INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

dr hab. Jonatan Gutman, prof. IM PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel. +48 788 830 967, email: gutman@impan.pl
https://www.impan.pl/~gutman/

Warszawa, 20 lipca 2022 r.

Recenzja w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego
dr Adama Kanigowskiego

Dr Adam Kanigowski uzyskał stopień doktora w 2015 r. w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk na podstawie rozprawy doktorskiej pt. „Własności ergodyczne gładkich potoków na powierzchniach" napisanej pod kierunkiem prof. dr hab. Mariusza Lemańczyka. Od 2018 r. Habilitant pracuje na Uniwersytecie w Marylandzie (UMD), najpierw jako adiunkt a od 2021 r. jako profesor nadzwyczajny. Jest On autorem 30 opublikowanych prac dotyczących teorii ergodycznej, w szczególności dynamiki gładkiej a ostatnio powiązań miedzy dynamiką i analityczną teorią liczb. Jego pierwsza praca została opublikowana w 2012 r. Habilitant jest kierownikiem grantu amerykańskiej Narodowej Fundacji Nauki (NSF) oraz laureatem wielu nagród: Nagroda Instytutu Matematycznego za pracę doktorską (2015), Międzynarodowa nagroda im. Banacha za rozprawę doktorską z nauk matematycznych (2016), Nagroda Polskiego Towarzystwa Matematycznego dla Młodych Matematyków (2016) i Nagroda Kazimierza Kuratowskiego (2017).

Ocena osiągnięć badawczo-naukowych Habilitanta. W skład osiągnięć naukowych przedstawionych do oceny w postępowaniu habilitacyjnym wszedł cykl 5 prac naukowych pod wspólnym tytułem „Dynamiczne niezmienniki dla układów o wzroście podwykładniczym":

H1. A. Kanigowski, *Slow entropy for smooth flows on surfaces*, Israel J. Math., 226 (2018), 535–577.

H2. A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Slow entropy of some parabolic flows*, Comm. Math. Phys., 370 (2019), 449–474.

H3. A. Kanigowski, D. Wei, *Product of two Kochergin flows with different exponents is not standard*, Studia Math., 244 (2019), 265–283.

H4. A. Kanigowski, T. de la Rue, *Product of two staircase rank one transformations that is not loosely Bernoulli*, Journal d'Analyse Math., 143 (2021) , 535–553.

H5. A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Kakutani equivalence of unipotent flows*, Duke Math. J., 170 (2021), no. 7, 1517–1583.

Postępowanie habilitacyjne przyczynia się do klasyfikacji pewnych klas układów dynamicznych, głównie gładkich poprzez obliczanie dynamiczne niezmienniki jak entropia wolna i niezmiennik Kakutaniego.

Potoki na powierzchniach należą do najbardziej klasycznych przykładów układów dynamicznych. W pracy [H1] są badane potoki Arnol'da i Kochergina. Te potoki są reprezentowane jako potoki zawieszenia nad obrotami niewymiernymi $(\mathbb{T}^1, \alpha)$ i pod funkcją dachową $f \in C^2(\mathbb{T}^1 \setminus \{0\})$, która spełnia ($A_i > 0$, $B_i > 0$):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = A_1 \text{ i } \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{h(1-x)} = B_1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{h'(x)} = A_2 \text{ i } \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{h'(1-x)} = B_2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{h''(x)} = A_3 \text{ i } \lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x)}{h''(1-x)} = B_3,$$

