidelity of the generalized Pauli channels*

K. Siudzińska*

Physical Review A **99**, 012340 (2019)

journal Impact Factor: 2.777

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 8 (GS), 4 (WoS)

In this work, I consider the asymptotic regularization of quantum channel fidelity, which measures the output state deformations under infinitely many actions of the channel. For the generalized Pauli channels, I derive analytical formulas for the minimal and maximal channel fidelity on pure states, as well as for the maximal output infinity norm, which is a measure of output purity. For a wide class of channels, it is proven that all these quantities are weakly multiplicative, making it possible to find an asymptotic regularization of their fidelity. An interesting conclusion is that the maximal output infinity norm and the maximal fidelity of generalized Pauli channels given by local-time generators are always weakly multiplicative.

26. [P13] *Engineering fidelity of the generalized Pauli channels via legitimate memory kernels*

K. Siudzińska and D. Chruściński*

Physical Review A **100**, 012303 (2019)

journal Impact Factor: 2.777

points on the Ministry list: 100 (200)

citation number: 10 (GS), 10 (WoS)

This article focuses on analyzing the fidelity of generalized Pauli channels given by master equations with memory kernels. The channel fidelity measures deformations of the output states relative to the input states. We compare the evolution of fidelity for a Markovian semigroup (a system without memory) and the dynamical map resulting from a non-local deformation of the memory kernel for the same semigroup. Interestingly, for a suitable choice of parameters characterizing the memory kernel, a quantum evolution with non-local noise can be temporarily described by a channel with higher fidelity than for the

evolution without noise. In other words, dynamical maps for evolution with memory locally produce less distorted output states. The additional noise also helps to prolong the life of quantum entanglement, reduce the entropy of the system, and increase the coherence of quantum states. These results confirm previous observations that proper noise engineering can prove beneficial for quantum information processing and transmission.

My contribution:

- derivation of formulas for the minimal and maximal fidelity of channels, analysis of examples;
- research investigation;
- plotting the time-dependence of the analyzed measures for Markovian and non-Markovian evolutions;
- preparation of the manuscript draft;
- response to referees' comments.

II.7. Information on presentations given at national or international scientific or arts conferences, including a list of lectures delivered upon invitation and plenary lectures

Presentations:

1. 41st International Conference on Quantum Probability and Related Topics, Al Ain, United Arab Emirates, 28 March – 1 April 2021
Markovian semigroup from mixing non-invertible dynamical maps
2. Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis, Moscow, Russia, 30 June – 9 July 2021
Interpolating between positive and completely positive maps: a new hierarchy of entangled states

Prior to obtaining the doctorate degree:

3. Quantum Roundabout, Nottingham, Great Britain, 6–8 July 2016
The non-Markovian evolution of the generalized Pauli channels
4. 49th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 17–18 June 2017
Quantum semi-Markov evolution for the generalized Pauli channels
5. CIYSCon, Toruń, Poland, 28–30 June 2017
Semi-Markov evolution of the Generalized Pauli channel
6. 51st Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 16–18 June 2019
On the geometry of one-mode Gaussian channels

Posters:

7. 54th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 8–11 June 2023
Enhancing qubit channel performance through stationary state manipulation
8. Quantum Information Days 2020(+1), Warsaw, Poland, 22–24 February 2021
Generalization of Pauli channels through mutually unbiased measurements

Prior to obtaining the doctorate degree:

9. 45th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 1–2 June 2013
Two-body problem in general relativity
10. 47th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 19–21 June 2015
Geometrical description of Lindblad equations with Gell-Mann matrices
11. 48th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 10–12 June 2016
Markovianity of the generalized Pauli channels
12. CIYSSCon, Toruń, Poland, 28–30 June 2017
A comparative analysis of two definitions of the Gell-Mann channels
13. 50th Symposium on Mathematical Physics, Toruń, Poland, 21–24 June 2018
Minimal and maximal fidelity of the generalized Pauli channels
14. 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operator Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications, Będlewo, Poland, 15–21 July 2018
Quantum maps covariant with respect to the group generated by the Weyl operators

Lectures delivered upon invitation in other research centers:

15. Seminar of the Institute of Theoretical Physics and Astrophysics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, University of Gdańsk, Gdańsk, Poland, 29 January 2023
Non-Markovianity criteria for mixtures of qubit dynamical maps
16. Current Trends in Quantum Information, Sopot, Poland, 15 May 2020
Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels

Prior to obtaining the doctorate degree:

17. Seminar of the Department of Theoretical Quantum Optics, Technische Universität Dresden, Dresden, Germany, 14 November 2018
Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels

II.8. Information on participation in organizational and scientific committees at national or international conferences, including the applicant's function

Member of the organizational committee of the 54th Symposium on Mathematical Physics (international conference).

