

Wydział Matematyki i Informatyki
 Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
 ul. Chopina 12/18
 87-100 Toruń
 za pośrednictwem:
Rady Doskonałości Naukowej
 pl. Defilad 1
 00-901 Warszawa
 (Pałac Kultury i Nauki, p. XXIV, pok. 2401)

Agnieszka Goroncy
 Wydział Matematyki i Informatyki
 Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
 ul. Chopina 12/18
 87-100 Toruń

Wniosek

z dnia 24 czerwca 2020 r.

o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie **nauk ścisłych i przyrodniczych** w dyscyplinie¹ **matematyka**.

Określenie osiągnięcia naukowego będącego podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Oszacowania dla uporządkowanych funkcjonalów statystycznych pochodzących z nieparametrycznych rodzin rozkładów

Wnioskuje – na podstawie art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 ze zm.) – aby komisja habilitacyjna podejmowała uchwałę w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w głosowaniu ~~tajnym~~/**jawnym***²

Zostałem poinformowany, że:

Administratorem w odniesieniu do danych osobowych pozyskanych w ramach postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest Przewodniczący Rady Doskonałości Naukowej z siedzibą w Warszawie (pl. Defilad 1, XXIV piętro, 00-901 Warszawa).

Kontakt za pośrednictwem e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl, tel. 22 656 60 98 lub w siedzibie organu. Dane osobowe będą przetwarzane w oparciu o przesłankę wskazaną w art. 6 ust. 1 lit. c) Rozporządzenia UE 2016/679 z dnia 27 kwietnia 2016 r. w związku z art. 220 - 221 oraz art. 232 – 240 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, w celu przeprowadzenie postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego oraz realizacji praw i obowiązków oraz środków odwoławczych przewidzianych w tym postępowaniu.

Szczegółowa informacja na temat przetwarzania danych osobowych w postępowaniu dostępna jest na stronie www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html

Goroncy Agnieszka

 (podpis wnioskodawcy)

¹ Klasyfikacja dziedzin i dyscyplin wg. rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 20 września 2018 r. w sprawie dziedzin nauki i dyscyplin naukowych oraz dyscyplin w zakresie sztuki (Dz. U. z 2018 r. poz. 1818).

² * Niepotrzebne skreślić

Załączniki:

1. Dane wnioskodawcy.
2. Kopia dokumentu potwierdzającego posiadanie stopnia doktora.
3. Autoreferat.
4. Wykaz osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny.
5. Kopie prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego.
6. Kopia dokumentu potwierdzająca otrzymanie stypendium (stażu) naukowego w Aachen, Niemcy.
7. Kopia dokumentu potwierdzająca otrzymanie grantu nr 2011/01/D/ST1/04172.
8. Kopia dokumentu potwierdzająca otrzymanie grantu nr N201 044 31/3695.
9. Oświadczenia współautorów prac [A1], [A4], [A6], [A7].
10. Wersja elektroniczna wniosku i załączników wymienionych w punktach 1-9.

Agnieszka Goroncy
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

24 czerwca 2020 r.
Załącznik 4.

Wykaz osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny

I INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH NAUKOWYCH ALBO ARTYSTYCZNYCH, O KTÓRYCH MOWA W ART. 219 UST. 1. PKT 2 USTAWY

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, niniejszym wskazuję cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

**OSZACOWANIA DLA UPORZĄDKOWANYCH FUNKCJONAŁÓW
STATYSTYCZNYCH POCHODZĄCYCH
Z NIEPARAMETRYCZNYCH RODZIN ROZKŁADÓW**

Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

[A1] Bieniek, M., GORONCY, A. (2020), Sharp lower bounds on expectations of gOS based on DGFR distributions, *Stat. Papers* 61:3, 1027—1042.

IF JCR: 1.345, Punktacja: 100

Wkład własny w powstanie tej pracy polegał na postawieniu problemu oszacowań dolnych dla uogólnionych statystyk pozycyjnych w różnych klasach rozkładów, sformułowaniu i udowodnieniu Lemma 1, sprawdzeniu prawdziwości Proposition 2 jako rozszerzenia Proposition 1 z pracy Danielak i Rychlika (2004), Sharp bounds for expectations of spacings from decreasing density and failure rate families. *Appl. Math. (Warsaw)* 31, 369—395, sformułowaniu i udowodnieniu Proposition 3, wykonaniu szczegółowych rachunków w Podrozdziale 3.1, wykonaniu obliczeń numerycznych zamieszczonych w Rozdziale 4 (Table 1,2,3) i sformułowaniu konkluzji z nich wynikających, a także opracowaniu koncepcji i układu pracy oraz przygotowaniu manuskryptu.

[A2] GORONCY, A. (2020), On the upper bounds on expectations of gOSs based on DFR and DFRA distributions, *Statistics*, 54:2, 402—414.

IF JCR: 0.675, Punktacja: 70

Jestem jedynym autorem tej pracy.

- [A3] GORONCY, A. (2019), Optimal upper bounds on expected k th record values from IGFR distributions, *Statistics*, 53:5, 1012—1036.
IF JCR: 0.675, Punktacja: 70
 Jestem jedynym autorem tej pracy.
- [A4] GORONCY, A., Rychlik T. (2018), Refined solution to upper bound problem for the expectations of order statistics from decreasing density on the average distributions, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 47:16, 4029—4041.
IF JCR: 0.424, Punktacja: 15
 Wkład własny w powstanie tej pracy polegał na sformułowaniu i udowodnieniu Lemma 1, 2, udowodnieniu głównego wyniku (Theorem 2), a także opracowaniu koncepcji i układu pracy oraz przygotowaniu wstępnej wersji manuskryptu.
- [A5] GORONCY, A. (2017), Upper non-positive bounds on expectations of generalized order statistics from DD and DDA populations, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 46:24, 11972—11987.
IF JCR: 0.353, Punktacja: 15
 Jestem jedynym autorem tej pracy.
- [A6] GORONCY, A., Rychlik T. (2016), Evaluations of expectations of order statistics and spacings based on IFR distributions, *Metrika* 79:6, 635—657.
IF JCR: 0.637, Punktacja: 15
 Wkład własny w powstanie tej pracy polegał na wyznaczeniu oszacowań dla wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych oraz spacji w przypadku rzutu postaci l-h-c (Proposition 2, 4), wyznaczeniu postaci rzutu przy szczególnej modyfikacji głównych założeń (Proposition 6) i wykorzystaniu jej do oszacowania wartości oczekiwanej ostatnich spacji (Proposition 7), a także wykonaniu obliczeń numerycznych (Table 1,2), opracowaniu koncepcji i układu pracy oraz przygotowaniu ostatecznej wersji manuskryptu (poza ostatnim rozdziałem).
- [A7] GORONCY, A., Rychlik T. (2015), Optimal bounds on expectations of order statistics and spacings from nonparametric families of distributions generated by convex transform order, *Metrika*, 78:2, 175—204.
IF JCR: 0.595, Punktacja: 20
 Wkład własny w powstanie tej pracy polegał na sformułowaniu i udowodnieniu wyników dotyczących analitycznej postaci rzutu (Proposition 1) oraz udowodnieniu wyników dla konkretnych przypadków statystyk pozycyjnych oraz spacji, a także wykonaniu obliczeń numerycznych (Table 1,2), opracowaniu koncepcji i układu pracy oraz przygotowaniu ostatecznej wersji manuskryptu.

[A8] GORONCY, A. (2014), Bounds on expected generalized order statistics, *Statistics*, 48:3, 593—608.

IF JCR: 0.532, Punktacja: 30

Jestem jedynym autorem tej pracy.

II INFORMACJA O AKTYWNOŚCI NAUKOWEJ ALBO ARTYSTYCZNEJ

1 Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych.

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, niewchodzące w skład ww. osiągnięcia stanowi 16 artykułów naukowych.

Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora

[B1] GORONCY, A. (2009), Lower bounds on positive L -statistics, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 38:12, 1989—2002.

IF JCR: 0.406, Punktacja: 10

[B2] GORONCY, A., Rychlik, T., (2009), Lower bounds on spacings based on with-replacement model, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 38:12, 1982—1988.

IF JCR: 0.406, Punktacja: 10

[B3] GORONCY, A., Rychlik, T., (2008), Lower bounds on expectations of positive L -statistics from without-replacement models, *J. Statist. Plann. Inference*, 138, 3647—3659.

IF JCR: 0.679, Punktacja: 10

[B4] GORONCY, A., Rychlik, T., (2006), Lower bounds on expectations of positive L -statistics based on samples drawn with replacement, *Statistics*, 40, 389—408.

IF JCR: 0.461

[B5] GORONCY, A., Rychlik, T., (2006), How deviant can you be? The complete solution. *Math. Inequal. Appl.*, 9, 633—647.

IF JCR: 0.341

Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora

[C1] Dembińska, A., GORONCY, A. (2020), Moments of order statistics from DNID discrete random variables with application in reliability, *J. Comput. Appl. Math.*, 371, 112703.

IF JCR: 1.883, Punktacja: 100

[C2] Blumroeder, J.S., Burova, N., Winter, S., GORONCY, A., Hobson, P.R., Shegolev, A., Dobrynin, D., Amosova, I., Ilina, O., Parinova, T., Volkov, A., Graebener, U.F., Ibisch, P.L. (2019): Ecological effects of clearcutting

practices in a boreal forest (Arkhangelsk Region, Russian Federation) both with and without FSC certification, *Ecol. Indic.* 106, 105461—1—16.
IF JCR: 4.490, Punktacja: 140

- [C3] Łaszewska, K., GORONCY, A., Weber, P., Pracki, T., Tafil-Klawe, M., Pracka, D., Złomańczuk, P. (2018). Daytime acute non-visual alerting response in brain activity occurs as a result of short- and long-wavelengths of light. *J. Psychophysiol.*, 32:4, 202—226.

IF JCR: 1.000, Punktacja: 25

- [C4] Łaszewska K., Pracki T., Weber, P., GORONCY, A., Tafil-Klawe M., Złomańczuk P., Pracka D., (2018), Influence of the spectral quality of light on daytime alertness levels in humans, *Adv. Cogn. Psychol.*, 14:4 192—208.

IF JCR: 1.432, Punktacja: 20

- [C5] Dembińska, A., GORONCY, A., (2018), On moments of discrete order statistics with applications in reliability. In: *18th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPS '18): Workshop on Branching Processes and Applications; Workshop on Biostatistics; Seminar on Statistical Data Analysis, Pomorie, Bulgaria, 25-30 June 2018: conference proceedings and abstracts*, ed. by E. Stoimenova and M. Slavtchova-Bojkova, 32—35.

- [C6] GORONCY, A., Rychlik, T., (2015), Bounds on the expected differences of consecutive order statistics based on the increasing failure rate samples. In: *The Ninth International Conference on Mathematical Methods in Reliability, Tokyo, Japan, on June 1 – 4, 2015*, 1—6.

- [C7] GORONCY, A., Rychlik, T., (2013), Optimal bounds on expectations of order statistics based on increasing density and failure rate samples. In: *The 8th International Conference on Mathematical Methods In Reliability: Theory Methods and Applications, 1–4 July 2013, Proceedings* (N. Balakrishnan, M. Finkelstein, T. de Wet, red.), Stellenbosch, South Africa, 259—262.

- [C8] GORONCY, A., Kamps, U. (2013), Random convex combinations of m -generalized order statistics, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 42:17, 3076—3084.

IF JCR: 0.284, Punktacja: 15

- [C9] GORONCY, A., Kamps, U. (2012), Relations for m -generalized order statistics via an Opial-type inequality. *J. Statist. Plann. Inference*, 142, 1457—1463.

IF JCR: 0.713, Punktacja: 20

- [C10] GORONCY, A. (2012), Bounds for linear functionals on monotone func-

tions in L^p -spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 15, 107—116.

IF JCR: 0.588, Punktacja: 25

- [C11] GORONCY, A., Rychlik, T., (2011), Lower bounds on the expectations of upper record values. *J. Statist. Plann. Inference*, 141, 2726—2737.

IF JCR: 0.716, Punktacja: 20

2 Informacja o wystąpieniach na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych lub artystycznych.

Wystąpienia zgłoszone na konferencje naukowe przed uzyskaniem stopnia doktora

- [R1] *XXXV Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki*, referat pt. „Oszacowania dla spacji z próby losowanej ze zwracaniem”, 11-19 września 2007 r., Zakopane.
- [R2] *Mathematical Methods in Reliability (MMR)*, referat pt. „Optimal bounds on expectations of L -statistics based on without replacement model”, 1-4 lipca 2007 r., Glasgow, Szkocja.
- [R3] *Ordered Statistical Data & Inequalities: Theory and Applications*, referat pt. „Lower bounds on positive L -statistics based on continuous models”, 12-14 czerwca 2007 r., Amman, Jordania.
- [R4] *XXXII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Optymalne oszacowania L -statystyk opartych na modelu losowania bez powtórzeń”, 4-8 grudnia 2006 r., Wisła.
- [R5] *XXXI Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Oszacowania wartości oczekiwanych L -statystyk opartych na modelu losowania z powtórzeniami”, 5-9 grudnia 2005 r., Wisła.
- [R6] *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, referat pt. „Lower bounds on some positive L -statistics based on drawing with replacement models”, 15-18 czerwca 2005 r., Izmir, Turcja.
- [R7] *XXX Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Optymalne deterministyczne oszacowania L -statystyk”, 6-10 grudnia 2004 r., Wisła.

Wystąpienia na konferencjach naukowych po uzyskaniu stopnia doktora

Wykłady zaproszone

- [R8] *The 18th Conference of the Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society*, referat zaproszony pt. „Expected lifetimes of coherent systems with DNID components” w sesji *Order statistics with applications in reliability*, 11-14 czerwca 2019 r., Florencja, Włochy.
- [R9] *Ordered Data Analysis, Models and Health Research Methods: An International Conference in Honor of H.N. Nagaraja for His 60th Birthday*, referat zaproszony pt. „Optimal bounds on expectations of order statistics and spacings based on increasing density samples” w sesji *Bounds and Inequalities for Ordered Data*, 7 - 9 marca 2014 r., University of Texas at Dallas, Richardson, USA.
- [R10] *First German-Polish Joint Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, referat zaproszony pt. „Evaluation of expected order statistics from restricted families” w sesji *Models for Ordered Data*, 6-9 czerwca 2013 r., Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
- [R11] *1st Conference of the International Society for NonParametric Statistics*, referat zaproszony pt. „Bounds on expected generalized order statistics”, 15-19 czerwca 2012 r., Chalkidiki, Grecja.
- [R12] *International Conference on Advances in Probability and Statistics – Theory and Applications: A Celebration of N. Balakrishnan’s 30 years of Contributions to Statistics*, referat zaproszony pt. „Bounds on L -statistics from discrete models”, 28-31 grudnia 2011 r., Hongkong.

Wykłady zgłoszone

- [R13] *XLV Konferencja „Statystyka Matematyczna” (XLV Conference on Mathematical Statistics)*, referat pt. „Górne oszacowania uogólnionych statystyk pozycyjnych z rozkładów o rosnącej uogólnionej intensywnosci awarii”, 2-6 grudnia 2019 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R14] *Ordered Statistical Data (OSD 2019) meeting*, spotkanie grupy badawczej, referat pt. „Bounds on GOSS: open problems”, 13-17 maja 2019 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R15] *XLIV Konferencja „Statystyka Matematyczna” (XLIV Conference on Mathematical Statistics)*, referat pt. „Moments of discrete lifetimes of reliability systems with DNID components”, 3-7 grudnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.

- [R16] *International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LinStat'2018)*, referat pt. „Expected lifetimes of reliability systems with dependent and nonhomogeneous components” w organizowanej przeze mnie sesji *Ordered Statistics*, 20-24 sierpnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R17] *18th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPS'18)*, referat pt. „On moments of discrete order statistics with applications in reliability”, 25-30 czerwca 2018 r., Pomorie, Bułgaria.
- [R18] *XLIII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Oszacowania wartości oczekiwanych k -tych rekordów z rozkładów o rosnącej uogólnionej intensywności awarii”, 4-8 grudnia 2017 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R19] *10th International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR 2017)*, referat pt. „Lower bounds on expected generalized order statistics from DD and DFR distributions with applications in reliability”, 3-6 lipca 2017 r., Grenoble, Francja.
- [R20] *Ordered Statistical Data (OSD 2017) meeting*, spotkanie grupy badawczej, referat pt. „Bounds on record values from restricted families of distributions: open problems”, 29 maja - 02 czerwca 2017 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R21] *3rd International Conference on Advances in Statistics*, referat pt. „Sharp lower bounds on expectations of GOS based on DGFR distributions”, 28-30 kwietnia 2017 r., Helsinki, Finlandia.
- [R22] *XLII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Lower bounds on expectations of generalized order statistics from restricted families of distributions”, 27 listopada - 02 grudnia 2016 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R23] *12th International Conference on Ordered Statistical Data (OSD 2016)*, referat pt. „Upper non-positive bounds on expectations of generalized order statistics from decreasing density populations”, 25-28 maja 2016 r., University of Pireus, Grecja.
- [R24] *XLI Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Górne niedodatnie oszacowania wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozytywnych z rozkładów DD i DFR”, 06-11 grudnia 2015 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R25] *Ordered Statistical Data (OSD 2015) meeting*, spotkanie grupy badawczej, referat pt. „Ordered random variables: random convex combinations and distributional characterizations: open problems”, 20-25 września 2015 r.,

Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.

- [R26] *The Ninth International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR 2015)*, referat pt. „Bounds on the expected differences of consecutive order statistics based on the increasing failure rate samples”, 1-4 czerwca 2015 r., Uniwersytet Tsukuba w Tokio, Japonia.
- [R27] *XL Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Oszacowania wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych i spacji w modelach z rosnącą intensywnością awarii”, 30 listopada - 05 grudnia 2014, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R28] *11th International Conference on Ordered Statistical Data (OSD 2014)*, referat pt. „Optimal bounds on expectations of order statistics and spacings based on the ID distributions”, 2-6 czerwca 2014 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- [R29] *XXXVIII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Nierówności dla wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych”, 3-7 grudnia 2012 r., Wisła.
- [R30] *Tenth International Conference on Ordered Statistical Data and Their Applications (OSDA)*, referat pt. „Bounds on expectations of generalized order statistics”, 23-25 maja 2012 r., Murcja, Hiszpania.
- [R31] *XXXVII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Losowe kombinacje wypukłe m -uogólnionych statystyk pozycyjnych”, 5-9 grudnia 2011 r., Wisła.
- [R32] *Ordered Statistical Data and Their Applications (OSDA)*, referat pt. „Lower bounds on record values”, 11-13 lipca 2010 r., Zagazig, Egipt.
- [R33] *XXXV Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Dolne oszacowania wartości rekordowych”, 7-11 grudnia 2009 r., Wisła.
- [R34] *XXXIII Konferencja „Statystyka Matematyczna”*, referat pt. „Optymalne oszacowania wartości oczekiwanych L -statystyk w modelu ciągłym”, 3-7 grudnia 2007 r., Wisła.

3 Informacja o udziale w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji krajowych lub międzynarodowych.

- i. Członkini Komitetu Organizacyjnego spotkania grupy badawczej *Ordered Statistical Data (OSD 2019) meeting*, 13-17 maja 2019 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- ii. Członkini Komitetu Organizacyjnego *XLIV Konferencji Statystyka Matematyczna (XLIV Conference on Mathematical Statistics)*, 3-7 grudnia

2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.

- iii. Organizator sesji specjalnej *Ordered Statistics* na konferencji *International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LinStat'2018)*, 20-24 sierpnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- iv. Członkini Komitetu Organizacyjnego *11th International Conference on Ordered Statistical Data (OSD 2014)*, 2-6 czerwca 2014 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- v. Prowadząca sesje (chair):
 - *Models for Ordered Data I, First German-Polish Joint Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, 6-9 czerwca 2013 r., Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
 - *Ordered Statistics I, International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LinStat'2018)*, 20-24 sierpnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.

4 Informacja o uczestnictwie w pracach zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych.

Projekty realizowane przed uzyskaniem stopnia doktora

- i. Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, grant promotorski nr N201 044 31/3695 pt. *Oszacowania dolne dodatnich funkcjonalów statystycznych* - główny wykonawca, kierownik: prof. dr hab. Tomasz Rychlik, 2006 – 2007.

Projekty realizowane po uzyskaniu stopnia doktora

- ii. Grant Narodowego Centrum Nauki nr 2015/19/B/ST1/03100 (Opus 10) pt. *Uporządkowane zmienne losowe stosowane w statystyce i teorii niezawodności* - wykonawca, kierownik: prof. dr hab. Tomasz Rychlik, 10.06.2016 r.– 09.07.2019 r.
- iii. Grant Narodowego Centrum Nauki nr 2011/01/D/ST1/04172 (Sonata 1) pt. *Oszacowania wartości oczekiwanych uporządkowanych zmiennych losowych* - kierownik i główny wykonawca, 01.12.2011 r. – 30.11.2015 r.
- iv. Stypendium badawcze *postdoc* w Institute of Statistics, RWTH Aachen, Niemcy, przyznane przez Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DA-

AD): *Bounds on generalized order statistics* - główny wykonawca pod kierunkiem prof. Udo Kamps, 01.09.2010 r. — 31.01.2011 r.

5 Informacja o odbytych stażach w instytucjach naukowych lub artystycznych.

Stypendium badawcze *postdoc*

Stypendium badawcze *postdoc* (wspomniane w II(4)iv) zostało przyznane przez Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) w roku 2010, realizowane było w Institute of Statistics, RWTH Aachen, Niemcy, pod kierunkiem prof. Udo Kamps, prekursora idei uogólnionych statystyk pozycyjnych. Tematyka badań dotyczyła oszacowań dla uogólnionych statystyk pozycyjnych: *Bounds on generalized order statistics*. Stypendium realizowane było w okresie 01.09.2010 r. – 31.01.2011 r. W wyniku współpracy z prof. Udo Kampsem powstały dwie publikacje naukowe ([C8], [C9]).

6 Informacja o recenzowanych pracach naukowych lub artystycznych, w szczególności publikowanych w czasopismach międzynarodowych.

- i. Recenzent artykułów naukowych dla następujących czasopism międzynarodowych: *Statistics, Statistics and Probability Letters, Communications in Statistics: Simulation and Computation, Communications in Statistics: Theory and Methods, Probability and Mathematical Statistics*.
- ii. Recenzent AMS Mathematical Reviews/MathSciNet.
- iii. Recenzent pracy nadesłanej na konferencję *13th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM*, 2018 r.
- iv. Recenzent dwudziestu prac dyplomowych (11 licencjackich i 9 magisterskich) na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK.

7 Informacja o udziale w zespołach badawczych, realizujących projekty inne niż określone w pkt. II.4.

- i. Główny wykonawca projektu badawczego pt. *Biostatistical Analysis of data from the forest in the Oblast Arkhangelsk in Russia (FSC impact study)* nr 21240951, realizowanego dla WWF Deutschland (Berlin, Niemcy), 2018 r.
- ii. Główny wykonawca w grantie Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu nr 400-M pt. *Wykorzystanie narzędzi informatycznych do uzyskania optymalnych oszacowań funkcjonalów statystycznych.*, 03.2010 r. — 12.2010 r.
- iii. Członek Centrum Badań Zmian Klimatu (*Centre for Climate Change Research*), Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu (od 1.12.2019 r.).

- 8 **Informacja o uczestnictwie w zespołach oceniających wnioski o finansowanie badań, wnioski o przyznanie nagród naukowych, wnioski w innych konkursach mających charakter naukowy lub dydaktyczny.**

Członkini jury konkursu dla młodych statystyków organizowanego podczas XLV Konferencji „Statystyka Matematyczna”, 2-6 grudnia 2019 r.