gdzie dla potoku Arnol'da, $A_i + B_i \neq 0$ i $h(x) = -\log x$ oraz dla potoku Kochergina, $A^2 + B^2 > 0$ i $h(x) = x^{-\gamma}$ $0 < \gamma < 1$. Tu klasyczna entropia Kołmogorowa-Sinaja jest zerowa. Dlatego naturalną próbą jest obliczenie wolnej entropii Katoka i Thouvenot'a. Ideą wolnej entropii jest wybór nowej „skali", dla której obliczany jest asymptotyczny współczynnik wzrostu orbity. W szczególności można użyć rodziny wielomianowej n^χ zamiast wykładniczej $\exp(\chi n)$, aby uzyskać użyteczny niezmiennik dla układów o zerowej entropii. Rzeczywiście niech $\mathcal{T} = (T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie potokiem na $(X, \mathcal{B}, \mu)$ a $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ będzie skończonym mierzalnym rozbiciem X. Dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ ich T-odległość Hamminga względem P jest dana przez

$$\bar{d}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{P}}(x,y) := \frac{T - \text{Leb}\left(\{s \in [0,T] \mid \mathcal{P}(T^s x) = \mathcal{P}(T^s y)\}\right)}{T},$$

Dla $\epsilon > 0$, niech $B^{\mathcal{T}}_{\mathcal{P}}(x,\epsilon) = \{y \in X \mid \bar{d}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{P}}(x,y) < \epsilon\}$ będzie *ϵ-kulą Hamminga o środku w punkcie x*. Definiujemy

$$S(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \epsilon) = \min\{\text{card}(F) \mid \mu\left(\bigcup_{x\in F} B^{\mathcal{T}}_{\mathcal{P}}(x,\epsilon)\right) > 1 - \epsilon\}.$$

Dla funkcji $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że $a(T) \to \infty$ gdy $T \to \infty$ definiujemy

$$A(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \epsilon, a) = \limsup_{T\to\infty} \frac{S(\mathcal{P}, T, \epsilon)}{a(T)}.$$

Zakładamy, że mamy ustaloną rodzinę funkcji $a_\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\chi \in \mathbb{R}_+$ taką, ze jeśli $\chi < \chi'$, $a_\chi(\cdot) = o(a_{\chi'}(\cdot))$. Definiujemy wolną entropie potoku $\mathcal{T}$ jako

$$h_{a_\chi}(\mathcal{T}) := \sup_{\mathcal{P}-\text{ rozbicie skończone}} h_{a_\chi}(\mathcal{T}, \mathcal{P}),$$

gdzie

$$h_{a_\chi}(\mathcal{T}, \mathcal{P}) := \lim_{\epsilon\to 0} \left(\sup\{\chi : A(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \epsilon, a_\chi) > 0\}\right).$$

Pierwsze główne twierdzenie [H1] jest że, dla prawie każdej częstotliwości α, dla odpowiadającego jej potoku Arnol'da, wolna entropia względem rodziny $a_\chi(t) = t(\log t)^\chi$ jest równa 1. Drugie główne twierdzenie [H1] jest że, dla prawie każdej częstotliwości α oraz dla każdego wykładnika $\gamma \in (0,1)$, dla odpowiadającego im potoku Kochergina wolna entropia względem rodziny $a_\chi(t) = t^\chi$, jest równa $1 + \gamma$. To daje następujący imponujący wniosek: Dwa dowolne potoki Kochergina o częstotliwościach w zbiorze miary Lebesgue'a 1 i o różnych wykładnikach nie są izomorficzne. O ile mi wiadomo te nietrywialne obliczenie wolnej entropii potoków w tej pracy ma pionierski charakter. Dodatkowo, wykorzystanie nierówności Denjoy-Koksma w dowodzie do uzyskania dolnej granicy wolnej entropii dla potoku Kochergina, bez wątpienia pokazuje matematyczne wyrafinowanie.

