INSTYTUT MATEMATYCZNY
Polskiej Akademii Nauk

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa, tel. +48 22 522 81 00
fax +48 22 629 39 97, e-mail: im@impan.pl, www.impan.pl

Warszawa, dn. 7 czerwca, 2022 roku
Feliks Przytycki, IM PAN

Prof. Krzysztof Frączek
Przewodniczący Rady
Dyscypliny Matematyka, UMK

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Adama Kanigowskiego

Jest to wybitna habilitacja. Autor przedstawia w swoim wniosku cykl powiązanych tematycznie obszernych artykułów naukowych opublikowanych w czołowych matematycznych pismach międzynarodowych. Wspólny tytuł tych artykułów to *Dynamiczne wykładniki o wzroście podwykładniczym*:

[H1] A. Kanigowski, *Slow entropy for smooth flows on surfaces*, Israel J. Math. (2018),
[H2] A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Slow entropy of some parabolic flows*, Comm. Math. Phys. (2019),
[H3] A. Kanigowski, D. Wei, *Product of two Kochergin flows with different exponents is not standard*, Studia Math. (2019),
[H4] A. Kanigowski, T. de la Rue *Product of two staircase rank one transformations that is not loosely Bernoulli*, J. d'Analyse Mathematique (2021),
[H5] A. Kanigowski, K. Vinhage *Kakutani equivalence of unipotent flows*, Duke Math. (2021).

Dorobek autora poza tym cyklem wystarczyłby jednak na jeszcze kilka habilitacji.

Stworzona przez autora w ww. publikacjach (we współpracy) teoria dotyczy dynamiki przekształceń o metrycznej entropii Kołmogorowa-Sinai'a zero, gdzie skuteczne są inne niezmienniki, a klasyfikacja jest **równoważnością Kakutaniego**, silniejszą niż orbitalna równoważność, kiedy równoważność (mierzalne T) przeprowadza orbity na orbity, a słabsza niż kiedy T zachowuje czas.

Odpowiednim tu niezmiennikiem rozróżniającym takie dynamiki (w miejsce zerowej entropii) jest *wolna entropia*. Entropię można bowiem zdefiniować licząc pokrywające kule Hamminga w różnych skalach wolniejszych niż wykładnicze. Dla skali $\log t$ wprowadzona była jako entropia przez Marinę Ratner w 1981, która udowodniła jej niezmienniczość dla równoważności Kakutaniego.

Termin *wolna* w terminologii Autoreferatu to, sądzę, tłumaczenie na polski słowa "slow" (wg tytułów [H1] i [H2]), a nie słowa "free". Lepszy byłby więc termin "powolna". W autoreferacie w Def. 4.1 wprowadzono (metryczną) wolną entropię, a w Definicji 4.5 niezmiennik Kakutaniego. Wyglądają na ściśle powiązane. Skale w jednej chyba odpowiadają logarytmowi skali w drugiej. Przydałby się komentarz w Autoreferacie.

W habilitacji zbadane są te niezmienniki dla pewnych fundamentalnych klas potolów. W [H1] dla specjalnych potoków Arnolda lub Kochergina nad obrotem o kąt niewymierny spełniający pewne warunki diofantyczne i funkcji dachowej będącej asymetrycznym logarytmem lub funkcją x^γ (związaną z osobliwością potoku), wolna entropia jest z tymi funkcjami (klasy Arnolda) związana odpowiednią rodziną funkcji skalujących.

Dowody są techniczne, głęboko nietrywialne. Wynik jest naturalny, jednocześnie ważny w żywo rozwijającej się teorii ergodycznej potoków na powierzchniach. Inny wynik mówi że lokalna ranga tych potoków jest większa niz 1. Praca kontynuuje badania Katoka, Lemańczyka, Thouvenot i innych.

W [H2] pokazano, że dla potokow quasi-unipotentnych generowanych U dla grup Liego półprostych, nilpotentnych (lub ich półprostych produktów), podzielonych przez krat, e, jeśli wynikła przestrzeń jednorodna ma skończoną objętość, to entropia wolna z rodziną funkcji a skalujących wielomianową, zatem w skali logarytmicznej, jest równa $GR(U)$, wzrostowi grupy, wyrażonemu wielkością klatek Jordana operatora ad_U.