III INFORMACJA O WSPÓŁPRACY Z OTOCZENIEM SPOŁECZNYM I GOSPODARCZYM

1. **Informacja o współpracy z sektorem gospodarczym.**

Współpraca z WWF Deutschland (Berlin, Niemcy), w szczególności z prof. Susanne Winter w 2018 r. w ramach projektu badawczego pt. *Biostatistical Analysis of data from the forest in the Oblast Arkhangelsk in Russia (FSC impact study)* nr 21240951 (wspomniany w II(7)i). Współpraca ta obejmowała statystyczną analizę danych w ekologii, w jej wyniku powstała wspólna publikacja naukowa ([C2]).

2. **Informacja o wykonanych ekspertyzach lub innych opracowaniach wykonanych na zamówienie instytucji publicznych lub przedsiębiorców.**

- i. Wykonanie ekspertyzy statystycznej na zlecenie firmy KRONOSPAN Mielec sp. z o.o.: *Szacowanie emisji pyłu, H₂CO, NH₃, NO₂ oraz CO na podstawie danych dostarczonych przez firmę KRONOSPAN Mielec Sp. z o.o.*, sierpień 2019 r. Ekspertyza miała na celu weryfikację i dokładną analizę statystyczną modeli regresji zaproponowanych przez firmę do oszacowania emisji poszczególnych parametrów z dwóch emitorów do środowiska.
- ii. Przygotowanie szkolenia zdalnego *Podstawy PS IMAGO PRO* na zlecenie firmy Predictive Solutions Sp. z o.o. (wcześniej SPSS Polska), kwiecień-maj 2020 r.

IV INFORMACJE NAUKOMETRYCZNE

Researcher ID: H-4376-2011

ORCID: 0000-0002-3288-1530

Scopus author ID: 14119877300

1. Informacja o punktacji Impact Factor.

Sumaryczny *Impact Factor (IF)* wszystkich publikacji naukowych według listy *Journal Citation Reports (JCR)*, zgodnie z rokiem opublikowania (w przypadku publikacji z lat 2019-2020 zastosowano *IF* z roku 2018) wynosi **18.635**.

Impact Factor

Przed uzyskaniem stopnia doktora	Po uzyskaniu stopnia doktora	Łącznie
2.293	16.342	18.635

2. Informacja o liczbie cytowań publikacji wnioskodawcy, z oddzielnym uwzględnieniem autocytowań.

Liczba cytowań:

- wg bazy *Web of Science*: **71** (bez autocytowań: **35**),
- wg bazy *Scopus*: **78** (bez autocytowań: **42**).

3. Informacja o posiadanym indeksie Hirscha.

Indeks Hirscha wg bazy *Web of Science* oraz wg bazy *Scopus*: **6**.

4. Informacja o liczbie punktów MNiSW.

Summaryczna liczba punktów według Listy MNiSW wszystkich publikacji naukowych, zgodnie z rokiem opublikowania wynosi **250** dla publikacji z lat 2008-2018 oraz **480** dla publikacji z lat 2019-2020.

Liczba punktów

Kategoria	do 2018	2019-2020
Przed uzyskaniem stopnia doktora	30	-
Po uzyskaniu stopnia doktora	220	480
Łącznie	250	480

Gorawy Agnieszka

Autoreferat

Agnieszka Goroncy

Spis treści

1	Imię i nazwisko	2
2	Posiadane dyplomy i stopnie naukowe	2
3	Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych	2
4	Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy	2
4.1	Wprowadzenie	3
4.2	Oszacowania dla statystyk pozycyjnych i spacji	14
4.2.1	Oszacowania górne dodatnie	15
4.2.2	Oszacowania górne ujemne	22
4.3	Oszacowania dla rekordów	23
4.4	Oszacowania dla uogólnionych statystyk pozycyjnych	25
4.4.1	Ogólne rodziny rozkładów	25
4.4.2	Rodzina rozkładów DGFR	27
4.4.3	Rodziny rozkładów DD oraz DFR	30
4.4.4	Rodziny rozkładów DDA i DFRA	34
4.5	Wnioski	36
4.6	Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze	36
5	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej	41
6	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę	42
7	Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i inna działalność	44
	Literatura	46

1 Imię i nazwisko

Agnieszka Goroncy

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 14.11.2007 r. Doktorat, matematyka
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Tytuł rozprawy: *Optymalne oszacowania liniowych kombinacji
statystyk pozycyjnych*, promotor: prof. dr hab. Tomasz Rychlik
- 18.06.2003 r. Magisterium, matematyka sp. informatyka
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Tytuł pracy: *Porównanie testów zgodności i jednorodności
dla jednostronnych hipotez o parametrze położenia*,
promotor: prof. dr hab. Tomasz Rychlik

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 1.10.2008 r. – Katedra Statystyki Matematycznej i Eksploracji Danych
(do 30.09.2019 r. Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych)
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
adiunkt (07.2013 r. – 01.2014 r. urlop macierzyński)
- 1.10.2007 r. Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych
–30.09.2008 r. Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
asystent (6-12.2008 r. urlop macierzyński)
- 1.10.2003 r. Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych
–30.09.2007 r. Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
studia doktoranckie

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, niniejszym wskazuję cykl powiązanych tema-

tycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

OSZACOWANIA DLA UPORZĄDKOWANYCH FUNKCJONAŁÓW STATYSTYCZNYCH POCHODZĄCYCH Z NIEPARAMETRYCZNYCH RODZIN ROZKŁADÓW

Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

- [A1] Bieniek, M., GORONCY, A. (2020), Sharp lower bounds on expectations of gOS based on DGFR distributions, *Stat. Papers*, 61:3, 1027—1042.
- [A2] GORONCY, A. (2020), On the upper bounds on expectations of gOSs based on DFR and DFRA distributions, *Statistics*, 54:2, 402—414.
- [A3] GORONCY, A. (2019), Optimal upper bounds on expected k th record values from IGFR distributions, *Statistics*, 53:5, 1012—1036.
- [A4] GORONCY, A., Rychlik T. (2018), Refined solution to upper bound problem for the expectations of order statistics from decreasing density on the average distributions, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 47:16, 4029—4041.
- [A5] GORONCY, A. (2017), Upper non-positive bounds on expectations of generalized order statistics from DD and DDA populations, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 46:24, 11972—11987.
- [A6] GORONCY, A., Rychlik T. (2016), Evaluations of expectations of order statistics and spacings based on IFR distributions, *Metrika* 79:6, 635—657.
- [A7] GORONCY, A., Rychlik T. (2015), Optimal bounds on expectations of order statistics and spacings from nonparametric families of distributions generated by convex transform order, *Metrika*, 78:2, 175—204.
- [A8] GORONCY, A. (2014), Bounds on expected generalized order statistics, *Statistics*, 48:3, 593—608.

4.1 Wprowadzenie

Badania dotyczące optymalnych oszacowań dla momentów uporządkowanych zmiennych losowych mają dość długą historię, sięgającą lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Wartości oczekiwane statystyk pozycyjnych opartych na próbkach niezależnych zmiennych losowych o jednako-
wym rozkładzie (w skrócie i.i.d.) były szacowane w terminach średniej z populacji i odchylenia standardowego przez Morigutiego [30]. Analityczna formuła dla odpowiednich oszacowań dla

maksimów została podana przez Gumbela [23] oraz Hartleya i Davida [25]. Analogiczne wyniki dla bardziej ogólnych jednostek skali, generowanych przez centralne absolutne momenty różnych rzędów zostały wyznaczone przez Arnolda [1] dla maksimów z próbki, oraz Rychlika [34] dla pozostałych statystyk pozycyjnych. Pierwsze optymalne oszacowania wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych z rozkładów o malejącej gęstości i intensywności awarii (DD oraz DFR) zostały podane przez Gajka i Rychlika [22]. Były one przedstawione w jednostkach skali związanych z drugimi zwykłymi momentami rozkładu wyjściowego. Dodatkowo ostre oszacowania wyrażone w terminach średniej i odchylenia standardowego dla oczekiwanych statystyk pozycyjnych i spacji z rozkładów DD i DFR zostały wyznaczone przez Danielak [17] oraz Danielak i Rychlika [19], odpowiednio. Barlow i Proschan [3] oraz Barlow et al. [4] otrzymali pewnie nierówności dla L -statystyk pochodzących z rozkładów o malejącej uśrednionej gęstości i malejącej uśrednionej intensywności awarii (DDA oraz DFRA), oraz ich uogólnień (zob. również Arnold i Balakrishnan ([2], Section 3.4)). Rychlik [36] wyznaczył dokładne górne dodatnie oszacowania wyrażone w terminach średniej i odchylenia standardowego dla wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych o wystarczająco dużych rzędach, pochodzących z rozkładów DDA i DFRA. Podobne wyniki dla spacji otrzymali Danielak i Rychlik [18]. Bieniek ([6], [9]) przedstawił analogiczne oszacowania dla uogólnionych statystyk pozycyjnych opartych na populacjach DFR i DFRA oraz DD i DDA, odpowiednio.

4.1.1 Problem badawczy

Moje badania skupione są na wyznaczeniu optymalnych oszacowań dla różnych uporządkowanych funkcjonałów statystycznych, takich jak wartości oczekiwane zwykłych statystyk pozycyjnych ([A4], [A6], [A7]), ich przyrostów czyli spacji ([A6], [A7]), wartości rekordowych ([A3]) oraz tzw. uogólnionych statystyk pozycyjnych ([A1], [A2], [A5], [A8]), w przypadkach nadal będących przedmiotem zainteresowania wielu badaczy w tym obszarze. Rozważam zarówno najbardziej ogólny przypadek rozkładu wyjściowego bez nakładania żadnych ograniczeń ([A8]), jak i przypadki, gdy dystrybuanta rozkładu bazowego populacji jest elementem pewnej rodziny nieparametrycznych rozkładów prawdopodobieństwa, zdefiniowanych za pomocą szczególnych porządków, takich jak porządek wypukły ([A1], [A2], [A3], [A5], [A6], [A7]) oraz porządek gwiazdzisty ([A2], [A4], [A5]). Szczególny nacisk położony jest na te przypadki, w których dobrze znana metoda rzutowana nie jest wystarczająco wydajna, bądź gdy do tej pory nie było wiadomo jak dokładnie należy wyznaczyć szukany rzut.

Badania te dotyczą różnego rodzaju oszacowań wartości oczekiwanych uporządkowanych zmiennych losowych. W ogólności, rozważamy zarówno oszacowania górne jak i dolne. W obu przypadkach można wyróżnić oszacowania niedodatnie oraz nieujemne. Co ważne, są one uzyskane przy użyciu zupełnie różnych metod. Zasadniczo, górne dodatnie (nieujemne) i dolne ujemne (niedodatnie) oszacowania są otrzymywane przy użyciu metody rzutowania, podczas gdy górne ujemne (niedodatnie) i dolne dodatnie (nieujemne) oszacowania otrzymujemy przy

użyciu tak zwanej metody maksymalizacji normy. Obie te metody zostaną szczegółowo opisane w kolejnych podrozdziałach.

Funkcjonały statystyczne rozważane w niniejszym badaniu, odpowiadające wartościom oczekiwany w różnorodnych modelach niemalejąco uporządkowanych zmiennych losowych są szczególnie istotne w modelowaniu i wnioskowaniu statystycznym, jak również w rozmaitych zastosowaniach. Statystyki pozycyjne i ich liniowe kombinacje, w szczególności spacje, są najbardziej popularnymi L -statystykami, które mają wiele zastosowań w statystyce matematycznej, analizie czasów życia oraz teorii niezawodności. Reprezentują one długości życia pewnych ważnych struktur technicznych zwanych systemami k -spośród- n (k -out-of- n), jak również kolejne czasy awarii elementów badanych w eksperymencie, oraz odległości czasowe między nimi. Rekordy również są szeroko stosowane w różnych obszarach. Najbardziej oczywistym ich zastosowaniem jest przewidywanie osiągnięć sportowych, pogody, klęsk żywiołowych, ale również np. szacowanie i ocena odporności materiałów. Pierwsza wzmianka o klasycznych rekordach pochodzi od Chandlera [14], podczas gdy k -te wartości rekordowe zostały wprowadzone przez Dziubdziele i Kopocińskiego [20]. Wspominamy również statystyki porządkowe progresywnie cenzurowane typu II, które pojawiają się w eksperymentach, podczas których obiekty, które nadal przetrwały są usuwane z badania po awariach innych obiektów, np. w badaniach medycznych dotyczących czasów życia lub w badaniach niezawodnościowych takich jak testy wytrzymałości sprzętów. W tego typu testach niezawodnościowych ustalona liczba komponentów jest w tym samym czasie testowana i z pewnych względów decydujemy się zakończyć test wcześniej (np. z uwagi na długą żywotność niektórych obiektów) i przeprowadzić analizę niezawodności na podstawie danych zaobserwowanych do momentu jego zakończenia. Test kończy się, gdy wystąpi z góry określona liczba awarii komponentów, a czasy awarii każdej jednostki są rejestrowane. Cenzurowane testowanie czasu życia, choć nie jest tak wydajne jak testowanie czasu życia na podstawie pełnej próby, zwykle jest przeprowadzane w przypadku, gdy oszczędność zasobów takich jak czas, pieniądze jest naszym priorytetem.

Wydało się naturalne, że wszystkie te modele wraz z wieloma innymi mogą być uogólnione do jednego ujednoczonego modelu i to rzeczywiście zostało dokonane przez Kampsa (patrz [27], [28]), który wprowadził definicję uogólnionych statystyk pozycyjnych. Oczywiście z czasem moje pierwotne zainteresowanie dotyczące zwykłych statystyk porządkowych rozszerzyło się na inne szczególne modele uporządkowanych zmiennych losowych, a wreszcie i na model uogólnionych statystyk porządkowych. Stypendium podoktorskie w Aachen, pod kierunkiem profesora Udo Kampsa było bardzo ważnym dla mnie okresem czasu i pozwoliło mi rozwinąć to zainteresowanie i kontynuować badania w szerszym zakresie.

Z uwagi na obszerną formę większości wyników przedstawionych w twierdzeniach i lematach mojego osiągnięcia, nie przytaczam ich wszystkich w niniejszym autoreferacie i odsyłam czytelnika do odpowiednich źródeł.

4.1.2 Podstawowe oznaczenia i definicje

Niech U będzie dystrybuantą standardowego rozkładu jednostajnego, zaś V oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu wykładniczego, tzn. $U(x) = x$, $x \in [0, 1)$ oraz $V(x) = 1 - \exp(-x)$, $x > 0$.

Wprowadźmy najpierw definicje porządków dla (absolutnie) ciągłych zmiennych losowych, które będą ważne w dalszych rozważaniach. Przypuśćmy, że zmienne losowe X i Y mają dystrybuanty F i W , odpowiednio. Jako a_W i d_W oznaczymy końce nośnika dystrybuanty W . Ponadto, przez F^{-1} oznaczymy (prawostronnie ciągłą wersję) funkcji kwantylowej dystrybuanty F , daną wzorem $F^{-1}(x) = \sup\{y : F(y) \leq x\}$.

Mówimy, że X poprzedza Y (lub X jest mniejsze niż Y) w *porządku wypukłym* i piszemy $X \prec_c Y$ (lub $F \prec_c W$), jeżeli złożenie $W^{-1}F$ jest funkcją wypukłą na nośniku X . Warunek ten jest równoważny temu, że $F^{-1}W$ jest funkcją wklęsłą na nośniku Y . Ten częściowy porządek absolutnie ciągłych zmiennych losowych został zdefiniowany przez van Zweta [42].

Porządek gwiazdzisty, który jest bardziej ogólnym częściowym porządkiem ciągłych rozkładów czasów życia, został zdefiniowany przez Barlowa i Proschana [3]. Zamiast warunku wypukłości, angażuje on słabszy warunek gwiazdzistości. Mówimy, że X następuje po Y (lub X jest większe niż Y) w *porządku gwiazdzistym* i piszemy $X \succ_* Y$ (lub $F \succ_* W$), jeżeli złożenie $F^{-1}W$ jest funkcją gwiazdzistą, tzn. $F^{-1}W(x)/x$ jest niemalejąca na nośniku W . Porządek gwiazdzisty jest niezmienniczy względem skali, ale nie jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia. Aby to osiągnąć, rozszerzamy jego definicję i mówimy, że $F \succ_* W$ jeżeli $\frac{F^{-1}W(x) - F^{-1}W(a_W)}{x - a_W}$ jest niemalejąca na $[a_W, d_W)$.

Nieparametryczne rodziny rozkładów

Poniżej przytaczamy niektóre szczególne rodziny rozkładów, zdefiniowanych w terminach wprowadzonych wyżej porządków zmiennych losowych.

Mówimy, że F należy do rodziny *rozkładów o malejącej gęstości* (*decreasing density distributions*, $F \in \text{DD}$), jeżeli $F \succ_c U$, co jest równoważne temu, że $F^{-1}U = F^{-1}$ jest wypukła na $[0, 1)$. Mówimy, że F należy do rodziny *rozkładów o rosnącej gęstości* (*increasing density distributions*, $F \in \text{ID}$), jeżeli $F \prec_c U$, co oznacza, że $F^{-1}U = F^{-1}$ jest wklęsła na $[0, 1)$.

Rozważmy teraz rodziny rozkładów będących w porządku wypukłym z rozkładem wykładniczym. Mówimy, że F należy do rodziny *rozkładów o malejącej intensywności awarii* (*decreasing failure rate distributions*, $F \in \text{DFR}$), jeżeli $F \succ_c V$, co jest równoważne temu, że *funkcja hazardu*

$$V^{-1}F(x) = -\ln(1 - F(x)) \quad (4.1.1)$$

jest wklęsła na nośniku F . To implikuje, że funkcja *intensywność awarii (hazardu)* zdefiniowana jako

$$\lambda_F(x) = (V^{-1}F)'(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad (4.1.2)$$

jest malejąca. Analogicznie, rodzina *rozkładów o rosnącej intensywności awarii* (*increasing failure rate*, $F \in \text{IFR}$) składa się z dystrybuant F spełniających $F \prec_c V$, co oznacza, że (4.1.1) jest wypukła na nośniku F , zaś (4.1.2) jest wówczas rosnąca.

Zauważmy, że skoro $U \prec_c V$, to każdy rozkład DFR ma również malejącą gęstość, zaś każdy rozkład ID ma również rosnącą intensywność awarii.

Powyższe rodziny rozkładów mogą być uogólnione ze względu na (standaryzowane) uogólnione rozkłady Pareto (GPD). W tym celu ustalamy $\alpha \in \mathbb{R}$ i definiujemy dystrybuantę

$$W_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \alpha x)^{1/\alpha}, & \text{dla } x \geq 0 \text{ gdy } \alpha < 0, \\ 1 - (1 - \alpha x)^{1/\alpha}, & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{\alpha} \text{ gdy } \alpha > 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{dla } x \geq 0 \text{ gdy } \alpha = 0. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Zauważmy, że jeżeli $\alpha = 0$, to $W_\alpha = W_0 = V$ jest standardowym rozkładem wykładniczym, zaś dla $\alpha = 1$ mamy $W_\alpha = W_1 = U$, standardowy rozkład jednostajny.

Ogólnie, niech W będzie dystrybuantą o nośniku ograniczonym z dołu i rozważmy dystrybuanty F , które są w porządku wypukłym z W . Mówimy, że F ma *malejącą (rosnącą) W -uogólnioną intensywność awarii* jeżeli $F \succ_c (\prec_c)W$ (patrz [5]). W szczególności, gdy $W = W_\alpha$, to mówimy, że F ma *malejącą (rosnącą) α -uogólnioną intensywność awarii* (lub po prostu *malejącą/rosnącą uogólnioną intensywność awarii*). Faktycznie, założmy, że F następuje po dystrybuancie rozkładu GPD w porządku wypukłym, tzn. $F \succ_c W_\alpha$, co implikuje, że złożenie $F^{-1}W_\alpha$ jest wypukłe na nośniku W_α . To jest równoważne warunkowi, że $W_\alpha^{-1}F$ jest wklęsłe na nośniku F . Jeżeli założymy absolutną ciągłość dystrybuanty F z funkcją gęstości prawdopodobieństwa f , wówczas pochodna

$$\gamma_\alpha(y) = (W_\alpha^{-1}F)'(y) = (1 - F(y))^{\alpha-1}f(y) \quad (4.1.4)$$

jest malejąca. Bieniek [10] wprowadził rodzinę *rozkładów o malejącej uogólnionej intensywności awarii* (*decreasing generalized failure rate*, DGFR(α) lub DGFR) następująco

$$\text{DGFR}(\alpha) = \{F : F \succ_c W_\alpha\}, \quad (4.1.5)$$

z funkcją (4.1.4) nazywaną *uogólnioną intensywnością awarii* (patrz [5]). Jasne jest, że (4.1.4) jest iloczynem zwykłej intensywności awarii i pewnej potęgi funkcji przeżycia $1 - F$, zaś (4.1.2) jest jej przypadkiem szczególnym dla $\alpha = 0$, ponieważ $W_0 = V$. Następnie, kierując się rozumowaniem Goroncy i Rychlika [A7] oraz Bienka i Szpak [12], rozważamy analogicznie zdefiniowaną rodzinę *rozkładów o rosnącej uogólnionej intensywności awarii* (*increasing generalized failure rate*, IGFR lub IGFR(α)) jako

$$\text{IGFR}(\alpha) = \{F : F \prec_c W_\alpha\}. \quad (4.1.6)$$

Rzeczywiście, jeżeli dystrybuanta $F \in \text{IGFR}(\alpha)$ jest ciągła z gęstością f , to (4.1.4) jest rosnąca.

Oczywiście, rodziny rozkładów wprowadzone na początku tego podrozdziału są szczególnymi przypadkami rodzin uogólnionych względem rozkładów GPD (4.1.3), tzn. DFR=DGFR(0), DD=DGFR(1), IFR=IGFR(0) oraz ID=IGFR(1).

Rozważamy również rodziny rozkładów generowanych przez porządek gwiazdzisty. Analogicznie, zakładając, że W jest dowolną dystrybuantą o nośniku ograniczonym z dołu, to relacja $F \succ_* (\prec_*) W$ definiuje rodzinę rozkładów o malejącej (rosnącej) uśrednionej W -uogólnionej intensywności awarii. W szczególności, gdy $W = W_\alpha$, to mówimy, że F ma malejącą (rosnącą) uśrednioną α -uogólnioną intensywność awarii (*malejącą/rosnącą uśrednioną uogólnioną intensywność awarii*) i oznaczamy ją jako DGFRA(α) (IGFRA(α)) lub po prostu DGFRA (IGFRA). W szczególności mówimy, że dystrybuanta F ma malejącą uśrednioną gęstość (*decreasing density on the average, $F \in DDA$*) jeżeli $F \succ_* U$. Ten warunek jest słabszy niż wklęsłość F na jej nośniku, który definiuje rodzinę rozkładów DD. W obu przypadkach dopuszcza się, że F ma pojedynczy atom w lewym końcu nośnika a_F oraz gęstość na prawo od a_F . Analogicznie, F ma *malejącą uśrednioną intensywność awarii* (*decreasing failure rate on the average, $F \in DFRA$*) jeżeli $F \succ_* V$. Jeżeli relacja porządku gwiazdzistego jest odwrócona, interesujące mogą być rodziny rozkładów o rosnącej uśrednionej gęstości (lub intensywności awarii), tzn. IDA (IFRA).