Mówi się, że potok jest paraboliczny, jeśli pobliskie orbity rozchodzą się z prędkością podwykładniczą (często wielomianową). Pracy [H2] i [H5], które są mocno związane, zajmują się klasycznymi przykładami gładkich potoków parabolicznych. Skoncentrujemy się na głównej klasie tych prac. Niech G będzie grupą Liego półprostej i niech $\mathfrak{g}$ będzie jej algebrą Liego, a $U \in \mathfrak{g}$ będzie elementem unipotentnym. *Łańcuch w $\mathfrak{g}$ względem U o głębokości m* jest liniowo niezależnym zbiorem $\{X_j : 0 \leq j \leq m\}$ takim, że X_0 jest w centralizatorze U oraz $\mathrm{ad}_U(X_i) = X_{i-1}$ dla wszystkich $1 \leq i \leq m$. Baza łańcuchowa $\mathfrak{g}$ względem U jest bazą, która jest sumą łańcuchów. Ciąg głębokości $(m_1, \ldots, m_n)$ bazy łańcuchów nazywano *strukturą łańcuchową U*. Główny wynik pracy [H2] jest następujący. Niech $\mathcal{T} = (\exp(tU))_{t\in\mathbb{R}}$ będzie potokiem na przestrzeni jednorodnej o skończonej objętości G/Γ, gdzie $U \in \mathfrak{g}$ jest elementem unipotentnym. Wtedy topologiczna wolna entropia i miarowa wolna entropia $\mathcal{T}$ w odniesieniu do skali wielomianowej $a_\chi(t) = t^\chi$ są równe $GR(U)$, gdzie

$$GR(U) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(m_i + 1).$$

Dowód w dużej mierze zależy od faktu, że pobliskie trajektorie rozchodzą się wielomianowo.

Dwa $\mathbb{Z}$-działania T i S są równoważne w sensie Kakutaniego, jeśli istnieją zbiory mierzalne $A \subset X$ i $B \subset Y$ takie, że $(T_{|A}, A, \mu_A)$ i $(S_{|B}, B, \nu_B)$ są izomorficzne, gdzie $T_{|A}$ i $S_{|B}$ oznaczają automorfizmy indukowane a μ_A i ν_B oznaczają miary warunkowe. Automorfizm T jest układem *obszernie Bernoulliego o zerowej entropii*, jeśli jest on równoważny w sensie Kakutaniego z obrotem niewymiernym na $\mathbb{T}^2$. Dwa $\mathbb{R}$-działania $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ na (X, μ) i (Y, ν) odpowiednio są równoważne w sensie Kakutaniego jeśli istnieje zamiana czasu potoku $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ w klasy L^1, która jest izomorficzna z $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Potok ergodyczny o zerowej entropii $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest układem *obszernie Bernoulliego o zerowej entropii* jeśli istnieje cięcie (z mapą pierwszego powrotu) który jest $\mathbb{Z}$-układem obszernie Bernoulliego o zerowej entropii. Według wyniku Ornsteina-Rudolpha-Weissa jeśli T_1 jest ergodyczny i układem obszernie Bernoulliego o zerowej entropii wtedy potok $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest układem obszernie Bernoulliego o zerowej entropii.

W Pracy [H5] autorzy pokazują, że niezmiennik $GR(U)$ może służyć do liczenia niezmiennika Kakutaniego zdefiniowanego przez Ratner. Najpierw Ratner uogólniła metrykę $\overline{f}$ Feldmana na potokach: Dla $x, y \in X$, $\epsilon, R > 0$, części orbit $I_R(x)$ i $I_R(y)$ nazywano $(\epsilon, \mathcal{P}, R)$-zgodnymi, jeśli istnieje podzbiór $A = A(x,y) \subset [0,R]$, $l(A) > (1-\epsilon)R$ i rosnąca, absolutnie ciągła funkcja $h = h(x,y) : [0,R] \to [0,R]$ taka, że h wysyła A na $A' = A'(x,y) \subset [0,R]$, $l(A') > (1-\epsilon)R$ przy czym $\mathcal{P}(T_t x) = \mathcal{P}(T_{h(t)} y)$ dla wszystkich $t \in A$ a ponadto pochodna $h' = h'(x,y)$ spełnia $|h'(t) - 1| < \epsilon$ dla wszystkich $t \in A$. Definiujemy

$$\overline{f}_R(x, y, \mathcal{P}) = \inf\{\epsilon > 0 : I_R(x) \text{ i } I_R(y) \text{ są } (\epsilon, \mathcal{P}, R)\text{-zgodne}\}.$$