W innym twierdzeniu wprowadzono pojęcie topologicznej wolnej entropii i udowodniono równość z metryczną. To nie dziwi dla potoków o algebraicznej naturze.

Kanigowski w swojej habilitacji interesuje się własnością *obszernie Kroneckera*, lub jej niespełnianiem, dla dynamiki o entropii Kolmogorowa równej 0. Spełnienie tej własności oznacza równoważność Kakutaniego z obrotem niewymiernym okręgu (lub odpowiednim potokiem na torusie w przypadku potoku) Nie wszystkie przekształcenia o entropii 0 mają własność obszernie Kroneckera. Potoki unipotentne w [H2] są obszernie Kroneckera lub nie, patrz [H5] opisany niżej. Skonstruowanie przykładów z entropią 0 nie obszernie Kronekera (nazywanych też *niestandardowe*, okazało się w początkach tej teorii trudne. Interesujące naturalne przykłady podał Kanigowski w [H3], jako produkty kartezjańskie potoków Kochergina. Są to gładkie potoki w wymiarze 4, jest ich nieprzeliczalnie wiele, parami niesprzężonych w sensie Kakutani. Analogicznie w [H4] Kanigowski i de la Rue skonstruowali przykłady nie obszernie Bernoulli, z entropią zero, przekształcenia jako iloczyny kartezjańskie rangi 1 przekształceń Kochergina ze schodkowymi funkcjami dachowymi.

W [H5] pokazano, że dla potokow unipotentnych U dla półprostych grup Liego podzielonych przez kratę **logarytmiczny** niezmiennik Kakutaniego Ratner można wyrazić w języku wzrostu $GR(U)$ grupy (patrz wyżej). Jeśli $GR(U) = 3$ to potok jest obszernie (loosely) Bernoulli o zerowej entropii (użyłbym tłumaczenia "luźno"). To rozwiązuje problem 1. Mariny Ratner w jej słynnej prezentacji w Proc. ICM Zurich 1994.

Pozostałe publikacje w dorobku A. Kanigowskiego układają sią w następujące cykle:

1. Własność Ratner dla gładkich potoków na powierzchniach. 6 prac, (prawie) wszystkie w świetnych pismach: Erg. Th. Dyn. Sys., Invent. Math., J. Europ. Math. Soc.

2. Sztywność i elastyczność własności ergodycznych w gładkiej dynamice, 5 prac + dwie posłane do publ, pisma: J. Modern Dyn., Trans AMS, Isr. J. Math.,

3. Połączenia dla układów parabolicznych, 6 prac. Studia Math., J. Ec. Polyt. Math., Israel J. Math., Invent. Math., Erg. Th. Dyn. Sys.

4. Własności spektralne układów gładkich, 5 prac: Asterisque, J. London Math. Soc., Comm. Math. Phys, J. AMS (uważane za jedno z trzech najlepszych matematycznych pism na świecie).

Kariera matematyczna Kanigowskiego rozwija się znakomicie. Ma wspólne prace ze świetnymi matematykami, spikerami na ICM: Dmitry Dolgopyat, Giovanni Forni, Mariusz Lemańczyk, Maxim Radziwiłł, Federico Rodriguez-Hertz, Corinna Ultigrai. Należy do światowej czołówki młodych matematyków w dziedzinie teorii ergodycznej. Obecnie służy mu pobyt w jednym z najlepszych centrów matematycznych na świecie: współpracujące PennState + Maryland Universities.

Opisane w jego wniosku osiągnięcie stanowi znaczny wkład w rozwój matematyki, a w szczególności układów dynamicznych i teorii ergodycznej. Zdecydowanie rekomenduję nadanie mu stopnia doktora habilitowanego. Jego dorobek naukowy jest wystarczający nawet dla nadanuia mu tytułu naukowego profesora.

Feliks Przytycki