W dalszej części będziemy używać oznaczenia $F \in \{\text{DGFR, DD, DFR, itp.}\}$ zamiennie z F jest DGFR (DD, DFR, itp.) aby wskazać, która klasa rozkładów jest aktualnie rozważana.

Uogólnione statystyki porządkowe i inne modele uporządkowanych zmiennych losowych

Niech $n \in \mathbf{N}$ oraz $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ będzie wektorem liczb dodatnich. Uporządkowane zmienne losowe $X_\gamma^{(1)}, \dots, X_\gamma^{(n)}$ nazywamy *uogólnionymi statystykami porządkowymi (pozycyjnymi)* pochodzącymi z rozkładu o dystrybuancie F z parametrem γ jeżeli

$$X_\gamma^{(r)} \stackrel{d}{=} F^{-1} \left(1 - \prod_{i=1}^r U_i^{1/\gamma_i} \right), \quad r = 1, \dots, n,$$

gdzie U_1, \dots, U_n są standardowymi jednostajnymi niezależnymi zmiennymi losowymi (patrz [15]). Model uogólnionych statystyk pozycyjnych, który powstał aby ujednoczyć wiele różnych modeli uporządkowanych zmiennych losowych został wprowadzony przez Kamps ([27], [28]) jako przekształcenie kwantylowe

$$X_\gamma^{(r)} = F^{-1} \left(U_\gamma^{(r)} \right), \quad 1 \leq r \leq n,$$

gdzie $U_\gamma^{(1)}, \dots, U_\gamma^{(n)}$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi opartymi na standardowym rozkładzie jednostajnym i parametrze γ . Oryginalnie jednostajne uogólnione statystyki porządkowe zostały zdefiniowane poprzez łączną gęstość $U_\gamma^{(1)}, \dots, U_\gamma^{(n)}$, jednakże w niniejszej prezentacji będziemy rozważać tylko rozkłady brzegowe. Jako $F_{\gamma,r}$ oraz $f_{\gamma,r}$ oznaczamy dystrybuantę

oraz odpowiadającą jej funkcję gęstości r -tej jednostajnej uogólnionej statystyki pozycyjnej $U_\gamma^{(r)}$. Gęstość ta dana jest wzorem

$$f_{\gamma,r}(x) = c_{r-1} \cdot G_{r,r}^{r,0} \left(1-x \left| \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 - 1 & \dots & \gamma_r - 1 \end{array} \right. \right), \quad 0 \leq x < 1, \quad (4.1.7)$$

gdzie $c_{r-1} = \prod_{i=1}^r \gamma_i$, $1 \leq r \leq n$, zaś

$$G_{r,r}^{r,0} \left(s \left| \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \dots & \gamma_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 - 1 & \dots & \gamma_r - 1 \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{s^z}{\prod_{i=1}^r (\gamma_i - 1 - z)} dz,$$

oznacza G-funkcję Meijera z L będącym odpowiednio dobranym konturem całkowania. Niestety, w ogólności dla dowolnie dobranych parametrów γ oraz r , brzegowa gęstość (4.1.7) nie ma bardziej przyjaznej reprezentacji, która umożliwiałaby dowolnie skomplikowane obliczenia analityczne. Skoro (4.1.7) nie zależy od uporządkowania parametrów $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, to bez straty ogólności możemy założyć, że parametry modelu są uporządkowane w kolejności malejącej, tzn. $0 < \gamma_r \leq \dots \leq \gamma_1$. Zauważmy, że dla pierwszej uogólnionej statystyki porządkowej jej rozkład może być łatwo wyznaczony, co znacznie ułatwia obliczenia. Gęstość i dystrybuanta dane są wówczas wzorami

$$f_{\gamma,1}(x) = \gamma_1(1-x)^{\gamma_1-1}, \quad (4.1.8)$$

$$F_{\gamma,1}(x) = 1 - (1-x)^{\gamma_1}, \quad (4.1.9)$$

odpowiednio, dla $0 \leq x < 1$.

Jak wspomniano wcześniej, uogólnione statystyki porządkowe mieszczą w sobie różne interesujące modele uporządkowanych zmiennych losowych, w szczególności statystyki pozycyjne, rekordy, statystyki porządkowe progresywnie cenzurowane typu II itp., których definicje przytaczamy poniżej. W tym celu niech $\{X_n\}_{n \geq 1}$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych z dystrybuantą F .

Jeżeli ułożymy próbkę losową X_1, \dots, X_n w kolejności niemalejącej, otrzymamy uporządkowane wartości $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$, nazywane *statystykami porządkowymi (pozycyjnymi)*. Gęstość i dystrybuanta jednostajnych statystyk pozycyjnych, tzn. opartych na standardowym rozkładzie jednostajnym U mają postać

$$f_{j:n}(x) = n \binom{n-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{n-j}, \quad (4.1.10)$$

oraz

$$F_{j:n}(x) = \sum_{k=j}^n B_{k,n}(x),$$

z $j = 1, \dots, n$ dla $0 < x < 1$, odpowiednio, gdzie

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 < x < 1, \quad k = 0, \dots, n, \quad (4.1.11)$$

są wielomianami Bernsteina rzędu n . Statystyki pozycyjne są szczególnym przypadkiem uogólnionych statystyk porządkowych dla $\gamma_i = n - i + 1, i = 1, \dots, n$. Dalej rozważamy również *spacje*, które są różnicami sąsiadujących statystyk pozycyjnych $S_j = X_{j+1:n} - X_{j:n}, j = 1, \dots, n - 1$.

Rozważmy teraz podciąg górnych rekordów w nieskończonym ciągu $\{X_n\}, n \geq 1$. *Klasyczne górne rekordy* pojawiają się w ciągu w czasie j jeżeli X_j jest większe niż maksimum $X_{j-1:j-1}$ poprzednich obserwacji X_1, \dots, X_{j-1} . Bardziej ogólnie, k -ty górny rekord pojawia się w czasie j , jeżeli X_j jest większe niż k -ta największa statystyka pozycyjna $X_{j-k:j-1}$ wyznaczona na podstawie poprzednich obserwacji. Oczywiście klasyczne rekordy są szczególnym przypadkiem k -tych rekordów dla $k = 1$. Formalnie definiujemy ciąg czasów rekordowych k -tych rekordów jako $T_0^{(k)} = k$, umownie, oraz

$$T_n^{(k)} = \min\{j > T_{n-1}^{(k)} : X_j > X_{T_{n-1}^{(k)}+1-k:T_{n-1}^{(k)}}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dla każdego ustalonego $k = 1, 2, \dots$, ciąg k -tych rekordów jest zdefiniowany następująco

$$R_n^{(k)} = X_{T_n^{(k)}+1-k:T_n^{(k)}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dystrybuenta n -tej wartości k -tego rekordu pochodzącego ze standardowego rozkładu jednostajnego i odpowiadająca jej gęstość dane są następującymi wzorami

$$\begin{aligned} G_n^{(k)}(x) &= 1 - (1-x)^k \sum_{i=0}^n \frac{k^i}{i!} [-\ln(1-x)]^i, \\ g_n^{(k)}(x) &= \frac{k^{n+1}}{n!} [-\ln(1-x)]^n (1-x)^{k-1}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dla $0 < x < 1, k \geq 1, n \geq 0$. Pierwsze n wartości k -tych rekordów można otrzymać w modelu uogólnionych statystyk porządkowych z $\gamma_r = k, r = 1, \dots, n$.

Kolejno, przypomnijmy schemat cenzurowania typu II, gdzie rozważa się N niezależnych czasów życia X_1, \dots, X_N , opartych na jednakowej dystrybucji F i eksperyment, w którym ustalona liczba pozostałych w eksperymencie obiektów jest usuwana na różnych jego etapach. Dokładniej, po i -tej awarii, R_i wciąż pracujących obiektów jest losowo usuwana, $i = 1, \dots, n$. Formalnie obserwujemy $n \leq N$ czasów awarii $X_{*,\gamma}^{(1)}, \dots, X_{*,\gamma}^{(n)}$, nazywanych *statystykami porządkowymi progresywnie cenzurowanymi typu II*, zgodnie z ustalonym schematem cenzurowania $R = (R_1, \dots, R_n)$ dla nieujemnych liczb całkowitych R_1, \dots, R_n gdzie $N = n + \sum_{i=1}^n R_i$. W przypadku uogólnionych statystyk porządkowych mamy dla tego modelu $\gamma_j = N + 1 - j - \sum_{i=1}^{j-1} R_i, j = 1, \dots, n$ oraz $\gamma_1 = N$.

Problem

Niech $\{X\}_{n \geq 1}$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o jednakowej dystrybucji F i momentach danych wzorami

$$\mu = \mathbb{E}X_1 = \int_0^1 F^{-1}(x)dx, \quad (4.1.13)$$

$$\sigma_p^p = \mathbb{E}|X_1 - \mu|^p = \int_0^1 |F^{-1}(x) - \mu|^p dx, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (4.1.14)$$

w szczególności jako σ oznaczamy odchylenie standardowe rozkładu równoważne σ_2 . Odnosząc się do $\sigma_p = (\sigma_p^p)^{1/p}$ w dalszej części prezentacji milcząco zakładamy, że p -ty absolutny moment X_i , $i = 1, 2, \dots$, jest skończony. Ustalając $p = \infty$, zakładamy natomiast, że F należy do klasy rozkładów o ograniczonym nośniku i możemy wówczas rozważać

$$\sigma_\infty = \text{ess sup } |X_1 - \mu| = \sup_{0 < x < 1} |F^{-1}(x) - \mu| = \max\{\mu - F^{-1}(0), F^{-1}(1) - \mu\}. \quad (4.1.15)$$

Ogólnie, interesuje nas wyznaczenie optymalnych górnych i dolnych oszacowań wartości oczekiwanych uporządkowanych zmiennych losowych X_* , których rozkład zależy od F . Oszacowania wyrażone są w terminach średniej z populacji (4.1.13) i centralnych momentów (4.1.14)-(4.1.15) różnych rzędów, tzn. szacujemy wartość następującego funkcjonału statystycznego

$$\mathbb{E} \frac{X_* - \mu}{\sigma_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.1.16)$$

z góry oraz z dołu. Ograniczamy się do pewnych szczególnych przypadków X_* , odpowiadającym modelom uporządkowanych zmiennych losowych przywołanych powyżej, m.in. statystyk pozycyjnych $X_{j:n}$, spacji S_j , k -tych rekordów $R_j^{(k)}$, oraz ich uogólnień $X_\gamma^{(r)}$, $r = 1, \dots, n$. Rozważamy również pewne szczególne przykłady nieparametrycznych rodzin rozkładów bazowej dystrybucji F , które zostały omówione na początku tego podrozdziału.

4.1.3 Ogólna idea metody rzutowania

Poniżej opisana jest procedura wyznaczania optymalnych oszacowań przy użyciu metody, która jest powszechnie znana jako metoda rzutowania. Do jej szczegółowego opisu i wyjaśnienia czytelnik jest odsyłany do [35]. Najpierw przytoczymy uproszczoną wersję Theorem 1 z pracy [30].

Twierdzenie 1 *Niech h będzie funkcją całkowalną na $[a, b]$, zaś $H(x) = \int_a^x h(t)dt$, $a \leq x \leq b$, będzie jej funkcją pierwotną. Ponadto niech \underline{H} będzie supremum wszystkich funkcji wypukłych na $[a, b]$ nie większych niż H oraz \underline{h} będzie prawostronną pochodną \underline{H} . Zachodzi wówczas następująca nierówność:*

$$\int_a^b g(x)h(x)dx \leq \int_a^b g(x)\underline{h}(x)dx$$

dla wszystkich niemalejących funkcji g , dla których obie całki istnieją. Równość zachodzi wtw. gdy funkcja g jest stała na każdym otwartym przedziale, na którym $H > \underline{H}$.

Funkcja \underline{H} nazywana jest *największą wypukłą minorantą* funkcji H . Jej prawostronna pochodna \underline{h} jest dobrze zdefiniowaną funkcją niemalejącą. Niech $L^2([a, b], dx)$ będzie przestrzenią Hilberta funkcji całkowanych z kwadratem na $[a, b]$. Można pokazać, że jeżeli $h \in L^2([a, b], dx)$, to \underline{h} jest jej rzutem na następujący stożek wypukły

$$\mathcal{C} = \{g \in L^2([a, b], dx) : g \text{ jest niemalejąca}\}, \quad (4.1.17)$$

funkcji niemalejących w $L^2([a, b], dx)$ (patrz [35], str. 14-16). Od tej pory będziemy oznaczać operator rzutowania na (4.1.17) jako P .

Niech X_* będzie uporządkowaną zmienną losową powstałą z ciągu i.i.d. zmiennych losowych $\{X_n\}_{n \geq 1}$ z dystrybuantą F o średniej μ i skończonej i dodatniej wariancji σ^2 . Dystrybuanta F_* zmiennej X_* zależy od F , stąd poprzez zamianę zmiennych i zauważając, że $\int_0^1 (F^{-1}(x) - \mu) dx = 0$, możemy użyć następującej reprezentacji wzoru (4.1.16), $\mathbb{E} \frac{X_* - \mu}{\sigma} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma} f_*(x) dx$, gdzie f_* jest gęstością rozważanej uporządkowanej zmiennej losowej opartej na standardowym rozkładzie jednostajnym, tzn. przy założeniu, że $F = U$. Oznaczając $h_*(x) = f_*(x) - c$, dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$, otrzymujemy

$$\mathbb{E} \frac{X_* - \mu}{\sigma} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma} h_*(x) dx. \quad (4.1.18)$$

Całka powyżej odpowiada iloczynowi skalarnemu standaryzowanej funkcji kwantylowej $\frac{F^{-1}-\mu}{\sigma}$ oraz h_* w przestrzeni Hilberta $L^2([0, 1], dx)$ funkcji całkowalnych z kwadratem na $[0, 1]$. Jeżeli użyjemy nierówności Schwarza, możemy oszacować (4.1.18) z góry przez normę $\|h_*\|$ w $L^2([0, 1], dx)$. Równość zachodzi, gdy oba argumenty iloczynu skalarnego (4.1.18) są proporcjonalne. Rozważmy inny stożek wypukły, dla $a = 0$ oraz $b = 1$,

$$\mathcal{C}^0 = \{g \in \mathcal{C} : \int_0^1 g(u) du = 0\},$$

a przez P^0 oznaczmy rzut na \mathcal{C}^0 . Zauważmy, że standaryzowane funkcje kwantylowe są elementami \mathcal{C}^0 . Jeżeli funkcja h_* również należy do \mathcal{C}^0 , to górne oszacowanie jest osiągalne. W przeciwnym przypadku powinniśmy zastąpić ją przez element jej najbliższy, należący do \mathcal{C}^0 i właśnie tutaj z pomocą przychodzi rzutowanie. Zanim zastosujemy nierówność Schwarza, najpierw rzutujemy h_* na \mathcal{C}^0 , otrzymując

$$\mathbb{E} \frac{X_* - \mu}{\sigma} \leq \int_0^1 \frac{F_*^{-1}(x) - \mu}{\sigma} P^0 h_*(x) dx.$$

Ponieważ stożek \mathcal{C} jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia i $\int_0^1 P h_*(u) du = \int_0^1 h_*(u) du = 0$, to $P h_* \in \mathcal{C}^0$ i $P^0 h_* = P h_*$. Ostatecznie, skoro $\|\frac{F^{-1}-\mu}{\sigma}\| = 1$, to wykorzystując nierówność Schwarza dostajemy następujące oszacowanie

$$\frac{\mathbb{E} X_* - \mu}{\sigma} \leq \|P h_*\|.$$

Jeżeli jest potrzeba wyrażenia oszacowań w bardziej ogólnych jednostkach skali generowanych przez (4.1.14), to używa się nierówności Höldera zamiast Schwarzera, rozważając $L^p((0, 1), dx)$ ze skończoną p -tą normą $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Jednak należy mieć na uwadze, że rzuty liniowych funkcjonałów statystycznych w przestrzeniach L^p z $p \neq 2$ na inne stożki wypukłe nie skutkują analogicznymi oszacowaniami.

4.1.4 Ogólna idea metody maksymalizacji normy

Jest niezwykle ważne, aby uświadomić sobie, że gdy \underline{H} jest stała, to nierówność Morigutiego, lub ogólniej, nierówność rzutowa skutkuje trywialnym oszacowaniem zerowym. Jesteśmy wówczas zainteresowani uzyskaniem niedodatnich, być może ujemnych górnych oszacowań, wykorzystując metodę, którą dalej nazywamy metodą maksymalizacji normy. Wczesna idea tego podejścia powstała podczas rozważań dotyczących deterministycznych oszacowań dla L -statystyk (patrz [B5]), była dalej rozwijana w [38], [C10], [C11], modyfikowana i stosowana w [A8], [A5], [A2] oraz [41], spośród wielu innych. Ogólny jej zamysł polega na rozważeniu (4.1.16), danych poprzez całki postaci

$$\mathbb{E} \frac{X_* - \mu}{\sigma_p} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p} h_*(x) dx, \quad (4.1.19)$$

jako ciągłych funkcjonałów liniowych $T_h(g) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$, reprezentowanych przez $h = h_*$, działających na $g = \frac{F^{-1} - \mu}{\sigma_p}$. Funkcje g są elementami pewnego wypukłego i ograniczonego podzbioru \mathcal{G}_p przestrzeni $L^p([0, 1], dx)$ funkcji całkownych w p -tej potędze na skończonym przedziale jednostkowym, zaś h jest dowolnie wybranym elementem $L^q([0, 1], dx)$, dla $q = p/(p-1)$ jeżeli $p > 1$ oraz $q = \infty$ gdy $p = 1$, gdzie przez $L^\infty([0, 1], dx)$ oznaczamy przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych z normą $\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{0 \leq x < 1} |g(x)|$. Ponadto zakładamy, że elementy \mathcal{G}_p są niemalejące, co jest w szczególności naturalnie spełnione przez standaryzowane funkcje kwantylowe g , oraz, że

$$T_1(g) = \int_0^1 g(x)dx = 0, \quad \|g\|_p = \begin{cases} \left[\int_0^1 |g(x)|^p dx \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup} |g(x)|, & p = \infty, \end{cases} = 1. \quad (4.1.20)$$

Problem znalezienia górnych niedodatnich oszacowań dla (4.1.19) jest wówczas równoważny problemowi znalezienia supremum

$$\sup_{g \in \mathcal{G}_p} T_h(g). \quad (4.1.21)$$

Następnie, rozważając odpowiednie przekształcenia, można zauważyć, że oryginalny problem znalezienia supremum (4.1.21) redukuje się do wyznaczenia supremum normy pewnej zmodyfikowanej funkcji \tilde{g} na odpowiednio dobranym zbiorze $\tilde{\mathcal{G}}_p$, będącym modyfikacją zbioru \mathcal{G}_p ,

$$\sup\{\|\tilde{g}\|_p, \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}_p\}. \quad (4.1.22)$$

W ogólnym przypadku, gdy pierwotna funkcji h spełnia pewne założenia, procedura ta może zostać podsumowana następującym twierdzeniem, będącym uproszczoną wersją oryginalnego wyniku z Theorem 6 pracy [C10].

Twierdzenie 2 ([C11], Theorem 1) Dla $1 \leq p \leq \infty$, niech

$$\mathcal{G}_p = \{g \in L^p([0, 1], dx) : g \text{ jest niemalejąca, } \int_0^1 g(x) dx = 0, \|g\|_p = 1\},$$

oraz niech $h \in L^q([0, 1], dx)$ ma pierwotną H spełniającą $H(x) \geq H(0) = H(1) = 0$, $0 < x < 1$. Wówczas dla $1 \leq p < \infty$ i wszystkich $g \in \mathcal{G}_p$, otrzymujemy

$$\int_0^1 g(x)h(x)dx \leq - \inf_{0 < x < 1} \frac{H(x)}{[x^p(1-x) + x(1-x)^p]^{1/p}}. \quad (4.1.23)$$

Jeżeli infimum prawej strony jest osiągane w pewnym punkcie $0 < \theta < 1$, to równość w (4.1.23) zachodzi dla dwuwartościowej funkcji postaci

$$g_{p,\theta}(x) = \begin{cases} -\frac{1-\theta}{[\theta^p(1-\theta) + \theta(1-\theta)^p]^{1/p}}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{\theta}{[\theta^p(1-\theta) + \theta(1-\theta)^p]^{1/p}}, & \theta < x < 1. \end{cases} \quad (4.1.24)$$

Jeżeli infimum jest osiągane w granicy gdy $x \searrow 0$ ($x \nearrow 1$, odpowiednio), to równość w (4.1.23) jest osiągana w granicy przez ciągi funkcji (4.1.24) z $\theta \searrow 0$ ($\theta \nearrow 1$, odpowiednio).

W przypadku $p = \infty$, otrzymujemy

$$\int_0^1 g(x)h(x)dx \leq 0,$$

dla wszystkich $g \in \mathcal{C}_\infty$, zaś równość jest osiągana w granicy przez funkcje postaci

$$g_{\infty,\theta}(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < \theta, \\ \frac{\theta}{1-\theta}, & \theta < x < 1, \end{cases} \quad 0 < \theta \leq \frac{1}{2},$$

$$g_{\infty,\theta}(x) = \begin{cases} -\frac{1-\theta}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 1, & \theta < x < 1, \end{cases} \quad \frac{1}{2} \leq \theta < 1,$$

gdy $\theta \searrow 0$ lub $\theta \nearrow 1$.

Dalszy rozwój tej metody pozwolił na modyfikacje warunków nałożonych na zbiór \mathcal{G}_p i jest omówiony m.in. w [38], [A5] oraz [A2].

4.2 Oszacowania dla statystyk pozycyjnych i spacji

Rozpocznijmy przedstawieniem wyników dla najbardziej popularnych modeli uporządkowanych zmiennych losowych, tj. statystyk pozycyjnych i spacji. Skupimy się na oszacowaniach górnych, prezentując najpierw dodatnie, później ujemne oszacowania dla różnych rodzin rozkładów takich jak ID, IFR oraz DDA odpowiednio.

4.2.1 Oszacowania górne dodatnie

Wyniki prezentowane w tym podrozdziale odnoszą się do prac [A7] oraz [A6]. Zakładamy, że X_1, \dots, X_n są i.i.d. o jednakowej dystrybuancie F ze skończoną średnią (4.1.13), skończoną i dodatnią wariacją σ^2 oraz, że F ma rosnącą W -uogólnioną intensywność awarii dla W będącej absolutnie ciągłą dystrybuantą z dodatnią gęstością w na przedziale $[0, d)$, $0 < d \leq \infty$. Ogólna metoda wyznaczania ostrych górnych dodatnich oszacowań dla wartości oczekiwanych standaryzowanych liniowych kombinacji statystyk pozycyjnych $\mathbb{E} \sum_{i=1}^n c_i \frac{X_{i:n} - \mu}{\sigma}$ dla dowolnych $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ została zaproponowana przez Gajka i Rychlika (patrz [21]) dla różnych rodzin rozkładów, których funkcje kwantylowe wyznaczają stożki wypukłe. Postępując analogicznie, w naszym przypadku otrzymujemy

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^n c_i \frac{X_{i:n} - \mu}{\sigma} \leq \left\| P_{\prec_c W} \left(\sum_{i=1}^n c_i [f_{i:n} W - 1] \right) \right\|,$$

gdzie $P_{\prec_c W} h$ jest rzutem funkcji $h \in L^2((0, d), w(x)dx)$, na stożek wypukły postaci

$$\mathcal{C}_{\prec_c W} = \{g \in L^2([0, d), w(x)dx) : g(x) \text{ jest niemalejąca i wklęsła}\}. \quad (4.2.1)$$

Zauważmy, że w rozważanym przypadku standaryzowane funkcje kwantylowe $(F^{-1}W(x) - \mu)/\sigma$ są niemalejące i wklęsłe, zgodnie z założeniami nałożonymi na rodzinę rozkładów wyjściowych. Jednakże, w ogólności, funkcje $h = \sum_{i=1}^n c_i [f_{i:n} W - 1] \in L^2([0, d), w(x)dx)$ nie posiadają takich własności. Dlatego aby zapewnić osiągalność oszacowania, musimy rzutować je na odpowiednio zdefiniowany stożek wypukły $\mathcal{C}_{\prec_c W}$. Niestety, dla dowolnie ustalonych c_1, \dots, c_n , nie jest znana żadna uniwersalna metoda rzutowania takich funkcji na $\mathcal{C}_{\prec_c W}$. Dlatego naszym celem było znalezienie ogólnego rozwiązania poprzez nałożenie pewnych szczególnych ograniczeń na rzutowane funkcje, które zostaną później szczegółowo opisane.