Metryka $\overline{f}$ została wprowadzona przez Feldmana w ramach tworzenia teorii układów obszernie Bernoulliego. Ratner miała następujący genialny pomysł: użyć wzrostu kulek $\overline{f}$, aby odróżnić klasy równoważności Kakutaniego: Niech $B_R(x,\epsilon,\mathcal{P}) := \{y \in X \mid \overline{f}_R(x,y,\mathcal{P}) < \epsilon\}$ będzie $(R,\mathcal{P})$-kulą o promieniu $\epsilon > 0$ o środku w $x \in X$, $R > 0$. Rodzinę $\alpha_R(\epsilon,\mathcal{P})$ $(R,\mathcal{P})$-kul o promieniu $\epsilon > 0$ nazywano $(\epsilon,\mathcal{P},R)$-pokryciem X, jeżeli $\nu(\cup\alpha_R(\epsilon,\mathcal{P})) > 1-\epsilon$. Oznaczmy $K_R(\epsilon,\mathcal{P}) = \inf|\alpha_R(\epsilon,\mathcal{P})|$, gdzie infimum jest brane po wszystkich $(\epsilon,\mathcal{P},R)$ pokryciach zbioru X. Niech F oznacza rodzinę wszystkich funkcji nierosnących z $\mathbb{R}^+$ w siebie, rozbieżnych do $+\infty$. Dla $u \in F$, oznaczamy

$$\begin{aligned}
\beta(u,\epsilon,\mathcal{P}) &= \liminf_{R\to\infty} \frac{\log K_R(\epsilon,\mathcal{P})}{u(R)}; \\
e(u,\mathcal{P}) &= \lim_{\epsilon\to 0} \beta(u,\epsilon,\mathcal{P}); \\
e((T_t),u) &= \sup_{\mathcal{P}} e(u,\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Ratner udowodniła, że jeżeli (T_t) i (S_t) są dwoma ergodycznymi, równoważnymi w sensie Kakutaniego potokami określonymi odpowiednio na przestrzeniach $(X,\mathscr{B},\nu)$ i $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\nu})$, wtedy $e((T_t),u) = e((S_t),u)$ dla wszystkich $u \in F$ spełniających $\lim_{t\to\infty}\frac{u(at)}{u(t)} = 1$ dla wszystkich $a > 0$. Główny wynik pracy [H5] jest prawdziwym tour de force: Niech $\mathcal{T} = (\exp(tU))_{t\in\mathbb{R}}$ będzie potokiem na przestrzeni jednorodnej o skończonej objętości G/Γ, gdzie $U \in \mathfrak{g}$ jest elementem unipotentnym. Jeśli krata Γ jest ko-zwarta, to niezmiennik Kakutaniego równa

$$e((\mathcal{T}),\log) = GR(U) - 3.$$

Dla Γ o skończonej ko-objętości wychodzi

$$GR(U) - 4 \le e((\mathcal{T}),\log) \le GR(U) - 3.$$

Ponadto, jeśli $GR(U) = 3$, to $\mathcal{T}$ jest obszernie Bernoulliego. Z tym wynikiem autorzy, na podstawie obliczenia $GR(U)$ wyciągnęli wiele wniosków, n.p. niech G będzie liniową półprostą grupą Liego o $\dim G > 3$, wtedy istnieją ergodyczne potoki unipotentne na G/Γ, które nie są obszernie Bernoulliego; Jeżeli G jest prosta, to żaden potok unipotentny na G/Γ nie jest obszernie Bernoulliego; Jeśli G ma stopień rzeczywisty co najmniej dwa, to istnieją dwa potoki unipotentne na G/Γ które nie są równoważne w sensie Kakutaniego.