II.9. Information on participation in the works of research teams realizing projects financed through national and international competitions, including the projects which have been completed and projects in progress, and information on the function performed in the team

As the Principal Investigator:

1. 2022 – now: project manager of *Quantum maps with applications in quantum communication and information processing* (512 400 PLN), the National Science Centre (Poland) research grant SONATA 17 No. 2021/43/D/ST2/00102, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, duration time: 36 months.

2. 2019 – 2020: project manager of *Generalized Pauli channels in the evolution of open quantum systems* (33 800 PLN), the National Science Centre (Poland) research grant PRELUDIUM 16 No. 2018/31/N/ST2/00250, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, duration time: 12 months.

Prior to obtaining the doctorate degree:

3. 2018 – 2019: project manager of *Evolution of open quantum systems governed by unitarily covariant quantum channels* (109 352 PLN), the National Science Centre (Poland) research grant ETIUDA 6 No. 2018/28/T/ST2/00008, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, duration time: 12 months.

As a co-investigator:

4. 2021 – 2022: participant in the project *Quantum dynamical maps beyond Markovian regime* (2 836 400 PLN), the National Science Centre (Poland) research grant MAESTRO 10 No. 2018/30/A/ST2/00837, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, project investigator: Prof. Dariusz Chruściński.

Prior to obtaining the doctorate degree:

5. 2016 – 2018: PhD student in the project *Non-Markovian quantum dynamics* (549 800 PLN), the National Science Centre (Poland) research grant OPUS 9 No. 2015/19/B/ST1/03095, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, project investigator: Prof. Dariusz Chruściński.
6. 2013 – 2014: MSc student in the project *Precise optical control and metrology of quantum systems* (3 358 000 PLN), TEAM Programme, Foundation for Polish Science, cofounded by European Regional Development Fund, project No. TEAM/2010-6/3, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University in Toruń, project investigator: Prof. Roman Ciuryło.

II.11. Information on internships completed in scientific or artistic institutions, also abroad, including the place, time and duration of the internship and its character

International scientific internship at the Technische Universität Dresden in Germany (Prof. Walter T. Strunz's research group), from 11.2018 to 04.2019 (6 months). The internship resulted in a publication in Physical Review A and a continued scientific collaboration.

II.13. Information on scientific or artistic works reviewed, in particular those published in international journals

All the publications listed in Sections I.2 and II.4 were peer-reviewed and appeared in international journals.

Peer-reviewed scientific articles reviewed for international journals:

- Physical Review Letters,
- Physical Review X,
- Physical Review A,
- Journal on Mathematical Physics A: Mathematical and Theoretical,

- Quantum Science and Technology,
- Open Systems and Information Dynamics,
- Quantum Information Processing,
- Advanced Quantum Technologies,
- The European Physical Journal Plus.

II.15. Information on participation in research teams realizing projects other than those defined in section II.9

- Group of Prof. Walter T. Strunz, Technische Universität Dresden, Germany.
- Dr. Vinayak Jagadish, Department of Atomic Optics, Faculty of Mathematics, Physics and Chemistry, Jagiellonian University, Cracow, Poland.
- Dr. Michał Studziński, Institute of Theoretical Physics and Astrophysics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, University of Gdańsk.
- Dr. Krzysztof Szczygielski, Institute of Theoretical Physics and Astrophysics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, University of Gdańsk.
- Group of Dr. Hab. Łukasz Rudnicki, International Centre for Theory of Quantum Technologies, University of Gdańsk.

II.16. Information on membership in the teams assessing applications for financing of research projects, applications for scientific awards, applications in other competitions of scientific or didactic character

A committee member evaluating entries in the national contest Fizyczne i Astronomiczne Stypendia w Toruniu (FAST) in the years 2021–2023 (editions XII–XIII).

IV. Scientometric data

- ResearcherID: P-1970-2016
- ORCID: 0000-0002-1816-7242
- Google Scholar: PzYQM2UAAAAJ
- Hirsch Index: 8 (Google Scholar), 7 (Web of Science)
- total citation number: 200 (Google Scholar), 151 (Web of Science)
- total citation number without auto-citations: 83 (Web of Science)
- total Impact Factor: 66.604
- total number of points on the Ministry list: 2215, including
- publications after the year 2018 (up to 200 pts.): 2050
- publications before the year 2018 (up to 50 pts.): 165

The full list of articles published by the habilitation candidate in scientific journals consists of the articles listed in Section I.2, which make up the habilitation achievement, and other articles listed in Section II.4.

.....
(applicant's signature)