Do wyznaczania optymalnych oszacowań wartości oczekiwanych liniowych kombinacji statystyk pozycyjnych i innych funkcjonałów statystycznych dla wielu nieparametrycznych rozkładów F , w szczególności dla rozkładów z malejącą W -uogólnioną intensywnością awarii, szeroko stosowana była metoda rzutowania. Wśród wielu różnych znanych oszacowań, należy wspomnieć Gajka i Rychlika [22], którzy wyznaczyli dokładne oszacowania wartości oczekiwanych pojedynczych statystyk pozycyjnych opartych na próbach i.i.d. z malejącą gęstością oraz intensywnością awarii, wyrażone w terminach pierwiastka z drugiego momentu zwykłego. Analogiczne wyniki dla dowolnie zależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie można znaleźć w [21], jak wyżej wspomniano. Dalej, w [17] oraz [19] zaprezentowano wyniki dotyczące uciętych średnich i spacji odpowiednio, z rodzin o malejącej gęstości oraz intensywności awarii. Zostały one rozszerzone przez Bieńka, najpierw do modelu uogólnionych statystyk pozycyjnych (patrz [6], [9]), następnie poprzez rozważenie rozkładów o malejącej α -uogólnionej intensywności awarii ([10]). Wykorzystywano również narzędzia inne niż metoda rzutowania np. aby uzyskać niedodatnie oszacowania dla standaryzowanych statystyk pozycyjnych małych rzędów z rodzin rozkładów o malejącej gęstości i intensywności awarii (patrz [38], [39]).

Niemniej jednak, podobny problem dla rodzin rozkładów o rosnącej W -uogólnionej intensywności awarii nie był wcześniej rozważany, co stanowiło poważne wyzwanie. Pierwsze wysiłki zostały podjęte przez Rychlika [40], który wyznaczył dodatnie górne oszacowania średnich drugich najmniejszych i największych statystyk pozycyjnych z próbek i.i.d. o rosnącej gęstości i intensywności awarii. W niniejszym paragrafie prezentujemy ogólne wyniki z wykorzystaniem metody rzutowania, które są zastosowane dla pozostałych statystyk pozycyjnych i spacji. Jej ogólna idea przedstawiona wyżej, jest oczywista. Jednakże główny problem polegał tu na wyznaczeniu dokładnego kształtu i parametrów rzutu. Ograniczamy się tutaj do rodziny funkcji monotonicznych i wklęsłych, ponieważ, jak to było wyżej wspomniane, nie istnieje ogólna procedura działająca dla funkcji dowolnego kształtu. Niech zatem $h \in L^2([0, d], w(x)dx)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki.

(A) Niech h będzie ograniczoną, dwukrotnie różniczkowalną funkcją na $[0, d)$ taką, że

$$\int_0^d h(x)w(x)dx = 0.$$

Ponadto, h jest ściśle malejąca na $(0, a)$, ściśle wypukła rosnąca na (a, b) , ściśle wklęsła rosnąca na (b, c) z $h(c) > 0 \geq h(0)$, oraz ściśle malejąca na (c, d) z $h(d) = h(0)$ dla pewnych $0 \leq a < b < c < d$.

Założenia te, podobne do tych przedstawionych w [19], są w szczególności spełnione przez funkcje odpowiadające statystykom pozycyjnym $f_{j:n}W$ oraz spacom $f_{j+1:n}W - f_{j:n}W$, dla wielu j i n oraz przydatnych dystrybuant W , m.in. U oraz V . Możliwe kształty rzutu funkcji h spełniających **(A)** na stożek $\mathcal{C}_{\prec_c W}$ zostały przedstawione w Lemma 1 pracy [A7] i wyznaczone przy użyciu argumentów geometrycznych i wyrafinowanej analizy, szczegółowo opisanej w jego dowodzie. Wynik ten, obok Proposition 1 z tej samej pracy, okazał się jednym z szerzej stosowanych wyników podczas moich badań. Zgodnie z nim, rzut funkcji h może być funkcją, która jest albo najpierw liniowa, później pokrywa się z oryginalną funkcją h na pewnym przedziale jej wklęsłości, następnie jest stała, albo funkcją, która jest najpierw liniowa, później stała. W dalszej części niniejszej pracy będziemy używać skrótów l-h-s oraz l-s dla odpowiedniego oznaczenia kształtów rzutu, aby ułatwić prezentację wyników.

Aby wyznaczyć analityczną postać rzutu, należy rozważyć następujące funkcje pomocnicze. Zdefiniujmy

$$T(\beta) = h(\beta)[1 - W(\beta)] - \int_{\beta}^d h(x)w(x)dx, \quad 0 \leq \beta \leq d, \quad (4.2.2)$$

która jest malejąca na $(0, a)$, rosnąca na (a, c) oraz malejąca na (c, d) z $T(0) = h(0)$ i $T(d) = 0$. Zauważmy, że jeżeli funkcja T znika w pewnym punkcie β , to wartość $h(\beta)$ jest optymalnym stałym przybliżeniem h na przedziale (β, d) w normie $L^2((\beta, d), w(x)dx)$. Oznaczając przez β_*

jedyne zero (4.2.2) na przedziale (a, c) , niech ponadto

$$\begin{aligned}\lambda_*(\alpha) &= \frac{\int_0^\alpha (x - \alpha)[h(x) - h(\alpha)]w(x)dx}{\int_0^\alpha (x - \alpha)^2 w(x)dx}, \\ Y(\alpha) &= \lambda_*(\alpha) - h'(\alpha), \\ Z(\alpha) &= \int_0^\alpha [h(x) - h(\alpha) - \lambda_*(\alpha)(x - \alpha)]w(x)dx, \quad 0 \leq \alpha < d.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Funkcja $\lambda_*(\alpha)$ reprezentuje nachylenie optymalnego przybliżenia funkcji $h_{(0,\alpha)}$ poprzez funkcje liniowe $\lambda(x - \alpha) + h(\alpha)$. Zauważmy, że jeżeli $Y(\alpha) \geq 0$ dla pewnego $\alpha \in (b, c)$, to funkcja powstała poprzez sklejenie funkcji liniowej $\lambda_*(\alpha)(x - \alpha)$ oraz $h(\alpha)$ na lewo od α oraz $h(x)$ na prawo od α jest wklęsła w sąsiedztwie α . Jeżeli $Z(\alpha) = 0$, to $\lambda_*(\alpha)(x - \alpha) + h(\alpha)$ jest rzutem $h_{(0,\alpha)}$ na podprzestrzeń wszystkich funkcji liniowych w $L^2((0, \alpha), w(x)dx)$. Dokładny opis rzutu funkcji h spełniającej warunki (A) na $\mathcal{C}_{<c}W$ został przedstawiony w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3 ([A7] oraz [A6], Proposition 1) *Załóżmy, że zero $a < \beta_* < c$ funkcji (4.2.2) należy do (b, c) , zbiór $\mathcal{Y} = \{\alpha \in (b, \beta_*) : Y(\alpha) \geq 0, Z(\alpha) = 0\}$ jest niepusty, zaś $\alpha_* = \inf\{\alpha \in \mathcal{Y}\}$. Wówczas*

$$P_{<c}W h(x) = \begin{cases} h(\alpha_*) + \lambda_*(\alpha_*)(x - \alpha_*), & 0 \leq x < \alpha_*, \\ h(x), & \alpha_* \leq x < \beta_*, \\ h(\beta_*), & \beta_* \leq x < d, \end{cases}$$

jest rzutem h na $\mathcal{C}_{<c}W$. W przeciwnym przypadku definiujemy

$$P_\alpha h(x) = \frac{\int_\alpha^d h(y)w(y)dy}{1 - W(\alpha)} \left[\frac{(x - \alpha)\mathbf{1}_{(0,\alpha)}(x)}{-\int_0^\alpha (y - \alpha)w(y)dy} + 1 \right], \quad \beta_* \leq \alpha < d,$$

gdzie

$$\|P_\alpha h\|^2 = \frac{\int_\alpha^d h(x)w(x)dx \left[\int_0^\alpha (x - \alpha)^2 w(x)dx - \left(\int_0^\alpha (x - \alpha)w(x)dx \right)^2 \right]}{-[1 - W(\alpha)] \int_0^\alpha (x - \alpha)w(x)dx}.$$

Niech \mathcal{Z} oznacza zbiór argumentów $\alpha \geq \beta_*$ spełniających

$$\frac{\int_\alpha^d h(x)w(x)dx}{1 - W(\alpha)} = -\frac{\int_0^\alpha (x - \alpha)h(x)w(x)dx \int_0^\alpha (x - \alpha)w(x)dx}{\int_0^\alpha (x - \alpha)^2 w(x)dx - \left(\int_0^\alpha (x - \alpha)w(x)dx \right)^2} > 0.\tag{4.2.4}$$

Wówczas \mathcal{Z} jest niepusty oraz $P_{<c}W h(x) = P_{\alpha_*} h(x)$ dla jedynego $\alpha_* = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{Z}} \|P_\alpha h\|^2$.

Oryginalna wersja powyższego twierdzenia, przedstawiona w [A7] zawierała tylko warunek konieczny (4.2.4) na parametr α wyznaczający rzut w drugim przypadku l-s, co zostało doprecyzowane w [A6] poprzez dokładne wskazanie parametru α_* .

Rozkłady o rosnącej gęstości

Rozważmy próbę X_1, \dots, X_n i.i.d. ze wspólną dystrybuantą brzegową F . Naszym celem jest najpierw wyznaczenie górnych oszacowań wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych

$$\mathbb{E} \frac{X_{j:n} - \mu}{\sigma}, \quad (4.2.5)$$

przy założeniu, że F ma rosnącą gęstość. Skupiamy się na $3 \leq j \leq n-1$ dla $n \geq 4$, ponieważ inne przypadki zostały uwzględnione w [40]. Zgodnie z rozważaniami powyżej, musimy rzutować $h = h_{j:n} = f_{j:n} - 1$ (por. (4.1.10)) na stożek wypukły $\mathcal{C}_{\prec_c U}$ (por. (4.2.1)) niemalejących i wklęsłych elementów $L^2([0, 1], dx)$. Oczywiście jest, że funkcje $h_{j:n}$, $3 \leq j \leq n-1$, spełniają warunki **(A)**, z punktem przegięcia $b = b_{j:n}$ oraz maksimum w $c = c_{j:n}$. Ich rzut $P_{\prec_c U} h_{j:n}$ może mieć jedną z następujących postaci: jest albo liniowy rosnący, następnie równy h oraz stały (l-h-s), albo najpierw liniowy rosnący, później stały (l-s).

Dalsze kroki prowadzące do rozwiązania składają się z określenia dokładnych wzorów (4.2.2)-(4.2.3) dla $h = h_{j:n}$, oraz innych przydatnych funkcji pomocniczych. Staranna analiza własności tych funkcji umożliwia wyznaczenie warunków koniecznych dla możliwych kształtów rzutu. Odpowiednie szczegółowe wyniki znajdują się w Lemma 2, 3 oraz 4 pracy [A7]. Ostatecznie, optymalne górne oszacowania dla (4.2.5) razem z warunkami osiągnięcia równości zostały przedstawione w Proposition 2 oraz 3 pracy [A7].

Interesującym zagadnieniem jest to, czy założenia przedstawione w Proposition 2 pracy [A7], zapewniające kształt l-h-s rzutu zachodzą dla jakichkolwiek parametrów j oraz n . Odpowiedź jest ściśle powiązana z długością przedziału $(b_{j:n}, c_{j:n})$ wklęsłości $f_{j:n}$, która jest stosunkowo mała, szczególnie dla dużych n i skrajnych j . Warunek związany z (4.2.2) nie może być zweryfikowany analitycznie dla ogólnych j oraz n , z powodu jego skomplikowanej postaci oraz złożoności $b_{j:n}$. Jednakże obliczenia numeryczne pokazują, że jest on spełniony bardzo rzadko i mimo to nadal nie jest możliwy kształt rzutu postaci l-h-s, ponieważ pozostałe warunki nie są spełnione. Jesteśmy przekonani, że rzut $h_{j:n}$ nie zawiera części pokrywającej się z funkcją wyjściową i wszystkie oszacowania są konsekwencją kształtu l-s rzutu przedstawionego w Proposition 3, [A7], ale nie jesteśmy w stanie zweryfikować tej hipotezy analitycznie.

Skupmy się teraz na spacjach, tj. rozważmy górne oszacowania dla

$$\mathbb{E} \frac{X_{j+1:n} - X_{j:n}}{\sigma}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4.2.6)$$

dla bazowego rozkładu ID. Problemem jest teraz znalezienie rzutu funkcji $\tilde{h}_{j:n} = h_{j+1:n} - h_{j:n} = f_{j+1:n} - f_{j:n}$ na stożek wypukły $\mathcal{C}_{\prec_c U}$ funkcji niemalejących i wklęsłych w $L^2([0, 1], dx)$.

Zakładając, że $j = 2, \dots, n-2$, stwierdzamy, że $\tilde{h}_{j:n}$ spełnia warunki **(A)** z minimum w $a = \tilde{a}_{j:n}$ oraz maksimum w $c = \tilde{c}_{j:n}$. Punkt przegięcia $b = \tilde{b}_{j:n}$ nie ma w tym przypadku prostej postaci analitycznej. Aby wyznaczyć rzut, analogicznie jak w przypadku statystyk pozycyjnych, definiujemy odpowiedniki funkcji (4.2.2)-(4.2.3) i dalsze funkcje pomocnicze, których własności są omówione w Lemma 5 pracy [A7].

Dokładne wyniki dotyczące optymalnych górnych oszacowań dla (4.2.6) są zawarte w Proposition 4 oraz 5 pracy [A7]. Pierwsza opisuje oszacowanie w przypadku, gdy rzut $\tilde{h}_{j:n}$ na $C_{\prec_c U}$ ma kształt l-h-s, podczas gdy druga dotyczy przypadku, gdy jest on najpierw liniowy a później stały. Oszacowania są osiągane odpowiednio przez mieszanki rozkładów jednostajnych i atomów w prawych końcach nośnika oraz przez rozkłady jednostajne. Wspomniane twierdzenia nie obejmują przypadku skrajnych spacji, tzn. $X_{j+1:n} - X_{j:n}$, $j = 1, n - 1$, które pierwotnie zostały omówione w ogólnej postaci w Proposition 6 pracy [A7] i później dla przypadku $j = 1$ uproszczone w pracy [A6].

Wyniki teoretyczne przedstawione w tym podrozdziale są uzupełnione przykładami numerycznymi optymalnych oszacowań dla statystyk pozycyjnych i spacji (patrz Table 1 oraz 2, [A7]). Oszacowaniom towarzyszą odpowiednie wartości parametrów, które jednoznacznie charakteryzują rozkłady je osiągające, reprezentując proporcję części jednostajnej w mieszance rozkładów bazowych.

Rozkłady o rosnącej intensywności awarii

Wyniki tego paragrafu dotyczą pracy [A6], która stanowi kontynuację wyników zawartych w [A7], gdy rozważana jest inna klasa rozkładów bazowych. Problem polega na znalezieniu optymalnych górnych oszacowań dla (4.2.5) oraz (4.2.6), przy założeniu, że wyjściowy rozkład F ma rosnącą intensywność awarii. W tym celu wykorzystujemy wyniki opisane w poprzednim paragrafie, gdzie przedstawiono ogólne narzędzie konstrukcji rzutu funkcji spełniających warunki **(A)** na $C_{\prec_c W}$, i w rezultacie, również ostre górne oszacowania różnych funkcjonałów statystycznych rozważanych w odniesieniu do rodzin rozkładów poprzedzających różne dystrybuanty W w porządku wypukłym (patrz Twierdzenie 3). Podobnie jak poprzednio, skupiamy się tu na pojedynczych statystykach pozycyjnych oraz spacjach, dla których odpowiadające im funkcje $\sum_{i=1}^n c_i [f_{i:n} V - 1]$ dla odpowiedniego wyboru c_i , $i = 1, \dots, n$, spełniają założenia **(A)**.

Rozważmy najpierw górne optymalne oszacowania wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych, tzn. (4.2.5) dla $3 \leq j \leq n - 1$, oraz $n \geq 4$. Przypadki skrajnych statystyk pozycyjnych dla $j = 1, 2, n$, zostały już omówione w [40]. W naszym przypadku $W = V$ i rzutujemy funkcje $h(x) = h_{j:n}^V(x) = f_{j:n} V(x) - 1 = f_{j:n}(1 - e^{-x}) - 1$, na $C_{\prec_c V}$ (patrz (4.2.1)). Zauważmy, że $h_{j:n}^V$ spełnia warunki **(A)** dla $a = 0$, pierwszego punktu przegięcia $b = b_{j:n}^V$, maksimum w $c = c_{j:n}^V$ oraz $d = +\infty$. Tutaj pierwszy przedział, na którym $h_{j:n}^V$ jest malejąca jest pusty, co jest akceptowalne. Odpowiedniki funkcji (4.2.2)-(4.2.3) dla $h_{j:n}^V$ są dane na półprostej dodatniej i oznaczone jako $T_{j:n}^V$, $\lambda_{j:n}^V$, $Y_{j:n}^V$, $Z_{j:n}^V$. Pierwszy wynik, zawarty w Proposition 2 pracy [A6] pozwala uzyskać oszacowania w przypadku gdy rzut $h_{j:n}^V$ na $C_{\prec_c V}$ ma kształt l-h-s. Równość jest osiągana przez rozkłady, które składają się z trzech części: wykładniczej z lewej strony, odwrotności pewnej rosnącej części gęstości $f_{j:n}$, i skoku w prawej części nośnika.

Obliczenia numeryczne pozwalają przypuszczać, że założenia Proposition 2 z [A6] zachodzą bardzo rzadko i w konsekwencji również kształt l-h-s rzutu. Jedyny przykład, który udało nam

się znaleźć dotyczy górnego oszacowania dla (4.2.5) z $j = 3$ i $n = 4$. Jest ono osiągnięte przez rozkłady z częścią wykładniczą z lewej strony, odwrotnością funkcji sześcienną z niewielkim prawdopodobieństwem oraz skokiem z prawej strony nośnika. Ogólnie dla dużych n , punkt przecięcia $b_{j:n}^V$ leży blisko maksimum $c_{j:n}^V$ i w konsekwencji $h_{j:n}^V(b_{j:n}^V)$ jest tylko delikatnie mniejsze niż wartość maksimum $h_{j:n}^V(c_{j:n}^V)$. Jednakże dla $0 < \beta_{j:n}^V < c_{j:n}^V$ będącego jedynym zerem $T_{j:n}^V$, z definicji $h_{j:n}^V(\beta_{j:n}^V)$ nie może być zbyt duże, ponieważ $h_{j:n}^V(x)$ dla dużych argumentów x jest istotnie mniejsze niż $h_{j:n}^V(c_{j:n}^V)$. To implikuje, że $\beta_{j:n}^V < b_{j:n}^V$, co narusza warunek $T_{j:n}^V(b_{j:n}^V) < 0$. Nawet dla małych n , gdy relacja ta zachodzi, w przedziale $(b_{j:n}^V, \beta_{j:n}^V)$ nie ma wystarczająco miejsca na jakiegokolwiek punkty α spełniające $Z_{j:n}^V(\alpha) = 0$ oraz $Y_{j:n}^V(\alpha) \geq 0$ jednocześnie. Wydaje się, że za wyjątkiem niewielu przypadków, oszacowania wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych z rozkładów IFR są wyznaczane z użyciem rzutu l-s. Jednakże należy pamiętać, że dla danego j oraz n , najpierw należy zweryfikować założenia Proposition 2 z [A6] i wykluczyć rzut postaci l-h-s, zanim użyje się wzorów z Proposition 3 pracy [A6]. Twierdzenie to dotyczy wyników w przypadku, gdy założenia na rzut kształtu l-h-s nie są spełnione i rzut $h_{j:n}^V$ jest najpierw funkcją liniową, następnie stałą.

Rozważmy teraz spacje, tj. górne oszacowania dla (4.2.6) opartych na próbach pochodzących z rozkładów o rosnącej intensywności awarii, gdzie funkcja, która będzie rzutowana na $C_{<c}V$ przybiera następującą postać

$$\tilde{h}_{j:n}^V(x) = (f_{j+1:n} - f_{j:n})V(x) = f_{j+1:n}(1 - e^{-x}) - f_{j:n}(1 - e^{-x}). \quad (4.2.7)$$

Spełnia ona założenia **(A)** dla $2 \leq j \leq n - 2$ z minimum w $\tilde{a}_{j:n}^V$, maksimum w $\tilde{c}_{j:n}^V$ i punktem przecięcia $\tilde{b}_{j:n}^V \in (\tilde{a}_{j:n}^V, \tilde{c}_{j:n}^V)$ będącym rozwiązaniem pewnego wielomianowego równania logarytmicznego. Aby wyznaczyć pożądane oszacowania wykorzystamy odpowiednie modyfikacje funkcji (4.2.2)–(4.2.3).

Pierwszy wynik dotyczy rzutu postaci l-h-s, zaś odpowiadające mu oszacowania przedstawione są w Proposition 4 pracy [A6]. Jeżeli jej założenia nie są spełnione, wówczas rzut (4.2.7) ma kształt l-s i stosuje się Proposition 5 z pracy [A6]. Ponownie, przypuszczamy, że założenia Proposition 4 z [A6] nigdy nie są spełnione i weryfikowaliśmy tę tezę dla małych wartości n . Dla dużych n rosnące części $\tilde{h}_{j:n}^V$ są bardzo strome i jedynie niewielkie, wysoko położone jej fragmenty są wklęsłe. Jest bardzo mało prawdopodobne, aby ich mniejsze kawałki mogły stać się elementami rzutu.