Zauważmy że ostatni wniosek rozwiązał w dużym stopniu problem otwarty z wykładu Ratner w Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Zurychu w 1994 r. i zatem jest to ważne osiągnięcie.

W artykule [H3] główny wynik jest, że produkt kartezjański dwóch potoków Kochergina Koch(α_1,γ_1) i Koch(α_2,γ_2) o różnych wykładnikach $\gamma_1,\gamma_2 \in (-1,0)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ nie jest obszernie Bernoulliego dla prawie wszystkich (α_1,α_2).

Praca [H4] ma wyspecjalizowany charakter. Dotyczy ona układów schodkowych rangi jeden. Układy rangi jeden są konstruowane przez cięcie i nadstawianie, gdzie ranga jeden odpowiada faktem, że w każdym etapie po nadstawianiu widzimy tylko jedną wierzę. Dla układów schodkowych rangi jeden zakłada się, że nadstawki wyglądają jak schody w każdym etapie, w pierwszym przedziale jedna nadstawka, w drugim przedziale dwie nadstawki itd. Należy zauważyć, że wszystkie układy skończonej rangi są układamy obszernie Bernoulliego o zerowej entropii. Główny wynik artykułu [H4] jest, że istnieją dwa układy schodkowe rangi jeden, których iloczyn kartezjański nie jest obszernie Bernoulliego. Autorzy pozostawiają otwarte trudniejsze pytanie, czy istnieje układ schodkowy rangi jeden, którego kartezjańskiego iloczynu nie jest obszernie Bernoulliego.

Jedna z omawianych pięciu prac została opublikowana w bardzo prestiżowym czasopiśmie (Duke Math J.). Jedna z omawianych pięciu prac została opublikowana w doskonałym czasopiśmie (Comm. Math. Phys.). Dwie z omawianych pięciu prac zostały opublikowane w bardzo dobrych czasopismach (Israel J. Math., Journal d'Analyse Math.). Jedna z omawianych pięciu prac została opublikowana w dobrym czasopiśmie (Studia Math.). Wszystkie artykuły zawierają bardzo ciekawe wyniki, w przypadku pracy [H5] nadto spektakularne, i oceniam je bardzo wysoko. Aby rozumieć kontekst prac [H1] i [H3], trzeba podkreślić bardzo znaczący wkład Habilitanta w badania nad potokami Kochergina. Te potoki, które zostały skonstruowane przez Kochergina w 1975 jako pierwsze przykłady mieszających potoków zachowujących powierzchnię na torusie, najeżają do klasyki dziedziny układów dynamicznych. Jednak wiele nietrywialnych i ważnych własności tych potoków zostało udowodnione przez Habilitanta i jego współpracowników: przy warunku diofantycznym dotyczącym częstotliwości potoki Kochergina są mieszające wszystkich rzędów (B. Fayad, A. Kanigowski, *Multiple mixing for a class of conservative surface flows*, Invent. Math., 203 (2) (2016), 555-614.), niektóre potoki Kochergina (o wysokim stopniu degeneracji siodła) na torusie mają przeliczalne widmo Lebesgue'a (B. Fayad, G. Forni, A. Kanigowski, *Countable Lebesgue spectrum for area preserving flows on the two torus,*, J. Amer. Math. Soc. 34 (2021), 747-813). Dodatkowo Habilitant uzyskał wyniki dla potoków Kochergina w artykułach [H1] i [H3] recenzowane powyżej.

Uważam, że styl artykułów w habilitacji jest dość zwięzły. Rzeczywiście, jeśli chodzi o ważne wyniki, które wzbudzą duże zainteresowanie, ważne jest, aby przedstawić je w sposób, który ułatwi czytelnikom zrozumienie dowodów.

Dorobek naukowo-badawczy publikowany w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JRC) oceniam bardzo wysoko. Dorobek jest bardzo bogaty i składa się z 30 opublikowanych prac i 5 preprintów, w tym arykuły w bardzo prestiżowych czasopismach: jeden artykuł w Duke Math. J., dwa artykuły w Inventiones Mathematicae, jeden artykuł w J. European Math. Soc. i jeden artykuł w Journal of the AMS. Tematyka artykułów nie wchodzących w habilitacji zawiera m.in. uogólnienie własności Ratner w kontekście gładkich potoków na powierzchniach, konstrukcja nietrywialnych przykładach w gładkiej dynamice m.in. odpowiadając na pytania zadane przez Rudolpha, Daniego, Bowena, Thouvenot'a i Katoka, badania połączenia i rozłączności w kontekście układów parabolicznych, badania widma gładkich układów o zerowej entropii i badania orbit układów dynamicznych wzdłuż czasów pierwszych.

Traktując dorobek naukowo-badawczy Habilitanta w całości, stwierdzam, że jest on zdecydowanie bardzo rozpoznawalny na arenie międzynarodowej. Według MathSciNet prace naukowe Habilitanta zostały cytowane 129 razy (w tym autocytowań, natomiast najnowsze cytowana brakują). Według Google Scholar całość dorobku Habilitanta została cytowana 300 razy (w tym autocytowań). Na podstawie analizy cytowań szanuję, że Habilitant ma około 150 cytowań właściwych (t.z. bez autocytowań). W okresie 7 lat po doktoracie jest to wynik bardzo imponujący. W okresie 2014-2021 Habilitant brał udział w 13 międzynarodowych konferencjach z układów dynamicznych, na których prezentował wyniki swoich badań. Ten wynik jest satysfakcjonujący.

Ocena dorobku dydaktycznego i popularyzatorskiego oraz współpracy międzynarodowej Habilitanta. Dorobek dydaktyczny i w kształceniu kadr nie budzi wątpliwości. W szczególności Habilitant był mentorem studenta pierwszego stopnia oraz doktoranta w UMD i prowadził 8 kursów dla studentów pierwszego stopnia w latach 2016-2020. Habilitant współorganizował kilka seminaria i jeden warsztat. W Autroreferacie nia ma informacji o wizytach w ośrodkach naukowych. Habiltant współpracuje naukowo z wieloma wybitnymi matematykami takimi, jak J. Chaika, D. Dolgopyat, B. Fayad, G. Forni, K. Frączek, M. Lemańczyk, M. Radziwiłł, F. Rodriguez-Hertz, T. de la Rue, C.

Ulcigrai, B. Weiss i V. Bergelson. Wymiona lista ma charakter międzynarodowy i jest bardzo imponująca. Dodatkowo trzeba podkreślić, że Habilitant pracuje na Uniwersytecie w Marylandzie (UMD), wiodącym w skali światowej centrum badań w dziedzinie układów dynamicznych.

Podsumowanie recenzji. Dorobek naukowy Habilitanta oraz jego wartość dla rozwoju teorii ergodycznej i dynamiki gładkiej oceniam bardzo wysoko. W szczególności trzeba podkreślić Jego ważną rolę w rozwoju teorii potoków Kochergina i stosowania niezmiennika Kakutaniego. Widać, że Habilitant szuka nowych inspirujących kierunków badań, n.p. ostatnio zajmuje interfejsem między teorią układów dynamicznych i teorią liczb. W tych poszukiwaniach Habilitant wykazuje niezwykłą zdolność współpracy z najwybitniejszymi specjalistami. Zatem jestem przekonany że Jego wkład na dalszym rozwoju teorii układów dynamicznych będzie znaczący. Uważam, że przedstawiony przez Habilitanta dorobek naukowo-badawczy oraz jego aktywność dydaktyczna i we współpracy międzynarodowej spełniają z naddatkiem i ustawowe i zwyczajowe wymogi. W związku z tym gorąco popieram wniosek o nadanie dr. Adamowi Kanigowskiemu stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych w dziedzinie matematyka z wyróżnianiem.

Jonatan Gutman

Jonatan Gutman