Rozważmy teraz przypadek pierwszej i ostatniej spacji, tzn. $j = 1$ oraz $n - 1$, odpowiednio. Zauważmy, że oszacowania dla $j = 1$ w przypadku rozkładów ID przedstawione w Proposition 6 pracy [A7] są osiągnięte przez rozkłady z rosnącymi funkcjami gęstości i atomami w prawych końcach nośnika. To implikuje, że są one również IFR i ogólne górne oszacowania dla rozkładów ID są również osiągnięte przez rozkłady IFR. Dla $n = 2$ oszacowanie w przypadku ID wynosi $2\frac{\sqrt{3}}{3}$ a rozkład je osiągający ma jednostajną gęstość. Jest to szczególny przypadek oszacowania dla rozstępu z próby, zgodny z wynikiem Placketta (por. [32]). Przypadek ostatniej spacji dla $j = n - 1$ wymaga nieco więcej wysiłku, ponieważ odpowiadająca jej funkcja (4.2.7) nie spełnia

warunków **(A)**. Jest ona wklęsłe rosnąca od punktu przegięcia b i nie ma części malejącej w prawej części nośnika rozkładu. Dlatego wprowadzamy delikatną modyfikację założeń **(A)** i mówimy, że warunki $(\tilde{\mathbf{A}})$ są spełnione, jeżeli **(A)** zmodyfikowano tak, że $c = d = +\infty$ oraz $\sup_{x>0} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) > 0$. Rzut funkcji spełniającej założenia $(\tilde{\mathbf{A}})$ na (4.2.1) jest najpierw funkcją liniową, później pokrywa się z oryginalną funkcją na przedziale jej wklęsłości, co jest opisane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 4 ([A6], Proposition 6) *Jeżeli h spełnia założenia $(\tilde{\mathbf{A}})$, to przy oznaczeniach (4.2.3), zbiór $\tilde{\mathcal{Y}} = \{\alpha > b : Y(\alpha) \geq 0, Z(\alpha) = 0\}$ jest niepusty i dla $\alpha_* = \inf\{\alpha \in \mathcal{Y}\}$ otrzymujemy*

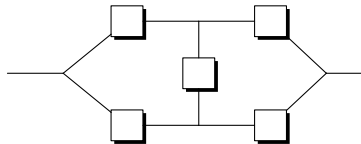
$$P_{\prec_c W} h(x) = \begin{cases} h(\alpha_*) + \lambda_*(\alpha_*)(x - \alpha_*), & 0 \leq x < \alpha_*, \\ h(x), & x \geq \alpha_*. \end{cases}$$

Konstrukcja rzutu oparta jest na argumentach geometrycznych i jest analogiczna do tej przedstawionej w dowodzie Twierdzenia 3 (por. Proposition 6, [A6]). Rozważając problem ostatnich spacji, dokładne wyniki dotyczące oszacowań na (4.2.6) dla $j = n - 1$ są umieszczone w Proposition 7 pracy [A6].

Podobnie jak w przypadku rozkładów ID, wyniki teoretyczne dla rodziny IFR są uzupełnione przykładami numerycznymi optymalnych oszacowań statystyk pozycyjnych i spacji (patrz Table 1 oraz 2, [A6]). Oszacowania podane są wraz z wartościami, które reprezentują wkład wykładniczej części w rozkłady, dla których oszacowania te są osiągnięte.

Oczywistych zastosowań wyników opisanych w niniejszym paragrafie dostarcza teoria niezawodności. Jeżeli rozważymy system niezawodnościowy złożony z n elementów, których czasy życia X_1, \dots, X_n są i.i.d. (wystarczy wymienialność), to dystrybuanta T czasu życia systemu jest wypukłą kombinacją $\mathbb{P}(T \leq t) = \sum_{i=1}^n s_i \mathbb{P}(X_{i:n} \leq t)$ dystrybuant statystyk pozycyjnych, przy czym wektor współczynników owej kombinacji $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, nazywany sygnaturą Samaniego zależy jedynie od struktury systemu. Dlatego $\mathbb{E}T = \mathbb{E} \sum_{i=1}^n s_i X_{i:n}$, i do dokładnych oszacowań $\frac{\mathbb{E}(T - \mathbb{E}X_1)}{\sqrt{\text{Var } X_1}}$, gdzie $X_i, i = 1, \dots, n$, mają rozkłady IFR, można zastosować nasze wyniki. Poniżej przytaczamy przykład ich zastosowania (patrz Example 2, [A6]).

PRZYKŁAD 1. Klasyczny system mostkowy (patrz Rysunek 1) ma sygnaturę $\mathbf{s}_1 = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0)$. Analizując właściwości odpowiednich funkcji, które mają być rzutowane na $C_{\prec_c V}$, pokazujemy,



Rysunek 1: System mostkowy

że spełniają one wszystkie założenia **(A)**. Następnie wyznaczamy oszacowanie

$$\frac{\mathbb{E}T - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\text{Var } X_1}} \leq 0.304099,$$

dla i.i.d. zmiennych o rozkładach IFR modelujących czasy życia komponentów systemu oraz przestawiamy następujące warunki osiągnięcia równości

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \frac{x-\mu}{\sigma} < -3.29566, \\ 1 - \exp\left(-0.07239\frac{x-\mu}{\sigma} - 0.23855\right), & -3.29566 \leq \frac{x-\mu}{\sigma} < -1.66202, \\ \tilde{f}_{s_1}^{-1}(0.30412\frac{x-\mu}{\sigma} + 1), & -1.66202 \leq \frac{x-\mu}{\sigma} < 0.48936, \\ 1, & \frac{x-\mu}{\sigma} \geq 0.48936. \end{cases}$$

Warto wspomnieć, że różnica pomiędzy oszacowaniami powyżej a ich odpowiednikami bez założenia IFR, $\mathbb{E}(T - \mathbb{E}X_1)/\sqrt{\text{Var } X_1} \leq 0.304111$, jest niemalże niezauważalna. Rzut typu l-h-s może być przydatny w opisie oszacowań dla różnych systemów, np. otrzymujemy również $\mathbb{E}(X_{3:5} - \mathbb{E}X_1)/\sqrt{\text{Var } X_1} \leq 0.37576$ w przypadku IFR. Inne zastosowanie, uwzględnione w Example 3 pracy [A6] dotyczy równoległego połączenia trzech pojedynczych komponentów i szeregowo ustawionych dwóch innych obiektów.

4.2.2 Oszacowania górne ujemne

Wyniki niniejszego podrozdziału odnoszą się do pracy [A4], gdzie wyznaczono dokładne rozwiązanie dotyczące górnych ujemnych oszacowań wartości oczekiwanych statystyk pozycyjnych niskiego rzędu, scentrowanych względem średniej populacji, mierzonych w jednostkach średniego absolutnego odchylenia od średniej $\sigma_1 = E|X_1 - \mu|$ (por. (4.2.5)) dla rodziny rozkładów o malejącej uśrednionej gęstości (DDA, patrz Podrozdział 4.1.2). Problem ten był pierwotnie rozważany przez Rychlika w [41], który przedstawił również warunki konieczne i wystarczające na rzędy statystyk tak, aby oszacowania faktycznie były ujemne (patrz [41], Proposition 3). Przeanalizowaliśmy te warunki gruntownie i okazało się, że można ograniczyć się w rozważaniach do jednego szczególnego przypadku $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$.

Aby przedstawić wyniki pracy, wprowadzimy pewne funkcje pomocnicze. Dla $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, definiujemy

$$K_{j:n}(x) = \frac{1-x^2}{2} - \frac{j}{n+1} \sum_{i=0}^j \binom{n+1}{i} x^i (1-x)^{n+1-i}, \quad 0 < x < 1,$$

z pochodną $K'_{j:n}(x) = x[f_{j:n}(x) - 1]$, gdzie $f_{j:n}$ odpowiada (4.1.10). Ponadto, niech

$$M(x) = \begin{cases} M_1(x), & 0 < x \leq \sqrt{2} - 1, \\ M_2(x), & \sqrt{2} - 1 \leq x < 1, \end{cases}$$

gdzie

$$M_1(x) = \frac{1}{4}(1+x^2)^2, \quad M_2(x) = x(1-x^2). \quad (4.2.8)$$

W pracy [A4] pokazujemy, że oszacowania przedstawione w [41] znajdują się w przedziale $[-\min\{\frac{1}{2}, 2 - \frac{4j}{n+1}\}, 0)$, a dla wystarczająco dużych j są istotnie większe niż $-\frac{1}{2}$. Następnie badamy zachowanie następujących dwóch funkcji

$$B_i(x) = \frac{K_{j:n}(x)}{M_i(x)}, \quad i = 1, 2, \quad (4.2.9)$$

na przedziale $(0, 1)$ i rozważamy funkcje wielomianowe postaci

$$L_1(x) = \frac{4x^2 B_1'(x)}{1+x^2} = \frac{4[K'_{j:n}(x)M_1(x) - K_{j:n}(x)M_1'(x)]}{1+x^2}, \quad (4.2.10)$$

$$L_2(x) = x^2 B_2'(x) = K'_{j:n}(x)M_2(x) - K_{j:n}(x)M_2'(x), \quad (4.2.11)$$

których znaki są identyczne jak znaki pochodnych $B_i'(x)$, $i = 1, 2$, odpowiednio. Jest to omówione w Lemma 1 oraz 2 w pracy [A4], których dowody bazują głównie na własności malejącej zmienności (*variation diminishing property*, w skrócie VDP, por. np. [35], Lemma 14) wielomianów Bernsteina (4.1.11) na przedziale jednostkowym oraz prostych, ale żmudnych obliczeniach algebraicznych. Główny wynik przedstawiony jest w Theorem 2 pracy [A4]. Jego dowód polega na wykorzystaniu Lemma 1 oraz 2 pracy [A4], a także na analizie funkcji (4.2.8)-(4.2.11). Wyniki numeryczne pokazują, że przypadki (i) oraz (ii) Theorem 2 z pracy [A4] zachodzą najczęściej. Dla małych $j \geq 2$, oszacowania są równe $-B_2(1-) = -\frac{1}{2}$, i są ściśle większe dla j bliskich wartości $n/2$.

4.3 Oszacowania dla rekordów

Niniejszy podrozdział, odnoszący się do pracy [A3], jest ściśle powiązany z wynikami przedstawionymi w Podrozdziale 4.2.1, gdzie omówiono ogólne wyniki dotyczące rzutu funkcji spełniających pewne warunki **(A)** na stożek wypukły (4.2.1). Rozważmy nieskończony ciąg i.i.d. zmiennych losowych X_1, X_2, \dots , o jednakowej dystrybuancie F , skończonej średniej μ oraz skończonej i dodatniej wariancji σ^2 . Interesuje nas znalezienie optymalnych górnych oszacowań na średnie standaryzowane wartości rekordowe $R_n^{(k)}$, $n \geq 1$ dla ustalonego $k = 1, 2, \dots$, wyrażone jako

$$\mathbb{E} \frac{R_n^{(k)} - \mu}{\sigma},$$

przy założeniu, że dystrybuanta F pochodzi z klasy rozkładów IGFR(α) (patrz (4.1.6)). Pomijamy przypadek $n = 0$, który sprowadza się do statystyki pozycyjnej $X_{1:k}$, ponieważ był on rozważany w [40], gdzie przedstawiono optymalne oszacowania dla rozkładów ID oraz IFR. Wcześniej powstało wiele prac dotyczących oszacowań dla rekordów i ich przyrostów w różnych rodzinach rozkładów, ale nigdy dla rodzin z rosnącą gęstością czy intensywnością awarii. Wyniki tu omawiane stanowią uzupełnienie pracy Bieniek [7], która ustanowiła górne oszacowania dla rekordów z klasy DGFR(α).

Oczywiście, przyjmując oznaczenia (4.1.12) mamy

$$\mathbb{E} \frac{R_n^{(k)} - \mu}{\sigma} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma} [g_n^{(k)}(x) - 1] dx = \int_0^d \frac{F^{-1}(W(x)) - \mu}{\sigma} (g_n^{(k)}(W(x)) - 1) w(x) dx, \quad (4.3.1)$$

dla ustalonej, absolutnie ciągłej dystrybuanty W o gęstości w i nośniku $[0, d]$, $d \leq \infty$. Dalej, wykorzystujemy nierówność Schwarza wraz z metodą rzutowania opisaną w Podrozdziale 4.1.3

zastosowaną do stożka (4.2.1) i wnioskujemy, że (4.3.1) może być ograniczone z góry przez rzut $P_{\prec_c W}$ funkcji $h_W(x) = g_n^{(k)}(W(x)) - 1$, następująco

$$\mathbb{E} \frac{R_n^{(k)} - \mu}{\sigma} \leq \|P_{\prec_c W} h_W\|_W, \quad (4.3.2)$$

gdzie $\|\cdot\|_W$ oznacza normę w $L^2([0, d], w(x)dx)$, tzn. $\|f\|_W = \left(\int_0^d |f(u)|^2 w(u) du\right)^{1/2}$ dla dowolnej $f \in L^2([0, d], w(x)dx)$, również nazywaną L^2_W -normą, z równością osiąganą przez dystrybuantę F spełniającą

$$\frac{F^{-1}(W(x)) - \mu}{\sigma} = \frac{P_{\prec_c W} h_W(x)}{\|P_{\prec_c W} h_W\|_W}.$$

W naszym przypadku $W = W_\alpha$, gdzie W_α jest rozkładem GPD zdefiniowanym w (4.1.3). Problem wyznaczenia optymalnych górnych oszacowań dla (4.3.1) łatwo redukuje się do wyznaczenia $L^2_{W_\alpha}$ -normy rzutu $P_\alpha = P_{\prec_c W_\alpha}$ funkcji h_{W_α} na stożek $\mathcal{C}_{\prec_c W_\alpha}$. Skoro następujący warunek powinien być spełniony,

$$\int_0^d x^2 w_\alpha(x) dx < \infty, \quad (4.3.3)$$

wówczas, zgodnie z [10], rozważając rozkłady W_α , musimy ograniczyć się do przypadków $\alpha > -\frac{1}{2}$. Oznaczmy $h_\alpha(x) = h_{W_\alpha}(x) = \hat{g}_n^{(k)}(x) - 1$, gdzie $\hat{g}_n^{(k)}(x) = g_n^{(k)}(W_\alpha(x))$, i niech $\hat{G}_n^{(k)}(x) = G_n^{(k)}(W_\alpha(x))$. Pierwszy problem, który został rozwiązany podczas pracy nad oszacowaniami dla (4.3.1) polegał na znalezieniu możliwych kształtów funkcji h_α dla dowolnych $k = 1, 2, \dots$ oraz $n \geq 1$, które odpowiadają kształtom złożen $\hat{g}_n^{(k)}$. Zostały one przedstawione w Lemma 3.1 pracy [A3], którego dowód składa się ze skrupulatnej analizy pierwszej i drugiej pochodnej $\hat{g}_n^{(k)}$ z wykorzystaniem własności VDP liniowych kombinacji $\hat{g}_n^{(k)}$.

Funkcje h_α spełniają warunki **(A)** z $a = 0$ dla $k \geq 2$ oraz $n \geq 2$ jeżeli $\alpha = 0$, dla $n = 1$ oraz $2 \leq k < \frac{\alpha}{2} + 1$ lub $k \geq 2$ i $n \geq 2$ gdy $\alpha > 0$, oraz dla $k \geq 2$ i $n \geq 2$ gdy $\alpha < 0$. Możemy użyć Twierdzenia 3 aby uzyskać rzut h_α na $\mathcal{C}_{\prec_c W_\alpha}$ i ostatecznie wyznaczyć szukane oszacowanie zgodnie z (4.3.2). Ponadto, h_α spełnia warunki **(\tilde{A})** w przypadku pierwszego rekodu ($k = 1$) dla $\alpha < 0$, $n \geq 2$ i wówczas stosujemy Twierdzenie 4. Pozostałe przypadki są rozwiązane bez użycia wspomnianych już wyników. Implikują one szczególne kształty rzutów, które mogą mieć jedną z trzech możliwych postaci. Pierwsza odpowiada wyjściowej funkcji h_α (w przypadku pierwszych wartości klasycznych rekordów dla $\alpha \leq 0$), drugi możliwy kształt to funkcja liniowa rosnąca (dla klasycznych rekordów gdy $n \geq 1$ i $\alpha > 0$ lub $n \geq 2$ i $\alpha = 0$), natomiast ostatnia postać rzutu początkowo pokrywa się z funkcją h , później jest stała (pierwsze wartości k -tych rekordów dla $\alpha < 0$ i $k \geq 2$ lub $\alpha > 0$, $k \geq \max\{2, \frac{\alpha}{2} + 1\}$).

Wyniki dotyczące oszacowań dla klasycznych rekordów przedstawiono w Proposition 3.1 pracy [A3]. Dowód polegał na wykorzystaniu Twierdzenia 4 oraz prostych obliczeń dla całek, jak również żmudnej konstrukcji rzutu dla poszczególnych parametrów, które nie były uwzględnione w Proposition 2, 3 z pracy [A7], ani w Twierdzeniu 4.

Aby przedstawić oszacowania dla k -tych rekordów dla $k \geq 2$, rozważamy odpowiedniki funkcji zdefiniowanych wzorami (4.2.2)-(4.2.3). Główne wyniki przedstawione są w Proposition 3.2 pracy [A3]. Są one ogólne i dotyczą dowolnego $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, zaś dokładne wzory na całki wprowadzone w tym twierdzeniu zebrano w Remark 3.1 pracy [A3].

Warto wspomnieć, że dla $n = 1$ oraz $0 < \alpha \leq 2k - 1$, konstrukcja oszacowań implikuje, że są one identyczne jak oszacowania ogólne, tzn. otrzymane bez ograniczania się do jakiegokolwiek szczególnej rodziny rozkładów. Parametr β^* rozważony w [A3] jest wówczas przekształceniem tzw. punktu Morigutiego β_0 , który definiuje rzut w ogólnym przypadku absolutnie ciągłego rozkładu F . Rzeczywiście, nasze wyniki odpowiadają wynikom Raqaba (patrz [33]) w obu przypadkach rozkładów ID oraz IFR.

W Corollary 3.1 oraz 3.2 z pracy [A3] przedstawiono dokładne wyniki dotyczące górnych oszacowań dla szczególnych przypadków rozkładów o rosnącej uogólnionej intensywności awarii tzn. dla rozkładów ID i IFR. Numeryczne wartości oszacowań dla średnich k -tych rekordów dla ustalonych wartości parametrów n, k oraz α dla tych dwóch rodzin rozkładów przedstawiono w Table 1 i 2 pracy [A3]. Pierwsza tabela zawiera wartości górnych oszacowań dla n -tych wartości drugich rekordów ($k = 2$), $n = 1, \dots, 9$. Warto wspomnieć, że jedyny przypadek wśród rozważanych o kształcie rzutu l-h-s, to przypadek rozkładu IFR dla $n = 2$. Wszystkie oszacowania rosną gdy n wzrasta, podobnie jak parametry wyznaczające kształty rzutów. Table 2 z pracy [A3] przedstawia optymalne oszacowania średnich piątych wartości ($n = 5$) k -tych rekordów, $k = 1, 2, \dots, 10$. Dla $k = 1$ użyteczne były punkty (ii) oraz (iii) Proposition 3.1 pracy [A3]. Dla $k \geq 2$ wszystkie oszacowania zostały wyznaczone przy użyciu drugiego typu kształtu rzutu, l-s ([A3], Corollary 1 oraz 2, przypadki (ii)). Zauważmy, że oszacowania maleją wraz ze wzrostem parametru k , to samo dotyczy parametrów wyznaczających punkty, w których rzut przekształca się z funkcji liniowej rosnącej do funkcji stałej.

Wreszcie, numeryczne wartości oszacowań w przypadku IFR są większe niż oszacowania w przypadku ID, co jest zgodne z ogólnymi zależnościami między tymi dwiema rodzinami rozkładów.

4.4 Oszacowania dla uogólnionych statystyk pozycyjnych

W tym podrozdziale prezentujemy oszacowania dla wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych. Najpierw zreferujemy wyniki w przypadku ogólnym, bez nakładania ograniczeń na rodziny rozkładów wyjściowych poza ich absolutną ciągłością, następnie przedstawimy wyniki dla rodzin z dystrybuantami większymi w porządku wypukłym i gwiazdzystym od pewnych szczególnych dystrybuant rozkładów.

4.4.1 Ogólne rodziny rozkładów

Wyniki tej sekcji dotyczą pracy [A8]. Stanowi ona uzupełnienie wyników Cramera et al. [16], którzy rozwiązywali problem górnych nieujemnych oszacowań dla wartości oczekiwanych uogól-

nionych statystyk porządkowych

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (4.4.1)$$

Autorzy użyli w tym celu kombinacji nierówności Morigutiego i Höldera. Aby to osiągnąć, rozważyli cztery różne przypadki w zależności od kształtu gęstości $f_{\gamma,r}$ (patrz (4.1.7)):

- (A) $f_{\gamma,r} \equiv 1$ dla $r = 1$ i $\gamma_1 = 1$,
- (B) $f_{\gamma,r}$ jest ściśle malejąca dla $r = 1$ oraz $\gamma_1 > 1$,
- (C) $f_{\gamma,r}$ jest ściśle rosnąca oraz
 - (i) $f_{\gamma,r}(1) < \infty$ dla $r \geq 2$ oraz $\gamma_{r-1} > \gamma_r = 1$,
 - (ii) $f_{\gamma,r}(1) = \infty$ dla $r \geq 1$ oraz $\gamma_r < 1$ lub $r \geq 2$ oraz $\gamma_{r-1} = \gamma_r = 1$,
- (D) $f_{\gamma,r}$ jest ściśle jednomodalna z modą $z_r \in (0, 1)$ oraz $f_{\gamma,r}(0) = f_{\gamma,r}(1) = 0$ dla $r \geq 2$ i $\gamma_r > 1$.

Górne oszacowania w przypadkach (A) oraz (B) okazały się być równe zero, osiągnane przez dowolne rozkłady F , oraz przez jednopunktowe rozkłady o masie μ , odpowiednio. Jednakże dla przypadku (B) zostały one poprawione w pracy [A8], skutkując możliwie ujemnymi oszacowaniami. Publikacja ta obejmuje również problem oszacowań dolnych, które dla uogólnionych statystyk porządkowych nie były do tej pory w ogóle rozważane.

Rozpocniemy przedstawieniem górnych niedodatnich oszacowań dla (4.4.1) w przypadku (B). Zauważmy, że gęstość $f_{\gamma,1}$ (patrz (4.1.8)) pierwszej uogólnionej statystyki porządkowej jest ściśle malejąca i metoda największej wypukłej minoranty daje zerowe górne oszacowania. Oszacowania te zostały poprawione w przypadku $p = 1$, w którym otrzymano oszacowania górne ujemne. Do rozwiązania tego problemu użyto metody maksymalizacji normy, opisaney w Podrozdziale 4.1.4 w odniesieniu do funkcjonału postaci

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(1)} - \mu}{\sigma_p} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p} (f_{\gamma,1}(x) - 1) dx. \quad (4.4.2)$$

Pierwotna $H(x) = \int_0^x h(t) dt = F_{\gamma,1}(x) - x$ funkcji $h = f_{\gamma,1} - 1$, $0 < x < 1$, spełnia warunki $H(0) = H(1) = 0$ oraz $H(x) > 0$ dla $0 < x < 1$, ponieważ $F_{\gamma,1}$ jest ściśle wklęsła, podobnie jak H . Mamy zatem

$$T_h(g) = \int_0^1 g(t) H(dt) \leq 0,$$

dla wszystkich niemalejących niestałych funkcji g , dla których całki powyżej istnieją (por. np. [29], str. 444). Dalej używamy Twierdzenia 2 z dystrybuantą pierwszej uogólnionej statystyki porządkowej daną wzorem (4.1.9), przeprowadzając dokładną analizę odpowiednich ułamków.

Optymalne górne niedodatnie oszacowania dla średnich pierwszych uogólnionych statystyk pozycyjnych opartych na rozkładzie z dystrybuantą F oraz parametrem $\gamma_1 > 1$ zaprezentowano w Theorem 4 pracy [A8]. Oszacowania te wyrażone są w jednostkach skali generowanych przez σ_p dla $1 \leq p \leq \infty$. Równość jest osiągana przez dowolne rozkłady (dla $p = 1$ i $\gamma_1 = 2$) lub jest osiągana w granicy przez ciągi pewnych dwupunktowych rozkładów. Zauważmy, że rozkład pierwszej uogólnionej statystyki pozycyjnej dany wzorem (4.1.9) odpowiada rozkładowi zwykłego minimum opartego na pewnym odpowiednio przekształconym rozkładzie. Odpowiednie wyniki dotyczące oszacowań dla minimum z próby można znaleźć np. w [13], [26], [B1].

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące dolnych oszacowań dla (4.4.1). Odpowiadają one wartościom przeciwnym do górnych oszacowań dla

$$\mathbb{E} \frac{\mu - X_{\gamma}^{(r)}}{\sigma_p} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p} [-f_{\gamma,r}(x)] dx, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (4.4.3)$$

Podobnie jak w przypadku oszacowań górnych, dolne również ściśle zależą od kształtu gęstości $f_{\gamma,r}$. W przypadkach (A), (B) oraz (D) do znalezienia optymalnych dolnych niedodatnich oszacowań użyto kombinacji nierówności Morigutiego i Höldera, zaś w przypadku (C) dla problemu dolnych oszacowań nieujemnych, gdzie zastosowana została metoda maksymalizacji normy, wykorzystano Twierdzenie 2.

Dokładne wyniki dla $1 < p < \infty$ w przypadku (B) oraz (D) zawarte są w Theorem 5 pracy [A8]. Jego dowód składa się z kilku kroków, ale ogólnie polega na znalezieniu optymalnej stałej, która minimalizuje pewną funkcję odległości oraz użyciu standardowych narzędzi analitycznych. Przypadek szczególny dla $p = q = 2$, gdy oszacowanie wyrażone jest w terminach odchylenia standardowego przedstawiony został w Corollary 1 pracy [A8]. Wyniki dla przypadków skrajnych $p = 1$ oraz $p = \infty$ zawarte są w Theorem 6 i 7 z pracy [A8], dla których równości są osiągane w granicy odpowiednio przez ciągi pewnych rozkładów trzy- oraz dwupunktowych.

Wyniki dotyczące dolnych nieujemnych oszacowań dla wartości oczekiwanych r -tych uogólnionych statystyk pozycyjnych opartych na rozkładzie z dystrybuantą F o skończonych momentach (4.1.14), (4.1.15) i parametrach $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ w przypadku (C) ściśle rosnącej funkcji gęstości $f_{\gamma,r}$ są zawarte w Theorem 8 i 9 pracy [A8]. Oszacowania te są równe zero dla $p \neq 1$, osiągane w granicy przez ciągi pewnych szczególnych rozkładów dwupunktowych. Jedynie dla $p = 1$ są one ściśle dodatnie, również osiągane w granicy przez rozkłady dwupunktowe. Ze wspomnianych już powodów, aby uzyskać te oszacowania użyto metody maksymalizacji normy.

4.4.2 Rodzina rozkładów DGFR

Wyniki tego podrozdziału odnoszą się do pracy [A1], gdzie rozważono dolne niedodatnie oszacowania dla wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych (4.4.1) dla $p = 2$, tzn. $\sigma_p = \sigma$, oparte na rozkładzie z malejącą uogólnioną intensywności awarii (patrz (4.1.5)). Dolne oszacowania w ograniczonych rodzinach rozkładów dla uogólnionych statystyk pozycyjnych

po raz pierwszy rozważono w omawianej pracy. Jak wcześniej wspomniano, dolne oszacowania dla (4.4.1) odpowiadają wartościom przeciwnym do oszacowań górnych dla zmodyfikowanych funkcjonałów, zatem

$$-\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(u) - \mu}{\sigma} h_{\gamma,r}(u) du, \quad (4.4.4)$$

(por. (4.4.3)) dla $h_{\gamma,r}(x) = 1 - f_{\gamma,r}(x)$, całkowalnej do zera na $[0, 1]$. Dolne niedodatnie oszacowania zostały wyznaczone przy użyciu metody rzutowania. Skoro zakładamy, że F ma malejącą uogólnioną intensywność awarii, to standaryzowana funkcja kwantylowa $\frac{F^{-1}(u) - \mu}{\sigma}$ jest rosnąca i wypukła, więc analogicznie do (4.2.1) definiujemy stożek wypukły postaci

$$\mathcal{C}_{\succ_c W} = \{g \in L^2([0, d], w(x)dx) : g(x) \text{ jest niemalejąca i wypukła}\},$$

dla pewnej dystrybuanty W zdefiniowanej na $[0, d]$ z gęstością w spełniającą warunek (4.3.3) oraz $L^2([0, d], w(x)dx)$ będącej przestrzenią Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem na $[0, d]$ względem wagi w . Jako $P_{\succ_c W}$ oznaczamy operator rzutowania na $\mathcal{C}_{\succ_c W}$. Używając notacji $\hat{f}_{\gamma,r} = f_{\gamma,r}W$, $\hat{h}_{\gamma,r} = h_{\gamma,r}W = 1 - \hat{f}_{\gamma,r}$, i dokonując zamiany zmiennych w (4.4.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma} &= \int_0^d \frac{F^{-1}W(u) - \mu}{\sigma} \hat{h}_{\gamma,r}(u) w(u) du \\ &\leq \int_0^d \frac{F^{-1}W(u) - \mu}{\sigma} P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}(u) w(u) du \leq \|P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}\|_W, \end{aligned}$$

co implikuje

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma} \geq -\|P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}\|_W. \quad (4.4.5)$$

Równość powyżej jest osiągnięta dla dystrybuanty F spełniającej $(F^{-1}W(u) - \mu)/\sigma = P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}(u) / \|P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}\|_W$, $u \in [0, d]$. Aby wyznaczyć $P_{\succ_c W} \hat{h}_{\gamma,r}$ kluczowe jest przestudiowanie monotoniczności i wklęsłości funkcji $\hat{f}_{\gamma,r}$ i $\hat{h}_{\gamma,r}$. Kształt $\hat{f}_{\gamma,r}$ został pobieżnie opisany w [10], natomiast my potrzebujemy tu bardziej precyzyjnych wyników. Wymaga to wiedzy dotyczącej zmiany znaków pochodnych $\hat{f}'_{\gamma,r}$ oraz $\hat{f}''_{\gamma,r}$. Bieniek (patrz Lemma 2.1, [10]) twierdzi, że te własności mogą być efektywnie badane tylko wtedy, gdy $W = W_\alpha$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Możemy wówczas zastosować własność malejącej zmienności (VDP) funkcji $\hat{f}_{\gamma,1}, \dots, \hat{f}_{\gamma,r}$, przedstawioną w Proposition 1 pracy [A1], które jest prostą konsekwencją Theorem 1, 2 oraz 3 z pracy [8]. Dokładny kształt funkcji $\hat{f}_{\gamma,r}$ został opisany w Lemma 1 pracy [A1]. Rzut funkcji $\hat{h}_{\gamma,r}$ na $\mathcal{C}_{\succ_c W}$ wyznaczono wykorzystując następujące rozszerzenie wyników pracy [19]. Rozważamy klasę funkcji $h : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujący zestaw warunków:

(A1) h jest ograniczoną, dwukrotnie różniczkowalną funkcją, taką, że $h(0) \geq 0$, $h(d) := \lim_{x \nearrow d} h(x) \geq 0$ oraz $\int_0^d h(x)w(x)dx = 0$, gdzie w jest dodatnią funkcją wagową spełniającą $\int_0^d w(x)dx = 1$. Ponadto, h jest malejąca na $(0, a)$, wypukła rosnąca na (a, b) i wklęsła rosnąca na (b, d) , dla pewnych $0 < a < b < d$.

Warunki te są takie same jak te rozważane w [19] poza założeniem, że $h(0) = 0$. Jednakże dokładna analiza dowodu Lemma 3 z [19] pokazuje, że zachodzi on również przy mniej restrykcyjnym założeniu $h(0) \geq 0$. Warunki **(A1)** są również podobne do $(\tilde{\mathbf{A}})$, przedstawionych wcześniej. Korzystając z Lemma 1 pracy [A1] twierdzimy, że funkcja $\hat{h}_{\gamma,r}$ spełnia warunki **(A1)** dla $r \geq 2$ oraz $\gamma_r > 1 + \alpha$ gdy $\alpha > 0$, lub $\gamma_r > 1$ gdy $\alpha \leq 0$.

Zauważmy, że każda funkcja h spełniająca warunki **(A1)** ma jedyne minimum $h(a) < 0$, więc ma również jedyne zero $\theta \in (a, d)$. Z Lemma 4(ii) pracy [19], jeżeli $H(x) = \int_0^x h(u)w(u)du$, $x \in (0, d)$, to równanie

$$H(\gamma) = W(\gamma)h(\gamma) \quad (4.4.6)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $\gamma \in (0, d)$, które należy do przedziału (a, θ) . Dokładna postać $P_{\succ_c W}h$ dla h spełniającego **(A1)** jest wyznaczona przez następujące funkcje pomocnicze

$$\begin{aligned} \lambda_W(y) &= \frac{\int_y^d (x-y)(h(x) - h(y))w(x)dx}{\int_y^d (x-y)^2 w(x)dx}, \\ K_W(y) &= \lambda_W(y) - h'(y), \\ L_W(y) &= \int_y^d [h(x) - h(y) - \lambda_W(y)(x-y)]w(x)dx. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Dalej prezentujemy rozszerzenie Proposition 1 z pracy [19].

Twierdzenie 5 ([A1], Proposition 2) *Załóżmy, że γ jest dana przez (4.4.6) i niech*

$$\mathcal{K} = \{\gamma < y < b : K_W(y) \geq 0 \text{ i } L_W(y) = 0\}.$$

Jeżeli $\mathcal{K} \neq \emptyset$ oraz $y^ = \sup \mathcal{K}$, to*

$$P_{\succ_c W}h(x) = \begin{cases} h(\gamma), & \text{dla } 0 \leq x \leq \gamma, \\ h(x), & \text{dla } \gamma < x \leq y^*, \\ h(y^*) + \lambda^*(x - y^*), & \text{dla } y^* < x < d, \end{cases} \quad (4.4.8)$$

gdzie $\lambda^ = \lambda_W(y^*)$. W przeciwnym przypadku, jeżeli $\mathcal{K} = \emptyset$, to*

$$P_{\succ_c W}h(x) = -\frac{H(y)}{W(y)} \left[\frac{(x-y)\mathbf{1}_{[y,d]}(x)}{\int_y^d (x-y)w(x)dx} - 1 \right],$$

dla największego $y \in (0, \gamma]$ spełniającego

$$\frac{\int_y^d h(x)w(x)dx}{\int_0^y w(x)dx} = \frac{\int_y^d (x-y)w(x)dx \int_y^d (x-y)h(x)w(x)dx}{\int_y^d (x-y)^2 w(x)dx - \left(\int_y^d (x-y)w(x)dx\right)^2}.$$

Główne wyniki są zawarte w Proposition 3 z pracy [A1], która opisuje optymalne dolne nieodatnie oszacowania dla standaryzowanych uogólnionych statystyk pozycyjnych $X_\gamma^{(r)}$, $r \geq 2$

razem z warunkami osiągnięcia równości w przypadku rozkładów $DGFR(\alpha)$, tzn. dla $W = W_\alpha$ gdzie $\alpha > -\frac{1}{2}$. Jego dowód polega na wyznaczeniu rzutu $P_{\succ_c W_\alpha} \hat{h}_{\gamma,r}$ przy użyciu Twierdzenia 5 dla $h = \hat{h}_{\gamma,r}$ oraz (4.4.5). Aby osiągnąć ten wynik, przedstawiamy odpowiednie funkcje $\lambda_\alpha = \lambda_{W_\alpha}$, $K_\alpha = K_{W_\alpha}$ oraz $L_\alpha = L_{W_\alpha}$ (por. (4.4.7)) jako funkcje będące liniowymi kombinacjami gęstości $\hat{f}_{\gamma,j}$, $j = 1, \dots, r$. Następnie wyznaczamy warunki zapewniające, że $P_{W_\alpha} \hat{h}_{\gamma,r}$ ma postać (4.4.8), oraz znajdujemy zera K_α oraz L_α aby zweryfikować kiedy zbiór \mathcal{K} jest niepusty.

Pozostają jednak do rozważenia pewne przypadki, których nie obejmuje Twierdzenie 5. Zauważmy, że gdy $\alpha > 0$ oraz $1 < \gamma_r \leq 1 + \alpha$, to zgodnie z Lemma 1 pracy [A7], funkcja $\hat{h}_{\gamma,r}$ jest najpierw malejąca, później wypukła rosnąca, a więc nie spełnia założeń **(A1)**. Jej rzut $P\hat{h}_{\gamma,r}$ na stożek wypukły funkcji niemalejących w $L^2([0, d], w(x)dx)$ (por. (4.1.17)) wyznaczony jest metodą Morigutiego, tzn.

$$P\hat{h}_{\gamma,r}(u) = \begin{cases} \hat{h}_{\gamma,r}(\gamma), & \text{dla } 0 \leq u \leq \gamma, \\ \hat{h}_{\gamma,r}(u), & \text{dla } \gamma \leq u \leq d, \end{cases}$$

gdzie $\gamma = W_\alpha^{-1}(\delta)$, oraz δ jest jedynym rozwiązaniem równania $(1 - \delta) \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j} f_{\gamma,j}(\delta) = 1 - \delta f_{\gamma,r}(\delta)$. Dlatego, $P\hat{h}_{\gamma,r} \in \mathcal{C}_{\succ_c W_\alpha}$ oraz $P_{\succ_c W_\alpha} \hat{h}_{\gamma,r} = P\hat{h}_{\gamma,r}$. To implikuje dolne ujemne oszacowanie i warunki osiągnięcia równości opisane w Rozdziale 3.1 pracy [A1]. Ostatecznie, jeżeli $\gamma_r \leq 1$, to $\hat{h}_{\gamma,r}$ jest malejąca, więc $P_{\succ_c W_\alpha} \hat{h}_{\gamma,r}$ jest stały i otrzymujemy $\mathbb{E}X_\gamma^{(r)} \geq \mu$.

Wyniki zilustrowane zostały jednym ze szczególnych przypadków uogólnionych statystyk porządkowych, którym jest model statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych typu II, opisanych w Podrozdziale 4.1.2. Interesujące może być rozważenie czasu do awarii r -tego elementu jako estymatora średniej μ . Aby to zrobić, należy wyznaczyć zarówno górne jak i dolne oszacowania średnich standaryzowanych statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych typu II, w różnych przypadkach dystrybuanty wyjściowego rozkładu. W Table 1, 2, 3 z pracy [A1] przedstawiono numeryczne wyniki dla $N = 35$, $n = 7$ i trzech różnych schematów cenzurowania (por. [11]). Dolne i górne oszacowania przedstawione są razem z ich rozpiętościami, dla trzech szczególnych przypadków dystrybuanty F : ogólnej bez żadnych ograniczeń, o malejącej gęstości (DD) oraz o malejącej intensywności awarii (DFR). Nieco zaskakujące i jednocześnie interesujące okazało się to, że wyniki numeryczne są sprzeczne z intuicją, która sugeruje, że najlepsze przybliżenie średniej zapewni ten schemat cenzurowania, w którym obiekty są usuwane z eksperymentu jak najpóźniej.

4.4.3 Rodziny rozkładów DD oraz DFR

W niniejszym podrozdziale przedstawione są wyniki z prac [A5] oraz [A2] dotyczące optymalnych górnych niedodatnich oszacowań wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych (4.4.1) scentrowanych względem średniej z populacji, wyrażonych w jednostkach generowanych przez centralne momenty absolutne ustalonego rzędu, dla dwóch szczególnych przypadków bazowego rozkładu F : o malejącej gęstości oraz malejącej intensywności awarii. Oszacowania

te mogą być wyznaczone tylko dla pewnych przypadków uogólnionych statystyk porządkowych i stanowią pierwsze podejście do wyznaczania oszacowań dla uogólnionych statystyk pozycyjnych z ograniczonych rodzin rozkładów metodą maksymalizacji normy.

Praca [A5] stanowi uzupełnienie wyników Bieńka [9], który wyznaczył wszystkie górne nieujemne oszacowania dla (4.4.1) z $p = 2$ w przypadku rozkładów DD oraz DDA. Kolejna, [A2] jest kontynuacją studiów tego samego autora [6], gdzie omówiono górne nieujemne oszacowania dla (4.4.1) z $p = 2$ w przypadku rozkładów DFR oraz DFRA. W obu pracach Bieńka wykorzystana została metoda rzutowania, która jednak nie może być zastosowana w naszym przypadku. Naszym celem jest ulepszenie tych wyników dla szczególnych przypadków uogólnionych statystyk pozycyjnych, dla których otrzymano oszacowania zerowe, być może będące faktycznie ujemne. Ogólnie, znak górnych oszacowań wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych zależy od parametrów $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, oraz ograniczeń nałożonych na wyjściową dystrybuantę F . Jak wcześniej wspomniano, metoda rzutowania jest odpowiednia w przypadkach gdy skutkuje niestałymi rzutami (i dodatnimi górnymi oszacowaniami) odpowiednich funkcji gęstości $f_{\gamma,r}$, które zasadniczo zależą od ich kształtów. W przeciwnym przypadku procedura ta zwraca oszacowania zerowe i do uzyskania możliwie ujemnych oszacowań należy zastosować inną metodę, z czym mamy tu do czynienia.

Rozpoczynamy omówieniem wyników dla rozkładu DD, który jest szczególnym przypadkiem rodziny DFRA(α) (patrz (4.1.5)). Zerowe górne oszacowania dla (4.4.1) otrzymujemy wówczas, gdy gęstość $X_\gamma^{(r)}$ jest malejąca, tzn. dla $r = 1$ i $\gamma_r > 1$ lub gdy rzut skonstruowany przez Bieńka [9] w dalszej fazie okazał się być stały. Ten drugi przypadek zachodzi dla $r \geq 2$ oraz $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_r > 0$ takich, że $\gamma_r > 1$ lub $\gamma_r = 1$ i $\gamma_{r-1} > 2$, gdy $\pi_{1,r} \geq \frac{1}{2}$, gdzie $\pi_{j,r} = \prod_{i=j}^r \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}$, $1 \leq j \leq r$.

Pierwszy wynik dotyczący średnich uogólnionych statystyk porządkowych dany w jednostkach skali generowanych przez p -te centralne absolutne momenty dla $1 \leq p \leq \infty$ w przypadku rozkładów DD przedstawiono w Proposition 1 pracy [A5]. Zerowe oszacowania dla $r \geq 1$ oraz $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_r > 0$ takie, że $\gamma_r > 1$ lub $\gamma_r = 1$ i $\gamma_{r-1} > 2$ nie mogą być polepszone, jednakże podajemy dokładny opis rozkładów, dla których osiągana jest równość. Postępujemy analogicznie jak jest to opisane w Podrozdziale 4.1.4, rozważając wartość oczekiwaną (4.4.1) standaryzowanej r -tej uogólnionej statystyki porządkowej, dla $r = 1, \dots, n$, i przedstawiając ją w postaci następującej całki

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p} = \int_0^1 \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p} (f_{\gamma,r}(x) - 1) dx, \quad (4.4.9)$$

(por. (4.4.2), (4.4.4)). Rozważamy tu funkcjonały reprezentowane przez funkcje $h(x) = f_{\gamma,r}(x) - 1$, działające na funkcjach $g(x) = \frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p}$, będących elementami zmodyfikowanego (względem rozważanego w Podrozdziale 4.1.4) zbioru \mathcal{G}_p przestrzeni $L^p([0, 1], dx)$, które są niemalejące, spełniają (4.1.20) i są dodatkowo wypukłe. Warunek wypukłości wynika z ograniczeń nałożonych na rodzinę DD rozkładów wyjściowych i w konsekwencji na standaryzowaną funkcję

kwantylową g . Jak pokazano w [9], funkcjonal T_h jest niedodatni dla $r = 1$ oraz $\gamma_1 > 1$ lub $r \geq 2$ oraz $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_r > 0$ takich, że $\gamma_r > 1$ lub $\gamma_r = 1$ oraz $\gamma_{r-1} > 2$, dla $\pi_{1,r} \geq \frac{1}{2}$. Używając tego samego rozumowania jak to przedstawione w [39] twierdzimy, że można ograniczyć się do maksymalizacji normy na podzbiorze funkcji postaci

$$\tilde{g}_\alpha(x) = A(\alpha) + B(\alpha)(x - \alpha)\mathbf{1}_{[\alpha,1)}(x), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (4.4.10)$$

które są niemalejące i wklęsłe dla $B(\alpha) > 0$. Stosując warunek (4.1.20) do funkcji (4.4.10), otrzymujemy współczynniki $A(\alpha) < 0$ oraz $B(\alpha) > 0$. Następnie wyznaczamy p -tą normę (4.4.10) używając m.in. całek zawartych w [9] oraz minimalizując pewne szczególne wyrażenia i ostatecznie otrzymujemy wynik, który został przedstawiony w Proposition 1 pracy [A5], gdzie rozważono $p \neq 1$. Mimo, że zerowe oszacowanie w tym przypadku jest optymalne, podajemy również warunki równości, gdzie oszacowanie jest osiągnięte w granicy przez mieszaniny atomów i rozkładów jednostajnych.

Analogicznie udowadniamy wyniki dla pozostałego przypadku $p = 1$, gdy niedodatnie oszacowania wyrażone są w jednostkach skali generowanych przez średnie absolutne odchylenie od średniej, i są wyznaczone przez infimum pewnej konkretnej funkcji U_1 na przedziale jednostkowym. Równość jest osiągnięta (być może w granicy) przez mieszaniny atomów w lewym końcu nośnika oraz rozkładów jednostajnych. Wyniki te są przedstawione w Proposition 2 pracy [A5]. Oszacowania dla szczególnego przypadku pierwszej uogólnionej statystyki pozycyjnej przedstawiono w Corollary 1 pracy [A5]. Było to szczególnie interesujące, ponieważ gęstości w tej konfiguracji mogą być natychmiast przedstawione w przyjaznej formie, i takie są również wyniki. Mimo, że wniosek ten jest konsekwencją Proposition 2 pracy [A5], wymagał dogłębnej analizy szczególnej postaci funkcji U_1 oraz jej własności. Numeryczne wartości oszacowań średnich standaryzowanych pierwszych uogólnionych statystyk pozycyjnych dla rozkładów o malejącej gęstości przedstawiono w Table 1 pracy [A5]. Zauważmy, że dla małych wartości γ_1 , zbliżających się do 1, minimum funkcji U_1 jest osiągnięte blisko zera i oszacowanie jest delikatnie mniejsze od zera. Gdy γ_1 się zwiększa, minimum przesuwa się dalej od zera i oszacowanie zbliża się do $-\frac{1}{2}$, stabilizując swoją wartość dla γ_1 począwszy od 2.

Omówimy teraz wyniki dla rodziny rozkładów DFR, które przedstawiono w pracy [A2]. Bieniek (patrz Theorem 4.2, [6]) wyznaczył górne nieujemne oszacowania dla wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk pozycyjnych opartych na rozkładach DFR, rzutując złożenie $\hat{f}_{\gamma,r}$ gęstości jednostajnej uogólnionej statystyki porządkowej oraz dystrybuanty rozkładu wykładniczego na odpowiednio dobrany stożek wypukły. Dla $r \geq 1$ z $\varrho_{1,r} \leq 1$, gdzie $\varrho_{j,r} = \sum_{i=j}^r \frac{1}{\gamma_i}$, $1 \leq j \leq r$, otrzymał on oszacowania zerowe bez dokładnego opisu warunków równości. Naszym celem jest ulepszyć te oszacowania w pewnych szczególnych przypadkach.

Pierwszy wynik, zawarty w Proposition 2.1 pracy [A2] potwierdza, że dla $0 < \varrho_{1,r} < 1$ oszacowania rzeczywiście są ujemne. Jej dowód składa się z analizy przekształcenia kwantylowego r -tej uogólnionej statystyki porządkowej i przedstawienia go jako złożenia funkcji kwantylowej i dystrybuanty rozkładu wykładniczego.

Najbardziej ogólne wyniki dotyczące górnych ujemnych oszacowań dla (4.4.1) z $1 \leq p < \infty$ są przedstawione w Proposition 2.2 pracy [A2], i są wyznaczone przez infimum pewnej szczególnej funkcji B_p na półprostej dodatniej. Metoda wyznaczenia niedodatnich górnych oszacowań dla (4.4.1) jest analogiczna do metody wykorzystanej w przypadku rozkładów DD (patrz [A5] i [39], Theorem 2) i również jest oparta na metodzie maksymalizacji normy, jednakże teraz należy uwzględnić wagę v rozważając (4.4.9). W przypadku wyjściowej dystrybuanty F z malejącą intensywnością awarii zakładamy, że $F^{-1}V$ jest wypukła na $(0, \infty)$ oraz możemy wyrazić wartość oczekiwaną (4.4.1) uogólnionych statystyk porządkowych w terminach następującej całki

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p} = \int_0^\infty \frac{F^{-1}V(x) - \mu}{\sigma_p} (\hat{f}_{\gamma,r}(x) - 1) v(x) dx, \quad (4.4.11)$$

dla $1 \leq r \leq n$, definiując $\hat{f}_{\gamma,r}(x) = f_{\gamma,r}V(x)$ dla $0 < x < \infty$. Mamy teraz $T_h(g) = \int_0^\infty h(x)g(x)v(x)dx$ jako odpowiednik funkcjonału T_h rozważanego w Podrozdziale 4.1.4, reprezentowany przez $h(x) = \hat{f}_{\gamma,r}(x) - 1$, z $g(x) = (F^{-1}V(x) - \mu)/\sigma_p$. W tym przypadku podzbiór \mathcal{G}_p przestrzeni $L^p([0, \infty), v(x)dx)$, składa się z niemalejących i wypukłych funkcji całkowalnych do zera z jednostkową p -tą normą. Oczywiście, skoro F należy do rodziny rozkładów DFR, funkcje g są elementami \mathcal{G}_p . Zgodnie z wynikami Bieńka ([6], Theorem 4.2), dla naszego zestawu parametrów zakładamy, że $T_h(g) < 0$. Używając metody maksymalizacji normy, kontynuujemy przekształcenia skutkujące odpowiednim podzbiorem $\tilde{\mathcal{G}}_p$ i ostatecznie maksymalizujemy normę (4.1.22), ograniczając się do funkcji postaci

$$\tilde{g}_\alpha(x) = a(\alpha) + b(\alpha)(x - \alpha)\mathbf{1}_{[\alpha, \infty)}(x), \quad \alpha \in (0, \infty),$$

(por. (4.4.10)) ze współczynnikami $a(\alpha)$ i $b(\alpha)$ zgodnymi z odpowiednio zmodyfikowanymi warunkami (4.1.20). Ostatecznie

$$\sup \mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p} = \sup \{T_h(g), g \in \mathcal{G}_p\} = - \inf_{0 \leq \alpha < \infty} \frac{1}{\|\tilde{g}_\alpha\|_p},$$

i otrzymujemy oszacowanie przedstawione w Proposition 2.2 pracy [A2].

Zauważmy, że wyliczenie całek w wyrażeniu B_p z Proposition 2.2 pracy [A2] ogólnie nie jest proste, w szczególności dla niecałkowitych wartości p . Udało nam się jednak potwierdzić zerowe oszacowanie i określić warunki jego osiągnięcia dla szczególnego przypadku pierwszych uogólnionych statystyk pozycyjnych, tzn. dla $r = 1$ i dowolnie ustalonego $1 < p < \infty$. Wyniki te są przedstawione w Proposition 2.3 pracy [A2]. Równość jest osiągana możliwie w granicy, przez mieszanki atomów oraz przesuniętych rozkładów wykładniczych. Jak wcześniej wspomniano, pierwsza uogólniona statystyka pozycyjna ma rozkład identyczny jak minimum z n i.i.d. zmiennych losowych z dystrybuantą $1 - (1 - F(x))^{\gamma_1/n}$, która ma własność DFR. Dlatego też, znając oszacowania dla zwykłych statystyk pozycyjnych, otrzymujemy również oszacowania dla pierwszych uogólnionych statystyk pozycyjnych, używając odpowiedniego przekształcenia.

Zatem wyniki zawarte w Proposition 2.3 pracy [A2] odpowiadają wynikom Rychlika (patrz Theorem 1, [39]), który rozważał górne niedodatnie oszacowania dla statystyk pozycyjnych niskiego rzędu w tym samym modelu rodziny rozkładów DFR.

Szczególny przypadek oszacowań wyrażonych w jednostkach skali generowanych przez średnie absolutne odchylenie od średniej σ_1 , jest uwzględniony w odrębnym wniosku (Corollary 2.1, [A2]), który wynika z Proposition 2.2 tejże pracy. W szczególności, takie oszacowania dla pierwszej uogólnionej statystyki pozycyjnej są ściśle ujemne i przedstawiono je w Corollary 2.2 [A2]. Odpowiadające im numeryczne wartości oszacowań dla pewnych szczególnych przypadków parametrów γ_1 są zawarte w Table 1 pracy [A2]. Symulacje numeryczne pokazują, że dla rosnących wartości $1 < \gamma_1 < 2$, oszacowanie stopniowo maleje do $-1/2$ i ostatecznie stabilizuje swoją wartość poczynając od $\gamma_1 = 2$. Jest to zbieżne z wynikami [A8] (patrz Theorem 4) w ogólnym przypadku dowolnej dystrybuanty bazowej z $p = 1$.

4.4.4 Rodziny rozkładów DDA i DFRA

Wyniki przedstawione w niniejszym podrozdziale również dotyczą prac [A5] oraz [A2], w odniesieniu do innej rodziny rozkładów, generowanej przez porządek gwiazdzisty (patrz Podrozdział 4.1.2). Górne nieujemne oszacowania dla wartości oczekiwanych uogólnionych statystyk porządkowych (4.4.1) dla $p = 2$, pochodzących z rozkładów o malejącej uśrednionej gęstości (DDA) były najpierw rozważane w [9], podczas gdy analogiczny przypadek rodzin rozkładów DFRA omówiony został w pracy [6]. Jednak w niektórych przypadkach górne oszacowania dla (4.4.1) mogą być niedodatnie i na tym problemie się właśnie teraz skupimy.

Ogólna procedura, która umożliwia wyznaczenie górnych niedodatnich oszacowań dla średnich uogólnionych statystyk porządkowych opartych na dystrybuancie F z malejącą uśrednioną W -uogólnioną intensywnością awarii, gdzie W jest dowolną dystrybuantą z nieujemną funkcją gęstości w na $[0, d)$ z $0 < d \leq \infty$, przedstawiona jest w pracy [A5]. Stanowi ona modyfikację metody maksymalizacji normy opisanej w Podrozdziale 4.1.4 w odniesieniu do funkcji $h(x) = \tilde{h}(x) = f_{\gamma,r}W(x) - 1$ oraz $g(x) = \frac{F^{-1}W(x) - \mu}{\sigma_p}$ w przestrzeni $L^p([0, d), w(x)dx)$. Odpowiedni funkcjonal rozważony w (4.1.19) w naszym przypadku dany jest wzorem

$$\mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p} = \int_0^d \frac{F^{-1}W(x) - \mu}{\sigma_p} (f_{\gamma,r}W(x) - 1)w(x)dx, \quad (4.4.12)$$

(por. (4.4.9) i (4.4.11)). Przeprowadzając postępowanie zgodne z krokami metody maksymalizacji normy opisanej w Podrozdziale 4.1.4, przedstawiamy całki z (4.4.12) jako liniowe funkcjonały postaci $T_{\tilde{h}}(g) = \int_0^d \tilde{h}(x)g(x)w(x)dx$, gdzie $\tilde{h}(x) = f_{\gamma,r}W(x) - 1$, jest dowolnym elementem $L^p([0, d), w(x)dx)$, który dla danych γ oraz r całkuje się do zera, podobnie jak $g = (F^{-1}W(x) - \mu)/\sigma_p$ z $T_1(g) = 0$. Interesuje nas przypadek, gdy funkcje g są elementami ograniczonego i wypukłego podzbioru \mathcal{G}_p przestrzeni $L^p([0, d), w(x)dx)$, zawierającego funkcje

niemalejące i gwiazdziste, takie, że

$$T_{\tilde{h}}(g) < 0, \quad \tilde{h} \in \mathcal{H}.$$

Dalsza analiza prowadzi do odpowiednich przekształceń g oraz \mathcal{G}_p i ostatecznie umożliwia sformułowanie wyników następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6 ([A5], Proposition 3) *Niech $1 \leq p < \infty$ oraz W będzie ustaloną dystrybuantą z nieujemną gęstością w na $[0, d)$, $0 < d \leq \infty$. Ponadto, niech $X_\gamma^{(r)}$ będzie r -tą uogólnioną statystyką porządkową opartą na dystrybuancie F takiej, że $F \succ_* W$ oraz $T_{\tilde{h}}(g)$ jest ujemne. Mamy wówczas następujące oszacowanie*

$$\sup \mathbb{E} \frac{X_\gamma^{(r)} - \mu}{\sigma_p} = - \inf_{0 < \alpha < d} B_p(\alpha), \quad (4.4.13)$$

gdzie

$$B_p(\alpha) = \frac{1}{b_\alpha} \left[\left(\int_\alpha^d xw(x)dx \right)^p W(\alpha) + \int_\alpha^d \left| x - \int_\alpha^d xw(x)dx \right|^p w(x)dx \right]^{-1/p}, \quad (4.4.14)$$

$$b_\alpha = - \left[\int_\alpha^d x\tilde{h}(x)w(x)dx \right]^{-1}.$$

Równość w (4.4.13) osiągana jest przez rozkłady z dystrybuantą F_α taką, że

$$F_\alpha^{-1}W(x) = \begin{cases} a_\alpha B_p(\alpha)\sigma_p + \mu, & 0 < x < \alpha, \\ (a_\alpha + b_\alpha x)B_p(\alpha)\sigma_p + \mu, & \alpha < x < d. \end{cases} \quad (4.4.15)$$

gdzie α jest argumentem, dla którego osiągane jest infimum wyrażenia (4.4.14) zaś

$$a_\alpha = -b_\alpha \int_\alpha^d xw(x)dx.$$

Jeżeli infimum (4.4.14) jest osiągane w granicy, to równość również jest osiągana w granicy przez ciąg dystrybuant opisanych w (4.4.15).

Najpierw stosujemy Twierdzenie 6 dla rozkładów DDA, tzn. dla $W = U$, otrzymując wyniki, które są szczegółowo opisane w Rozdziale 2.2 pracy [A5]. Przykłady numeryczne dla pierwszych uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładów DDA z odpowiednio dobranym $\gamma_1 > 1$ nie są zaskakujące. Rozważono $\gamma_1 = 1.5, 2, 10, 100, 1000$, oraz $p = 1, 2$, gdy oszacowania są równe zero. Przepuszczalnie, możliwe niezerowe oszacowania mogą być osiągnięte dla uogólnionych statystyk porządkowych wyższych rzędów, z dużo bardziej skomplikowaną postacią funkcji gęstości $f_{\gamma,r}$.

Wyniki dla uogólnionych statystyk porządkowych opartych na rozkładach DFRA, przedstawione w Proposition 2.4 pracy [A2] stanowią natychmiastowe zastosowanie Twierdzenia 6, w przypadku gdy spełnione jest pewne szczególne założenie Theorem 4.3 pracy [6]. Obliczenia numeryczne pokazują, że dla pewnych przykładów (np. dla szczególnych konfiguracji statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych typu II), oszacowanie osiągnięte jest w granicy i również wynosi zero, ale w ogólnym przypadku pokazanie tego nie jest proste.

4.5 Wnioski

Osiągnięcia opisane w niniejszym autoreferacie stanowią wyniki dotyczące optymalnych oszacowań dla szczególnej postaci funkcyjałów statystycznych związanych z różnymi modelami uporządkowanych zmiennych losowych, takich jak zwykle statystyki porządkowe, ich przyrosty zwane spacjami, wartości rekordowe i wreszcie, uogólnione statystyki pozycyjne. Oprócz ogólnego przypadku rozważono wiele modeli nieparametrycznych rodzin macierzystych rozkładów zdefiniowanych w terminach porządków wypukłego oraz gwiazdźistego, takich jak rozkłady o rosnącej i malejącej gęstości bądź intensywności awarii, rosnącej i malejącej uogólnionej intensywności awarii, malejącej uśrednionej gęstości oraz intensywności awarii. Oprócz metody rzutowania, która jest powszechnie znana ale nie zawsze jest wystarczająco skuteczna, zastosowano również inne narzędzie nazywane metodą maksymalizacji normy, służące do wyznaczania górnych niedodatnich bądź dolnych nieujemnych oszacowań dla funkcyjałów statystycznych. Ostatecznie, osiągnięcie opisane w niniejszym autoreferacie w istotny sposób przyczynia się do rozwoju teorii uporządkowanych zmiennych losowych, dostarczając brakujące dolne i górne oszacowania w wielu ważnych przypadkach. Jest to szczególnie istotne w kontekście teorii niezawodności oraz badaniach medycznych i może mieć szeroki zakres zastosowań.

4.6 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, niewchodzące w skład ww. osiągnięcia stanowi 16 artykułów naukowych.

Prace opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora

- [B1] GORONCY, A. (2009), Lower bounds on positive L -statistics, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 38:12, 1989—2002.
- [B2] GORONCY, A., Rychlik, T., (2009), Lower bounds on spacings based on with-replacement model, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 38:12, 1982—1988.
- [B3] GORONCY, A., Rychlik, T., (2008), Lower bounds on expectations of positive L -statistics from without-replacement models, *J. Statist. Plann. Inference*, 138, 3647—3659.
- [B4] GORONCY, A., Rychlik, T., (2006), Lower bounds on expectations of positive L -statistics based on samples drawn with replacement, *Statistics*, 40, 389—408.
- [B5] GORONCY, A., Rychlik, T., (2006), How deviant can you be? The complete solution. *Math. Inequal. Appl.*, 9, 633—647.

Prace opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora

- [C1] Dembińska, A., GORONCY, A. (2020), Moments of order statistics from DNID discrete random variables with application in reliability, *J. Comput. Appl. Math.*, 371, 112703.
- [C2] Blumroeder, J.S., Burova, N., Winter, S., GORONCY, A., Hobson, P.R., Shegolev, A., Dobrynin, D., Amosova, I., Ilina, O., Parinova, T., Volkov, A., Graebener, U.F., Ibisch, P.L. (2019): Ecological effects of clearcutting practices in a boreal forest (Arkhangelsk Region, Russian Federation) both with and without FSC certification, *Ecol. Indic.* 106, 105461—1—16.
- [C3] Łaszewska, K., GORONCY, A., Weber, P., Pracki, T., Tafil-Klawe, M., Pracka, D., Złomańczuk, P. (2018). Daytime acute non-visual alerting response in brain activity occurs as a result of short- and long-wavelengths of light. *J. Psychophysiol.*, 32:4, 202—226.
- [C4] Łaszewska K., Pracki T., Weber, P., GORONCY, A., Tafil-Klawe M., Złomańczuk P., Pracka D., (2018), Influence of the spectral quality of light on daytime alertness levels in humans, *Adv. Cogn. Psychol.*, 14:4 192—208.
- [C5] Dembińska, A., GORONCY, A., (2018), On moments of discrete order statistics with applications in reliability. W: *18th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPs '18): Workshop on Branching Processes and Applications; Workshop on Biostatistics; Seminar on Statistical Data Analysis, Pomorie, Bulgaria, 25-30 June 2018: conference proceedings and abstracts*, ed. by E. Stoimenova and M. Slavtchova-Bojkova, 32—35.
- [C6] GORONCY, A., Rychlik, T., (2015), Bounds on the expected differences of consecutive order statistics based on the increasing failure rate samples. W: *The Ninth International Conference on Mathematical Methods in Reliability, Tokyo, Japan, on June 1 – 4, 2015*, 1—6.
- [C7] GORONCY, A., Rychlik, T., (2013), Optimal bounds on expectations of order statistics based on increasing density and failure rate samples. W: *The 8th International Conference on Mathematical Methods In Reliability: Theory Methods and Applications, 1-4 July 2013, Proceedings* (N. Balakrishnan, M. Finkelstein, T. de Wet, red.), Stellenbosch, South Africa, 259—262.
- [C8] GORONCY, A., Kamps, U. (2013), Random convex combinations of m -generalized order statistics, *Comm. Statist.-Theory Meth.*, 42:17, 3076—3084.
- [C9] GORONCY, A., Kamps, U. (2012), Relations for m -generalized order statistics via an Opial-type inequality. *J. Statist. Plann. Inference*, 142, 1457—1463.

- [C10] GORONCY, A. (2012), Bounds for linear functionals on monotone functions in L^p -spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 15, 107—116.
- [C11] GORONCY, A., Rychlik, T., (2011), Lower bounds on the expectations of upper record values. *J. Statist. Plann. Inference*, 141, 2726—2737.

Streszczenie

Moje pozostałe osiągnięcia po uzyskaniu stopnia doktora koncentrują się wokół statystycznej i probabilistycznej teorii uporządkowanych zmiennych losowych ([C1], [C5], [C6], [C7], [C8], [C9], [C10], [C11]) oraz zastosowań statystyki w innych dziedzinach nauki, takich jak psychologia poznawcza ([C3], [C4]) i ekologia ([C2]).

Prace [C1] oraz [C5] skupiają się na przypadku statystyk pozycyjnych pochodzących z dowolnie zależnych i niekoniecznie o jednakowym rozkładzie, dyskretnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n , dla których przedstawiono metody otrzymywania momentów. Podano ogólny wzór (patrz [C1], Theorem 2.1) na momenty dowolnie ustalonych rzędów pojedynczych statystyk pozycyjnych z dyskretnych populacji przy prostym założeniu, że X_i przyjmują wartości w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych. Teoretycznie wyniki te mogą być użyte dla dowolnego rozkładu brzegowego X_i (z nośnikami zawierającym tylko nieujemne liczby całkowite) i dla dowolnej struktury zależności między nimi. Jednak w praktyce wzory te działają dobrze tylko wtedy, gdy nośniki rozkładów są skończone (wyniki zilustrowano przykładem numerycznym dla rozkładu wielomianowego). Problem powstaje, gdy chcemy zastosować Theorem 2.1 pracy [C1] do wyliczenia momentów statystyk pozycyjnych powstałych ze zmiennych o nieskończonych nośnikach, dlatego proponujemy dwa rozwiązania tego problemu. Pierwsze to metoda obcinania, prowadząca do przybliżonych wartości momentów, natomiast drugie dotyczy szczególnego przypadku wielowymiarowego rozkładu geometrycznego (MVG). Dokładną postać wzorów na przybliżenia dla pewnych szczególnych jednowymiarowych rozkładów brzegowych, tj. Poissona i ujemnego dwumianowego, które umożliwiają komputerowe wyliczenie przybliżonych wartości momentów zwykłych dla tych rodzin rozkładów podajemy w Corollary 2.1 i 2.2 pracy [C1]. Następnie w Section 3 pracy [C1] podajemy wzory wygodne do obliczeń numerycznych dla dokładnych wartości momentów statystyk pozycyjnych opartych na wektorach o rozkładzie MVG, przedstawiając również jego dokładną definicję, interpretację niezawodnościową i przydatne własności (patrz Theorem 3.1 pracy [C1]), które są wykorzystywane później do uzyskania wzorów na momenty silni statystyk pozycyjnych opartych na rozkładach MVG ([C1], Theorem 3.3). Przedstawiamy również numeryczne wartości dla średnich i wariancji statystyk każdego rzędu dla prób z rozkładu MVG, które są odpowiednio niewymienialne i wymienialne ([C1], Table 6 i 7). Otrzymane wyniki stosujemy w teorii niezawodności przedstawiając wzory, które są przydatne do numerycznych oszacowań momentów czasów życia systemów koherentnych pracujących w dyskretnych cyklach, złożonych z heterogenicznych i niekoniecznie niezależnie pracujących komponentów ([C1], Section 4). Podajemy również przykłady ilustrujące wartości

oczekiwane i wariancje czasów życia szczególnych systemów niezawodnościowych, m.in. systemu mostkowego przedstawionego na Rysunku 1.

Praca [C9] dotyczy nierówności typu Opiala, która jest uogólnieniem oryginalnego wyniku Opiala [31] i jej zastosowania do uzyskania relacji dla wartości oczekiwanych funkcji m -uogólnionych statystyk porządkowych, ich dystrybuant i funkcji generujących momenty. Model m -uogólnionych statystyk pozycyjnych jest równoważny modelowi uogólnionych statystyk porządkowych zdefiniowanych w Podrozdziale 4.1.2, gdzie parametry modelu są odpowiednio zmodyfikowane poprzez powiązanie wektora γ z parametrem m . Najpierw używamy nierówności typu Opiala aby uzyskać nierówności pomiędzy wartościami oczekiwanymi pewnych funkcji m -uogólnionych statystyk porządkowych (patrz [C9], Theorem 2). Wynik ten, zastosowany do szczególnych przypadków m -uogólnionych statystyk porządkowych, tj. zwykłych statystyk pozycyjnych i k -tych rekordów, przedstawiony jest w Corollary 1 oraz 2 pracy [C9], wraz z towarzyszącymi im przykładami. Rozważając różne postaci funkcji, podajemy nierówności między momentami, momentami odwróconymi (ujemnymi) oraz funkcjami generującymi momenty m -uogólnionych statystyk porządkowych. Są one przedstawione odpowiednio w Corollary 4, 5 oraz 6 pracy [C9].

W artykule [C8] rozważamy losowe kombinacje wypukłe m -uogólnionych statystyk pozycyjnych. Pokazujemy najpierw, że dowolne m -uogólnione statystyki porządkowe oparte na uogólnionych rozkładach Pareto $G_{m,a,b}$ z parametrem położenia a oraz skali $b - a$ (jego standaryzowana wersja dana jest wzorem (4.1.3), dla m odpowiadającemu α) mogą być przedstawione jako losowe kombinacje wypukłe swoich sąsiadów, gdzie rozkład wag kombinacji nie zależy od m (patrz [C8], Theorem 2.1). Następnie, bazując na otrzymanych losowych kombinacjach wypukłych m -uogólnionych statystyk porządkowych, otrzymujemy charakteryzację rozkładu GPD (patrz [C8], Theorem 2.2 i 2.3).

Praca [C10] jest uogólnieniem wyników [37] i dotyczy przestrzeni $L^p([a, b], dx)$, $1 \leq p \leq \infty$ funkcji określonych na dowolnych skończonych przedziałach, całkownych w p -tej potędze. Prezentujemy w niej ostre oszacowania ciągłych liniowych funkcjonałów przy pewnych szczególnych założeniach, podając również warunki osiągnięcia równości. Ograniczenia te zakładają, że rozważane funkcjonały są niemalejące, całkowne do zera, o normie jednostkowej. Najpierw przedstawiamy dodatnie górne oszacowania na funkcjonały przy użyciu nierówności Morigutiego i Höldera (patrz [C10], Theorem 2, 3 oraz 4), następnie rozważamy oszacowania górne niedodatnie (patrz [C10], Theorem 5, 6 oraz 7). Wskazujemy również probabilistyczne i statystyczne interpretacje takich funkcjonałów oraz ważność ich oszacowań. W rzeczywistości, te ostatnie wyniki wspomniane również w Podrozdziale 4.1.4, były punktem wyjścia do dalszych rozważań i pozwoliły rozszerzyć zakres moich zainteresowań ze statystyk pozycyjnych i ich liniowych kombinacji na inne ciekawe modele uporządkowanych zmiennych losowych. W istocie, mimo, że opublikowane wcześniej, podajemy uproszczoną wersję Theorem 6 z pracy [C10] w Theorem 1 pracy [C11], gdzie wyznaczono optymalne dolne oszacowania dla średnich k -tych rekordów pochodzących z nieskończonych ciągów i.i.d. absolutnie ciągłych zmiennych losowych.

Oszacowania te wyrażone są w jednostkach generowanych przez centralne absolutne momenty różnych rzędów. Oszacowania dla klasycznych rekordów ($k=1$), które są nieujemne, otrzymano przy użyciu metody maksymalizacji normy, opisaney w Podrozdziale 4.1.4 i Twierdzeniu 2. Udowadniamy również odpowiednik Theorem 1 z pracy [C11] dla $p = 1$ przy słabszych założeniach i otrzymujemy dolne optymalne oszacowania dla wartości oczekiwanych rekordów mierzone w średnich absolutnych odchyleniach od średniej σ_1 , które są ściśle dodatnie (patrz [C11], Theorem 4). Dolne oszacowania dla innych k -tych rekordów z $k \geq 2$ są niedodatnie i przedstawiono je w Theorem 6, 7 oraz 8 pracy [C11]. Omawiamy również dolne oszacowania dla średnich k -tych przyrostów rekordowych $\mathbb{E}(R_n^{(k)} - R_m^{(k)})$, $1 \leq m < n$, ostatecznie ilustrując wyniki przykładami numerycznymi.

Prace [C7] oraz [C6] były prezentowane na dwóch konferencjach i dotyczą optymalnych oszacowań wartości oczekiwanych zwykłych statystyk pozycyjnych i ich różnic pochodzących z rozkładów z rosnącą gęstością i intensywnością awarii, które omówiono w Podrozdziale 4.2.1.

Wyniki przedstawione w [C3] oraz [C4] dotyczą analizy danych w psychologii i kognitywistyce. W pracy [C3] analizowano wpływ ekspozycji na światło na zdrowie człowieka, a dokładniej, przeprowadzono badania nad wzrostem obiektywnych i subiektywnych pomiarów czujności (takich jak wyniki EEG, zachowania poznawcze oraz subiektywna senność) pod wpływem ekspozycji na światło czerwone w ciągu dnia. W badaniu występowały trzy warunki oświetleniowe: słabe światło (ciemność), światło niebieskie i światło czerwone. Z kolei w pracy [C4] zastosowano trzy psychomotoryczne testy poznawcze do pomiaru wydajności w określonych warunkach oświetleniowych: Prosty Czas Reakcji (SRT), N-back (wersja 1-back) oraz Ciągły Test Wydajności II (CPT II). Mój wkład pracy w powstanie obu publikacji był skoncentrowany na pełnej statystycznej analizie danych, włączając w to eksploracyjną analizę danych, wstępne przygotowanie danych do analizy i odpowiednie ich przekształcenia. Analiza polegała głównie na wykonaniu testów trzyczynnikowej analizy wariancji z powtarzanymi pomiarami dla gęstości mocy częstotliwości EEG fal theta i alpha, w celu zbadania efektów interakcji pomiędzy światłem (niebieskie, czerwone i ciemność), odprowadzeniami (Cz, Pz, Fz i Oz) oraz fazą badania (1-5), z uwzględnieniem testów post-hoc i dalszych analiz. Praca ta została wykonana w środowisku R oraz oprogramowaniu IBM SPSS Statistics.

Publikacja [C2] dotyczy biostatystycznej analizy danych ekologicznych dostarczonych przez World Wide Fund for Nature (WWF Deutschland). Forest Stewardship Council (FSC) jest powszechnie uznawanym standardem certyfikacji odpowiedzialnym za zarządzanie lasami we wszystkich głównych biomach leśnych. Badania skoncentrowane były na systematycznych obserwacjach, przeprowadzonych w celu oceny efektywności ekologicznej FSC w lasach borealnych Obwodu Archangielskiego w Rosji. Moje obowiązki polegały na dobraniu i przeprowadzeniu odpowiednich analiz statystycznych dla zmiennej wyjaśnianej opisującej stan certyfikacji FSC mierzonej na trzech poziomach. Najpierw przeprowadzona została eksploracyjna analiza danych, następnie analiza składowych głównych (PCA) w celu wyznaczenia zmiennych silnie skorelowanych i wizualizacji struktury zbioru danych. Następnie wykonano analizę z użyciem metody

lasów losowych, aby wyznaczyć te zmienne objaśniające, które najbardziej wpływają i pozwalają w największym stopniu na rozróżnienie zmiennej wyjaśnianej w trzech badanych obszarach. To wielowymiarowe podejście jest zwykle stosowane w zagadnieniach klasyfikacji i problemach regresji, a jego główną przewagą nad innymi metodami uczenia maszynowego jest wysoka trafność, umiejętność radzenia sobie z wysoce skorelowanymi zmiennymi oraz zdolność identyfikacji najważniejszych zmiennych objaśniających. Użyto tu także podejścia opisanego w pracy [24] do rozróżnienia predyktorów ważnych od nieistotnych. W pierwszym kroku tej analizy została wyznaczona miara ważności zmiennych z oryginalnego zbioru danych. Każda zmienna była wielokrotnie permutowana w celu oceny rozkładu empirycznego miary jej ważności przy hipotezie zerowej zakładającej niezależność między tą właśnie zmienną, zmienną wyjaśnianą oraz pozostałymi predyktorami. Dla każdej zmiennej wyznaczono p -wartość i zmienne, których p -wartości nie przekroczyły pewnego progu zostały wybrane z użyciem poprawki Bonferroniego na wielokrotne porównania. W drugim etapie zbudowany został ostateczny las losowy, oparty tylko na predyktorach wybranych w pierwszym kroku jako potencjalnie istotnych. Po zakończeniu procedury wyznaczono końcową ważność wybranych zmiennych. W analizie wykorzystano również procedury analizy wariancji, które posłużyły do ustalenia, czy istnieją statystycznie istotne różnice między miarami tendencji centralnej poszczególnych zmiennych objaśniających w różnych klasach zmiennej objaśnianej. Wszystkie analizy wykonano w środowisku obliczeń statystycznych R.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

1. Stypendium badawcze *postdoc*

Stypendium badawcze *postdoc* zostało mi przyznane przez Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) w roku 2010, realizowane było w Institute of Statistics, RWTH Aachen, Niemcy, pod kierunkiem prof. Udo Kamps, prekursora idei uogólnionych statystyk pozycyjnych. Tematyka badań dotyczyła oszacowań dla uogólnionych statystyk pozycyjnych: *Bounds on generalized order statistics*. Stypendium realizowane było w okresie 01.09.2010 – 31.01.2011. W wyniku współpracy z prof. Udo Kampsem powstały dwie publikacje naukowe ([C8], [C9]).

2. Współpraca z prof. dr hab. Tomaszem Rychlikiem (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk), dziesięć wspólnych publikacji naukowych ([A4], [A6], [A7], [C6], [C7], [C11], [B2], [B3], [B4], [B5]).

3. Współpraca z dr. hab. Mariuszem Bieńkiem, prof. UMCS (Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin), jedna wspólna publikacja naukowa ([A1]).
4. Współpraca z dr. hab. Anną Dembińską, prof. PW (Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska), dwie wspólne publikacje naukowe ([C1], [C5]).
5. Współpraca z prof. Susanne Winter (WWF Deutschland, Niemcy) oraz mgr Jeanette Blumröder (Centre for Econics and Ecosystem Management, Eberswalde University for Sustainable Development, Niemcy) w zakresie statystycznej analizy danych w ekologii, jedna wspólna publikacja naukowa ([C2]).

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

6.1 Działalność dydaktyczna

- Prowadząca seminarium inżynierskie dla 6 studentów 3 roku matematyki stosowanej (od semestru letniego 2020 r.) oraz seminarium dyplomowe dla 3 roku matematyki i ekonomii (promotor 9 prac licencjackich w 2013 r. oraz 8 prac licencjackich w 2015 r.) na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.
- Prowadząca zajęcia dydaktyczne na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, m.in. ze statystyki matematycznej, eksploracji danych i jej narzędzi, baz danych, rachunku prawdopodobieństwa, matematyki komputerowej, projektowania stron www, w formie ćwiczeń i zajęć laboratoryjnych, dla studentów studiów stacjonarnych i niestacjonarnych z informatyki, matematyki, matematyki i ekonomii, matematyki stosowanej i bezpieczeństwa narodowego. Niektóre zajęcia były realizowane częściowo zdalnie, z wykorzystaniem nowoczesnych metod nauczania, m.in. platformy obsługi nauki Moodle, PLATON oraz MS Teams. Narzędzia wykorzystywane do pracy w laboratoriach komputerowych: środowisko R, KNIME oraz oprogramowanie PS IMAGO (IBM SPSS Statistics) na zajęciach akredytowanych przez firmę Predictive Solutions Sp. z o.o. (certyfikaty akredytacji nr AKR002/W5/09_2013, AKR002/W6/09_2014, AKR002/W7/09_2015, AKR076/W1/02_2019), IBM SPSS Modeler, a także narzędzia bazodanowe ORACLE (Oracle SQL Developer i Data Modeler).
- Współautorka kursu zdalnego *Podstawy PS IMAGO PRO* organizowanego we współpracy z firmą Predictive Solutions Sp. z o.o., kwiecień-maj 2020 r.
- Koordynator i prowadząca kurs *Statystyka i eksploracja danych* dla pracowników Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu w ramach projektu unijnego *KADRA - Podniesienie kompetencji kadry dydaktycznej UMK*, maj, lipiec 2018 r.

- Współprowadząca szkolenie „Analiza klienta” dla studentów Wydziału Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu w ramach projektu unijnego *KLUCZ - Rozwój kluczowych kompetencji studentów kierunków ścisłych i technicznych Uniwersytetu Mikołaja Kopernika dla potrzeb gospodarki, społeczeństwa i rynku pracy*, maj 2017 r.

6.2 Działalność organizacyjna

- Członkini Rady Dyscypliny Matematyka, Wydział Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, od października 2019 r.
- Członkini jury konkursu dla młodych statystyków organizowanego podczas XLV Konferencji „Statystyka Matematyczna”, 2-6 grudnia 2019 r.
- Członkini Komitetu Organizacyjnego spotkania grupy badawczej *Ordered Statistical Data (OSD 2019) meeting*, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie, 13-17 maja 2019 r.
- Członkini Komitetu Organizacyjnego *XLIV Konferencji Statystyka Matematyczna (XLIV Conference on Mathematical Statistics)*, 3-7 grudnia 2018 r., Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie.
- Zapraszająca gości na Wydział Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu: Nikolay N. Nikolov, Bułgarska Akademia Nauk, Sofia, listopad 2018 r.
- Organizator sesji specjalnej *Ordered Statistics* na konferencji *International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LinStat'2018)*, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie, 20-24 sierpnia 2018 r.
- Udział w pracach nad tworzeniem nowego kierunku studiów: matematyka stosowana na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK, 2016 r.
- Członkini Komitetu Organizacyjnego *11th International Conference on Ordered Statistical Data (OSD 2014)*, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie, 2-6 czerwca 2014 r.
- Prowadząca sesje (chair):
 - *Models for Ordered Data I, First German-Polish Joint Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 6-9 czerwca 2013 r.
 - *Ordered Statistics I, International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LinStat'2018)*, Matematyczne Centrum Konferencyjno-Badawcze IM PAN w Będlewie, 20-24 sierpnia 2018 r.

- Opiekun I roku matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu w latach 2011/2012, 2012/2013.

6.3 Działalność popularyzująca naukę

- Toruński Festiwal Nauki i Sztuki (TFNiS):
 - współorganizacja warsztatów pt. „Jeden obraz wart więcej niż tysiąc liczb”, 25-26 kwietnia 2019 r.
 - współorganizacja imprezy pt. „Matematyczne hydrozagadki”, 22-23 kwietnia 2017 r.
 - współorganizacja warsztatów dla dzieci ze szkoły podstawowej i uczniów gimnazjum pt. „Dylematy toruńskiego flisaka”, 24-25 kwietnia 2017 r.
 - współorganizacja imprezy pt. „Kości zostały rzucone, czyli Rodzinne Mistrzostwa w Grze w Kości (i nie tylko)”, 16-17 kwietnia 2011 r.
- Zajęcia dla gimnazjalistów pt. „Pozyskiwanie wiedzy z danych”, realizowane w ramach projektu *Region Nauk Ścisłych*, październik 2014 r. - maj 2015 r.
- Warsztaty pt. „O krzywych w matematyce” dla stypendystów Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci: wykład pt. „Krzywe gęstości prawdopodobieństwa”, 2-4 grudnia 2011 r.
- Wykłady w ramach Regionalnego Koła Matematycznego w I Liceum Ogólnokształcącym w Świeciu: listopad 2009 r., maj 2010 r.

7 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i inna działalność

7.1 Granty i projekty badawcze

1. Grant Narodowego Centrum Nauki nr 2015/19/B/ST1/03100 (Opus 10) pt. *Uporządkowane zmienne losowe stosowane w statystyce i teorii niezawodności* - wykonawca, kierownik: prof. dr hab. Tomasz Rychlik, 10 czerwca 2016 r. – 9 lipca 2019 r.
2. Projekt badawczy pt. *Biostatistical Analysis of data from the forest in the Oblast Arkhangelsk in Russia (FSC impact study)* nr 21240951, realizowany dla WWF Deutschland (Berlin, Niemcy) - główny wykonawca, 2018 r.
3. Grant Narodowego Centrum Nauki nr 2011/01/D/ST1/04172 (Sonata 1) pt. *Oszacowania wartości oczekiwanych uporządkowanych zmiennych losowych* - kierownik, 1 grudnia 2011 r. – 30 listopada 2015 r.

4. Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, grant nr 400-M pt. *Wykorzystanie narzędzi informatycznych do uzyskania optymalnych oszacowań funkcjonalów statystycznych* - główny wykonawca, marzec 2010 r. – grudzień 2010 r.
5. Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, grant promotorski nr N201 044 31/3695 pt. *Oszacowania dolne dodatnich funkcjonalów statystycznych* - główny wykonawca, kierownik: prof. dr hab. Tomasz Rychlik, 2006 r. – 2007 r.

7.2 Nagrody i wyróżnienia

- Jednorazowe stypendium Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za wysoko punktowaną publikację naukową: *Ecological effects of clearcutting practices in a boreal forest (Arkhangelsk Region, Russian Federation) both with and without FSC certification*, *Ecol. Indic.*, 106, 105461-1-16 (2019 r.).
- Indywidualne wyróżnienie Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia uzyskane w dziedzinie naukowo - badawczej w 2018 roku.
- Laureatka konkursu na najlepsze dydaktyczne materiały autorskie w ramach projektu *Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK* – przygotowano kurs zdalny do ćwiczeń laboratoryjnych z przedmiotu „Statystyka matematyczna” dla studentów 1 roku studiów II stopnia z matematyki, sp. zastosowania. Materiały te zostały zaprezentowane na otwartym seminarium *Wzmacnianie potencjału dydaktycznego UMK: Jak usprawnić pracę ze studentem korzystając z nowoczesnych technologii informacyjno-komunikacyjnych?* (21 grudnia 2011 r.).

7.3 Inna działalność

- Poza referatami przedstawionymi na konferencjach, umieszczonymi w *Wykazie osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny*, wygłosiłam również 18 referatów na seminariach Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu (w latach 2007-2020) oraz 2 referaty na seminarium *Statystyka matematyczna i inne zastosowania probabilistyczne*, IM PAN w Warszawie (w 2012 r. i 2018 r.) oraz uczestniczyłam w innych 6 spotkaniach naukowych i konferencjach bez wygłaszania referatu.
- Kursy i szkolenia
 - Ukończony kurs rozszerzony z metod nowoczesnego nauczania i kurs specjalistyczny animacji komputerowych (Adobe Flash) w ramach projektu *WZROST - Nowoczesne Metody Nauczania (NMN)* organizowany przez Regionalne Studium Edukacji Informatycznej WMiI UMK w Toruniu, czerwiec 2011 r.

- Udział w VI edycji *Zimowych Warsztatów Analitycznych SPSS* na temat *Identyfikacja czynników ryzyka — metody klasyfikacji oraz modele zależności*, 8-9 lutego 2010 r.
- Ukończone czterosemestralne Studium Pedagogiczne na UMK w Toruniu - uzyskane kwalifikacje pedagogiczne, 2003 r.

Literatura

- [1] Arnold, B.C. (1985), p -Norm bounds on the expectation of the maximum of possibly dependent sample. *J. Multivariate Anal.* **17**, 316—332.
- [2] Arnold, B.C., Balakrishnan (1989), *Relations, Bounds and Approximations for Order Statistics*. Lecture Notes in Statistics **53**, Springer-Verlag, New York.
- [3] Barlow, R.E., Proschan, F. (1966), Inequalities for linear combinations of order statistics from restricted families, *Ann. Math. Statist.* **37**:1574—1591.
- [4] Barlow, R.E., Marshall, A.W., Proschan, F. (1969), Some inequalities for starshaped and convex functions. *Pacific J. Math* **29**, 19—42.
- [5] Barlow, R.E., van Zwet, W.R. (1970), Asymptotic properties of isotonic estimators for the generalized failure rate function. I. Strong consistency, In: *Nonparametric techniques in statistical inference* (Proc. Sympos., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969). Cambridge University Press, London, pp 159—176.
- [6] Bieniek, M. (2006), Projection bounds on expectations of generalized order statistics from DFR and DFRA families. *Statistics* **40**, 339—352.
- [7] Bieniek, M. (2007), Projection mean-variance bounds on expectations of k th record values from restricted families, *Comm. Statist. Theory Methods*, **36**:679—692.
- [8] Bieniek, M. (2007), Variation diminishing property of densities of uniform generalized order statistics, *Metrika* **65**, 297—309.
- [9] Bieniek, M. (2008), Projection bounds on expectations of generalized order statistics from DD and DDA families. *J. Statist. Plann. Inference* **138**, 971—981.
- [10] Bieniek, M. (2008), On families of distributions for which optimal bounds on expectations of GOS can be derived, *Commun. Stat. Theory Methods*, **37**:1997—2009.
- [11] Bieniek, M. (2016), Sharp bounds for the bias of trimmed means of progressively censored order statistics, *Probab. Math. Statist.* **36**:1, 99—112.

- [12] Bieniek, M., Szpak, M. (2018), Sharp bounds for the mean of the total time on test for distributions with increasing generalized failure rate, *Statistics* **52**:818—828.
- [13] Boyd, A.V. (1971), Bounds for order statistics, *Publ. of the Electrotechnical Faculty of Belgrade Univ., Math. Phys. Series* **365**, 31—32.
- [14] Chandler, K.N. (1952), The distribution and frequency of record values, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B* **14**, 220—228.
- [15] Cramer, E., Kamps, U. (2003), Marginal distributions of sequential and generalized order statistics. *Metrika*, **58**:293—310.
- [16] Cramer, E., Kamps, U., Rychlik, T. (2002), Evaluations of expected generalized order statistics in various scale units. *Appl. Math. (Warsaw)* **29**, 285—295.
- [17] Danielak, K. (2003), Sharp upper bounds on trimmed means from restricted families. *Statistics* **37**, 305—324.
- [18] Danielak, K., Rychlik, T. (2003), Sharp bounds for expectations of spacings from DDA and DFRA families. *Statist. Probab. Lett.* **65**, 303—316.
- [19] Danielak, K., Rychlik, T. (2004), Sharp bounds for expectations of spacings from decreasing density and failure rate families. *Appl. Math. (Warsaw)* **31**, 369—395.
- [20] Dziubdziela, W., Kopociński, B. (1976), Limiting properties of the k th record values, *Zastos. Mat.* **15**, 187—190.
- [21] Gajek, L., Rychlik, T. (1996), Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. I. Dependent case. *J. Multivariate Anal.* **57**, 156—174.
- [22] Gajek, L., Rychlik, T. (1998), Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. II. Independent case. *J. Multivariate Anal.* **64**, 156—182.
- [23] Gumbel, E.J. (1954), The maxima of the mean largest value and of the range. *Ann. Math. Statist.* **25**, 76—84.
- [24] Hapfelmeier, A., Ulm, K., (2013), A new variable selection approach using Random Forests, *Comput. Stat. Data Anal.* **60**, 50—69.
- [25] Hartley, H.O., David, H.A. (1954), Universal bounds for mean range and extreme observation. *Ann. Math. Statist.* **25**, 85—99.
- [26] Hawkins, D.M. (1971), On the bounds of the range of order statistics, *J. Amer. Statist. Assoc* **66**, 644—645.

- [27] Kamps, U. (1995), *A Concept of Generalized Order Statistics*, Teubner, Stuttgart.
- [28] Kamps, U. (1995), A concept of generalized order statistics, *J. Statist. Plann. Inference* **48**:1—23.
- [29] Marshall, A.W., I. Olkin (1979), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York.
- [30] Moriguti, S. (1953), A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions. *Ann. Math. Statist.* **24**, 107—113.
- [31] Opial, Z. (1960), Sur une inégalité, *Annales Polonici Mathematici* **8**, 29—32.
- [32] Plackett, R. L. (1947), Limits of the ratio of mean range to standard deviation, *Biometrika* **34**, 120—122.
- [33] Raqab, M. Z. (1997), Bounds based on the greatest convex minorants for moments of record values, *Statist. Probab. Lett.* **36**, 35—41.
- [34] Rychlik, T. (1998), Bounds for expectations of L -estimates. In: *Order Statistics: Theory & Methods* (N. Balakrishnan, and C.R. Rao, eds.). Handbook of Statistics, vol. **16**. North-Holland, Amsterdam, pp. 105—145.
- [35] Rychlik, T. (2001), *Projecting Statistical Functionals*. Lecture Notes in Statistics, vol. **160**, Springer-Verlag, New York.
- [36] Rychlik, T. (2002), Optimal mean-variance bounds on order statistics from families determined by star ordering. *Appl. Math. (Warsaw)* **29**, 15—32.
- [37] Rychlik, T. (2007), Optimal bounds for linear functionals on monotone functions, *Math. Inequal. Appl.*, **10**, 299—310. Correction: *Math. Inequal. Appl.*, 10 (2007), 711.
- [38] Rychlik, T. (2009), Bounds on expectations of small order statistics from decreasing density populations, *Metrika* **70**, 369—381.
- [39] Rychlik, T. (2009), Non-positive upper bounds on expectations of low rank order statistics from DFR populations, *Statistics* **43**, 53—63.
- [40] Rychlik, T. (2014), Maximal expectations of extreme order statistics from increasing density and failure rate populations. *Commun. Statist. — Theory Meth.* **43**, 2199—2213.
- [41] Rychlik, T. (2014), Non-positive upper bounds on expectations of small order statistics from DDA and DFRA populations. *Metrika* **77**, 539—557.
- [42] van Zwet, W.R. (1964), *Convex Transformations of Random Variables*, Math. Centre Tracts 7, Mathematisch Centrum, Amsterdam.